



Algumas Considerações a Respeito de Medidas de Probabilidade no Escape na Vizinhança de Contatos Dobra-Dobra

Jeferson Cassiano¹

Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Resumo. A questão da recorrência em singularidades dobra-dobra está ligada ao comportamento do sistema dinâmico ao cruzar a mesma. Neste trabalho consideraremos alguns cenários. A saber: há ou não dinâmica no escape no futuro. Ao assumirmos a primeira hipótese estamos interessados em saber quais as consequências sobre a recorrência neste tipo de singularidade.

Palavras-chave. singularidade dobra-dobra, escape, densidade de probabilidade invariante.

1 Introdução

Seja um campo vetorial contínuo por partes em $\mathbb{R}^2$ com um contato dobra-dobra hiperbólico (Ver [4]).

$$\mathbf{f}_q(\mathbf{x}) = (qx_2 - \alpha_q) \frac{\partial}{\partial x_1} + (2\varsigma_q x_2 - qx_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + o(\|\mathbf{x}\|^2); \quad q = \text{sgn}(x_2); \quad \alpha_q, \varsigma_q > 0, \quad \varsigma_q < 1 \quad (1)$$

A subvariedade de descontinuidade é $H_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, a região de deslize é $Sl = \mathbb{R}_+^* \times \{0\}$ e a de escape é $E = \mathbb{R}_-^* \times \{0\}$ ($q\mathcal{L}_{\mathbf{f}_q}h(x_1, 0) = -x_1$). $\mathbf{0}$ é uma dobra-dobra hiperbólica ($q\mathcal{L}_{\mathbf{f}_q}h(\mathbf{0}) = \alpha_q > 0$).

Um importante questão surge: As órbitas entram em E por uma singularidade dobra-dobra? Se sim, quais as características de uma eventual medida de probabilidade invariante de escape de E ? Estas questões foram sucitadas pelos trabalhos de [1], [3] e [5].

Pode-se mostrar que as singularidades em H_q estão em $\alpha_q(2\varsigma_q, q)$ e são focos instáveis. Assim todas as órbitas fora das singularidades chegam a H_0 .

Na próxima seção discutimos algumas consequências de não se permitir a entrada no escape ([2]).

¹jeferson.cassiano@ufabc.edu.br

2 Restrição a E e Sl

Seja a seguinte hipótese: Seja S semi-grupo associado ao campo 1. Sejam $S^+ \mathbf{x}$ a órbita de S iniciada em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $S^- \mathbf{x} = \{\mathbf{y} \in H : \varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{x}, \varphi \in S\}$. Então

$$(a) \quad S^+ \mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}\} \cap E = \emptyset;$$

$$(b) \quad S^- \mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}\} \cap Sl = \emptyset.$$

Esta hipótese veda a possibilidade da órbita entrar em E e está ligada, em um certo sentido, ao Segundo Princípio da Termodinâmica na medida em que estabelece uma assimetria entre futuro ($t > 0$) e passado ($t < 0$).

Proposição 2.1. *O campo em H_0 é $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\alpha_- + \alpha_+}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Demonstração. A subvariedade de descontinuidade é dada por $H_0 = h^{-1}(0) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Nós temos que $q\mathcal{L}_{\mathbf{f}_q} h(x_1, 0) = -x_1$ e $q\mathcal{L}_{\mathbf{f}_q}^2 h(\mathbf{0}) = \alpha_q > 0$. Então $E = \mathbb{R}_+^* \times \{0\}$ e $Sl = \mathbb{R}_+^* \times \{0\}$. O campo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}H_0 \cap (\mathbf{f}_-(\mathbf{x}), \mathbf{f}_+(\mathbf{x}))$ é único. $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{f}_+ + (1 - \lambda) \mathbf{f}_- \Rightarrow \lambda \mathcal{L}_{\mathbf{f}_+} h + (1 - \lambda) \mathcal{L}_{\mathbf{f}_-} h = 0$ em $T_{\mathbf{x}}H_0$. Então $\lambda = \frac{1}{2}$ em H_0 para $x_1 \neq 0$ e o campo é determinado. $\square$

Assim, adotando a hipótese anterior, tem-se uma órbita que segue a H_+ e outra a H_- : não-unicidade em $\mathbf{0}$. Como todas as órbitas chegam em H_0 (em Sl) e o campo deslizante é constante e negativo, este leva a órbita de volta a $\mathbf{0}$.

3 Medida de Probabilidade do Escape E

Nesta seção consideraremos um sistema dinâmico que preserva medida $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$, sendo $\mathcal{A}$ σ -álgebra de Borel completa em X e μ medida preservada por S semi-grupo ($\mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \forall \varphi \in S$).

Para estudar este caso faremos uso do Teorema da Recorrência de Poincaré apresentado a seguir.

