



Análise de Estabilidade para Sistemas Dinâmicos em Escalas Temporais

Iguer Luis Domini dos Santos¹

Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

Resumo. Nesse trabalho introduzimos uma abordagem de estabilidade para sistemas dinâmicos em escalas temporais. Para isso, generalizamos conceitos da literatura de sistemas dinâmicos. Assim, utilizando funções de Lyapunov para sistemas dinâmicos em escalas temporais, extendemos resultados de estabilidade de sistemas dinâmicos contínuos para sistemas dinâmicos em escalas temporais.

Palavras-chave. Sistemas Dinâmicos, Estabilidade, Escalas Temporais

1 Introdução

O estudo da estabilidade para equações dinâmicas em escalas temporais pode ser encontrado em [2] e [3]. Uma escala temporal é um subconjunto fechado e não-vazio de números reais. Aqui usamos uma escala temporal $\mathbb{T}$ tal que $\sup \mathbb{T} = +\infty$ e $0 \in \mathbb{T}$. No presente trabalho generalizamos conceitos e resultados de sistemas dinâmicos contínuos considerados em [4]. Assim, introduzimos os conceitos de estabilidade e de funções de Lyapunov para sistemas dinâmicos em escalas temporais. Então extendemos resultados de estabilidade em [4] para sistemas dinâmicos em escalas temporais.

Consideramos aqui exemplos envolvendo equações dinâmicas em escalas temporais. O estudo de equações dinâmicas em escalas temporais pode ser encontrado em [1] e [7].

2 Preliminares

Conceitos e resultados básicos da teoria de escalas temporais podem ser encontrados em [5] e [6]. A seguir definimos a derivada delta.

Definimos a função $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ como

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

e a função $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ como

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

¹iguerluis@mat.feis.unesp.br

Estamos supondo que $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$.

Seja $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Considere uma função $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{T}$. Se existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \xi(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

para todo $s \in (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$, diz-se que ξ é a derivada delta de f em t e denota-se $\xi = f^\Delta(t)$.

$\mathbb{T}^+$ denotará o conjunto $\mathbb{T} \cap [0, +\infty)$. Se (X, d) é um espaço métrico e $M \subset X$, denotamos o conjunto $\{x \in X : d(x, M) < r\}$ por $B(M; r)$. $C[X, Y]$ denotará o conjunto das funções contínuas com domínio X e contradomínio Y . Se $A \subset \mathbb{R}$, defina o conjunto $A_{\mathbb{T}}$ como $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$.

Dizemos que uma função $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é regressiva se $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Temos o seguinte resultado de existência de soluções provado em [1].

Teorema 2.1. *Seja $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função rd-contínua e regressiva. Suponha que $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ seja rd-contínua, $t_0 \in \mathbb{T}$, e $y_0 \in \mathbb{R}$. Então a única solução do problema de valor inicial*

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t) + f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

é dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

A função $e_p(t, t_0)$ considerada no teorema é a função exponencial na escala temporal.

2.1 Função exponencial

Definimos o conjunto das funções regressivas, $\mathcal{R}$, por

$$\mathcal{R} := \{p \in C_{rd}(\mathbb{T}; \mathbb{R}) : 1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}\}$$

e o conjunto das funções positivamente regressivas, $\mathcal{R}^+$, por

$$\mathcal{R}^+ := \{p \in C_{rd}(\mathbb{T}; \mathbb{R}) : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \forall t \in \mathbb{T}\}.$$

Se $p \in \mathcal{R}$, a única solução para o problema de valor inicial

$$x^\Delta = p(t)x, \quad x(a) = 1,$$

é dada pela função exponencial $e_p(t, a)$ na escala temporal $\mathbb{T}$, onde

$$e_p(t, a) = \exp \left(\int_a^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \right)$$

com $\xi_h(z) = \frac{\log(1+hz)}{h}$ se $h \neq 0$ e $\xi_h(z) = z$ se $h = 0$, e $\log$ é a função logarítmica principal.

3 Sistemas Dinâmicos

A seguir definimos sistemas dinâmicos em escalas temporais e introduzimos a estabilidade de Lyapunov.

Definição 3.1. *Seja (X, d) um espaço métrico, $\mathcal{A} \subset X$ e $\mathbb{T}_0^+ \subset \mathbb{T}^+$. Para cada $a \in \mathcal{A}$ e $t_0 \in \mathbb{T}_0^+$, a aplicação $p(\cdot, a, t_0) : \mathbb{T}_{a, t_0}^+ \rightarrow X$ é chamada de uma trajetória se $p(t_0, a, t_0) = a$, onde $\mathbb{T}_{a, t_0}^+ = \{t \in \mathbb{T}^+ : t \geq t_0\}$.*

Definição 3.2. *Considere um conjunto de trajetórias S , ou seja,*

$$S \subset \{p(\cdot, a, t_0) \in \Lambda : p(t_0, a, t_0) = a\}$$

sendo $\Lambda = \cup_{(a, t_0) \in (\mathcal{A} \times \mathbb{T}_0^+)} \{\varphi : \mathbb{T}_{a, t_0}^+ \rightarrow X\}$. A quintupla $\{\mathbb{T}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$ é chamada de sistema dinâmico em escala temporal.

Para introduzir a estabilidade de Lyapunov usaremos o conceito de conjunto invariante.

Definição 3.3. *Dado um sistema dinâmico em escala temporal $\{\mathbb{T}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$, dizemos que o conjunto $M \subset \mathcal{A}$ é invariante em relação ao sistema S (isto é, (S, M) é invariante) se $a \in M$ implica que $p(t, a, t_0) \in M$ para todo $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$ tal que $p(\cdot, a, t_0) \in S$.*

Definição 3.4 (Estabilidade de Lyapunov). *Seja $\{\mathbb{T}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$ um sistema dinâmico em escala temporal e $M \subset \mathcal{A}$ um conjunto invariante de S .*

(i) *Diz-se que (S, M) é estável se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que, $d(p(t, a, t_0), M) < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$ quando $d(a, M) < \delta$ e $p(\cdot, a, t_0) \in S$.*

(ii) *(S, M) é uniformemente estável se $\delta = \delta(\epsilon)$.*

(iii) *Se (S, M) é estável e para $t_0 \in \mathbb{T}_0^+$ existir um $\eta = \eta(t_0) > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe um $t_\epsilon \in \mathbb{T}^+$ de modo que $d(p(t, a, t_0), M) < \epsilon$ para todo $t \in [t_\epsilon, \infty)_{\mathbb{T}}$, quando $d(a, M) < \eta$ e $p(\cdot, a, t_0) \in S$, então (S, M) é assintoticamente estável.*

(iv) *Dizemos que (S, M) é uniformemente assintoticamente estável se (S, M) for uniformemente estável e se existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ de modo que $d(p(t, a, t_0), M) < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$ tal que $t - t_0 \geq \tau$, quando $d(a, M) < \delta$ e $p(\cdot, a, t_0) \in S$.*

(v) *Chamamos (S, M) de exponencialmente estável se existe $\alpha > 0$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ de modo que $d(p(t, a, t_0), M) < \epsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$ para todo $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$, quando $d(a, M) < \delta$ e $p(\cdot, a, t_0) \in S$.*

Definição 3.5 (Instabilidade). *Dizemos que (S, M) é instável se não for estável.*

Para a estabilidade de Lyapunov temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Vale as seguintes implicações*

$$(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$$

$$(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).$$

A seguir abordamos exemplos com equações dinâmicas em escalas temporais.

Exemplo 1. *Seja $a < 0$ e suponha que a função constante $p(t) = a$ seja regressiva. Considere o seguinte problema de valor inicial*

$$x^\Delta(t) = ax(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $0 \in \mathcal{A}$ o conjunto dos estados iniciais x_0 , $\mathbb{T}_0^+ \subset \mathbb{T}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(1)} = \{p(\cdot, x_0, t_0) : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^+\}$ o conjunto das trajetórias $p(t, x_0, t_0) = x_0 e_a(t, t_0)$. Assim, obtemos o sistema dinâmico em escala temporal $\{\mathbb{T}^+, \mathbb{R}^+, \mathcal{A}, S_{(1)}, \mathbb{T}_0^+\}$. Temos os seguintes resultados:

- (i) $(S_{(1)}, \{0\})$ é invariante, já que $p(t, 0, t_0) = 0 e_a(t, t_0) = 0 \in \{0\}$ para todo $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$.
- (ii) Dado $\epsilon > 0$, se $\delta = \epsilon$ e $d(x_0, \{0\}) = x_0 < \delta$, então

$$d(p(t, x_0, t_0), \{0\}) = x_0 e_a(t, t_0) < \delta e_a(t, t_0) = \epsilon e_a(t, t_0) \leq \epsilon$$

para todo $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$. Portanto $(S_{(1)}, \{0\})$ é uniformemente estável.

Exemplo 2. *Seja agora o problema de valor inicial*

$$x^\Delta(t) = x(t) + 1, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}$. Então, seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $0 \in \mathcal{A}$ o conjunto dos estados iniciais x_0 , $\mathbb{T}_0^+ \subset \mathbb{T}^+$ o conjunto dos instantes iniciais t_0 e $S_{(2)}$ o conjunto das trajetórias $p(\cdot, x_0, t_0) : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tais que

$$p(t, x_0, t_0) = x_0 e_1(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_1(t, \sigma(\tau)) \Delta \tau.$$

Assim, obtemos o sistema dinâmico em escala temporal $\{\mathbb{T}^+, \mathbb{R}^+, \mathcal{A}, S_{(2)}, \mathbb{T}_0^+\}$.

Afirmamos que $(S_{(2)}, \{0\})$ é instável. De fato, para qualquer $\delta > 0$, seja $x_0 \neq 0$ tal que $d(x_0, \{0\}) = x_0 < \delta$ e seja $p(\cdot, x_0, t_0) \in S_{(2)}$ para algum $t_0 \in \mathbb{T}_0^+$ fixado arbitrariamente. Então, se $t_1 \in (t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ segue que

$$\begin{aligned} p(t_1, x_0, t_0) &= x_0 e_1(t_1, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e_1(t_1, \sigma(\tau)) \Delta \tau \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} e_1(t_1, \sigma(\tau)) \Delta \tau > 0 \end{aligned}$$

isto é, $d(p(t_1, x_0, t_0), \{0\}) \geq \int_{t_0}^{t_1} e_1(t_1, \sigma(\tau)) \Delta \tau$.

4 Funções de Lyapunov

Considere as trajetórias $p(\cdot, x_0, t_0) \in S$ de um determinado sistema dinâmico em escala temporal. Se M é invariante em relação a S e $U = B(M; r) \subset \mathcal{A}$ para algum $r > 0$, a seguir definimos as funções de Lyapunov para sistemas dinâmicos em escalas temporais.

Definição 4.1. $V : U \times \mathbb{T}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de Lyapunov se:

- (i) para $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tem-se $V(x, t) > 0$ se $x \notin M$ e $V(x, t) = 0$ se $x \in M$;
- (ii) $V(p(t, x_0, t_0), t) := V_p(t)$ é continuamente diferenciável e $V_p^\Delta(t) \leq 0$ para todo $x_0 \in U$ e $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Usaremos funções de classe K e $K\mathbb{R}$, como definidas abaixo.

Definição 4.2. Uma função $\phi \in C[[0, r], \mathbb{R}^+]$ (respectivamente $\phi \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$) pertence à classe K ($\phi \in K$), se $\phi(0) = 0$ e se ϕ é estritamente crescente em $[0, r]$ (respectivamente em $\mathbb{R}^+$). Assim, a função $\phi \in K$ definida em $\mathbb{R}^+$ pertence à classe $K\mathbb{R}$ se $\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = +\infty$.

Observe que a condição (i) da definição de funções de Lyapunov é satisfeita se existirem funções $\psi_1, \psi_2 \in K$ definidas em $[0, r]$ tais que

$$\psi_1(d(x, M)) \leq V(x, t) \leq \psi_2(d(x, M)).$$

5 Resultados de Estabilidade

A seguir enunciamos e provamos resultados que garantem condições necessárias para a estabilidade de Lyapunov. Denotaremos a função $V(p(t, a, t_0), t)$ por $V_p(t)$.

Teorema 5.1. Seja $\{\mathbb{T}^+, (X, d), \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$ um sistema dinâmico em escala temporal e $M \subset A$ fechado. Suponha que existam uma função contínua $V : U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e funções $\psi_1, \psi_2 \in K$ definidas em $[0, r]$ tais que

$$\psi_1(d(x, M)) \leq V(x, t) \leq \psi_2(d(x, M))$$

para todo $x \in U$ e $t \in \mathbb{T}^+$.

(a) Suponha que para todo $a \in U = B(M; r) \subset \mathcal{A}$ e $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ se tenha $V_p^\Delta(t) \leq 0$. Então (S, M) é invariante e uniformemente estável.

(b) Em adição às condições dadas em (a), suponha que exista uma função $\psi_3 \in K$ definida em $[0, r]$ tal que

$$V_p^\Delta(t) \leq -\psi_3(d(p(t, a, t_0), M))$$

para todo $a \in U$ e $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Além disso, suponha que $t + t_0 \in \mathbb{T}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $t_0 \in \mathbb{T}_0^+$. Então (S, M) é uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração. (a) Como $M \subset U$, dado $a \in M$ temos que $V(p(t, a, t_0), t)$ é decrescente para todo $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Então

$$V(p(t, a, t_0), t) \leq V(p(t_0, a, t_0), t_0) = V(a, t_0) \leq \psi_2(d(a, M)) = \psi_2(0) = 0$$

e assim

$$d(p(t, a, t_0), M) \leq \psi_1^{-1}(0) = 0.$$

Como M é fechado segue que (S, M) é invariante.

Agora, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \psi_2^{-1}(\psi_1(\epsilon))$ tal que $d(a, M) < \delta$ e $a \in U$. Logo

$$\psi_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq V(p(t, a, t_0), t) \leq V(p(t_0, a, t_0), t_0) =$$

$$V(a, t_0) \leq \psi_2(d(a, M)) < \psi_2(\delta) = \psi_1(\epsilon)$$

e portanto $d(p(t, a, t_0), M) < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, isto é, (S, M) é uniformemente estável.

(b) Fixe um $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq r$, tal que $\psi_2(\delta_1) < \psi_1(r)$ e seja $\epsilon > 0$ de modo que $0 < \epsilon \leq r$. Seja agora um $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$ tal que $\delta_2 < \delta_1$ e $\psi_2(\delta_2) < \psi_1(\epsilon)$.

Seja $T \in \mathbb{T}$ tal que $T \geq \psi_1(r)/\psi_3(\delta_2)$ e $T + t_0 \in \mathbb{T}$. Para algum $a \in U$ tal que $d(a, M) < \delta_1$ afirmamos que $d(p(t^*, a, t_0), M) < \delta_2$ para algum $t^* \in [t_0, t_0 + T]$. Realmente, pois do contrário teríamos $d(p(t, a, t_0), M) \geq \delta_2$ para todo $t \in [t_0, t_0 + T]_{\mathbb{T}}$, logo

$$0 < \psi_1(\delta_2) \leq \psi_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq V(p(t, a, t_0), t) =$$

$$V(p(t_0, a, t_0), t_0) + \int_{t_0}^t V_p^\Delta(s) ds \leq$$

$$V(a, t_0) - \int_{t_0}^t \psi_3(d(p(s, a, t_0), M)) ds \leq \psi_2(d(a, M)) - \int_{t_0}^t \psi_3(\delta_2) ds <$$

$$\psi_2(\delta_1) - (t - t_0)\psi_3(\delta_2).$$

Dessa forma, se $t = t_0 + T$ temos

$$0 < \psi_2(\delta_1) - T\psi_3(\delta_2) \leq \psi_2(\delta_1) - \psi_1(r) < 0$$

o que é uma contradição e então t^* existe. Para $t \geq t^*$ temos

$$\psi_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq V(p(t, a, t_0), t) \leq V(p(t^*, a, t_0), t^*) \leq$$

$$\psi_2(d(p(t^*, a, t_0), M)) < \psi_2(\delta_2) < \psi_1(\epsilon)$$

e então $d(p(t, a, t_0), M) < \epsilon$ para todo $t \in [t^*, +\infty)_{\mathbb{T}}$, logo para todo $t \in [t_0 + T, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Assim (S, M) é uniformemente assintoticamente estável. $\square$

6 Conclusões

Esse trabalho contribui para a teoria de escalas temporais. Assim, são introduzidos conceitos de estabilidade para sistemas dinâmicos em escalas temporais. Além disso, são obtidas generalizações de resultados de estabilidade para sistemas dinâmicos contínuos.

Referências

- [1] M. Bohner and A. Peterson, First and second order linear dynamic equations on time scales, J. Difference Equ. Appl., vol. 7, 767–792, (2001).
- [2] M. Bohner and A. A. Martynyuk, Elements of stability theory of A. M. Lyapunov for dynamic equations on time scales, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, vol. 7, 225–251, (2007).

- [3] J. Hoffacker and C. C. Tisdell, Stability and instability for dynamic equations on time scales, *Comput. Math. Appl.*, vol. 49, 1327–1334, (2005).
- [4] I. L. D. Santos, Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos descontínuos e aplicações, *Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada*, Unesp, (2008).
- [5] I. L. D. Santos and G. N. Silva, Absolute continuity and existence of solutions to dynamic inclusions in time scales, *Math. Ann.*, vol. 356, 373–399, (2013).
- [6] I. L. D. Santos and G. N. Silva, Filippov’s selection theorem and the existence of solutions for optimal control problems in time scales, *Comput. Appl. Math.*, vol. 33, 223–241, (2014).
- [7] I. L. D. dos Santos, On qualitative and quantitative results for solutions to first-order dynamic equations on time scales, *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.*, vol. 21, 205–218, (2015).