Teorema 3.1. *Seja o sistema dinâmico que preserva medida $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$. Então $\forall A \in \mathcal{A}$ σ -álgebra completa $\exists A_0 = A \setminus \bigcup_{\phi \in S} C_\phi \in \mathcal{A}$, $C_\phi = A \setminus \bigcup_{\varphi \in S} (\varphi \circ \phi)^{-1}(A)$, tal que $A_0 \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) = \mu(A_0)$.*

O conjunto $\bigcup_{\phi \in S} C_\phi$ é o conjunto dos estados tais que existe uma ação em S que os retira de A definitivamente.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) = 0$. Como $A_0 \subset A$ e $\mathcal{A}$ é completa, então $A \in \mathcal{A}$ e $0 \leq \mu(A_0) \leq \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A_0) = 0$.

Seja, agora, $\mu(A) > 0$. Seja, ainda, $C_\phi = A \setminus \bigcup_{\varphi \in S} (\varphi \circ \phi)^{-1}(A)$. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-n}(A) \subset \bigcup_{\varphi \in S} (\varphi \circ \phi)^{-1}(A) \Rightarrow$

$C_\phi \subset A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-n}(A) = C_0$. Note que $\forall \mathbf{x} \in C_0$ tem-se que $\phi^n(\mathbf{x}) \notin A \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$: $\phi^{-n}(C_0) \cap \phi^{-m}(C_0) \neq \emptyset$. Seja $\mathbf{x} \in \phi^{-n}(C_0) \cap \phi^{-m}(C_0)$ e $\mathbf{y} = \phi^n(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{y} \in C_0 \Rightarrow \phi^{m-n}(\mathbf{y}) = \phi^m(\mathbf{x}) \in C_0 \subset A \rightarrow \leftarrow$. Assim $\phi^{-n}(C_0) \cap \phi^{-m}(C_0) = \emptyset$.
 $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \phi^{-n}(C_0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu \circ \phi^{-n})(C_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(C_0) \Rightarrow \mu(C_0) = 0$. Então $C_\phi \in \mathcal{A}$, pois $\mathcal{A}$ é completa e $\mu(C_\phi) = 0 \ \forall \phi \in S$. Seja $\mathbf{x} \in C_\phi \Rightarrow \mathbf{x} \notin (\varphi \circ \phi)^{-1}(A) \ \forall \varphi \in S$, então $\mathbf{x} \notin (\varphi' \circ \varphi \circ \phi)^{-1}(A) \ \forall \varphi' \in S \Rightarrow \mathbf{x} \in C_{\varphi \circ \phi} \Rightarrow C_\phi \subset C_{\varphi \circ \phi} \ \forall \phi, \varphi \in S$.
 Então $\bigcup_{\varphi \in S} C_\varphi \setminus \bigcup_{\varphi \in S} C_{\varphi \circ \phi} \subset C_\phi$, e $\bigcup_{\varphi \in S} C_\varphi \setminus \bigcup_{\varphi \in S} C_{\varphi \circ \phi} \in \mathcal{A}$ com $\mu\left(\bigcup_{\varphi \in S} C_\varphi \setminus \bigcup_{\varphi \in S} C_{\varphi \circ \phi}\right) \leq \mu(C_\phi) = 0 \ \forall \phi \in S$. Seja $B_n = \bigcup_{\varphi \in S} C_\varphi \setminus \bigcup_{\varphi \in S} C_{\varphi \circ \phi^n}$, assim $\bigcup_{\varphi \in S} C_\varphi \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Temos que $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = 0$, então $\bigcup_{\varphi \in S} C_\varphi \in \mathcal{A}$ e $\mu\left(\bigcup_{\varphi \in S} C_\varphi\right) = 0$. $\square$

Este resultado estabelece que quase todo elemento do espaço de medida é recorrente. A seguir consideraremos algumas consequências sobre densidades de probabilidade em E sobre o comportamento do sistema.

3.1 Probabilidade $\mu(E) = 0$

Consideramos, aqui, o sistema dinâmico $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$, sendo X o espaço-ambiente em questão, $\mathcal{A}$ σ -álgebra de Borel completa, e μ medida de probabilidade preservada por S semi-grupo induzido por um campo vetorial contínuo por partes com singularidade dobradobra. Note que $E \in \mathcal{A}$, pois E é aberto. Nesta seção enfraquecemos a hipótese anterior na medida que a probabilidade do escape E é dada por $\mu(E) = 0$.

Proposição 3.1. *Um sistema dinâmico como o representado por 1 com a medida de probabilidade do escape $\mu(E) = 0$ é quase certamente similar ao sistema com a hipótese de restrição anterior.*

Demonstração. A prova deste resultado é um corolário do Teorema da Recorrência de Poincaré acima. De fato, temos que $\mu(E) = 0$. Note que $S^+\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}\} \cap E \in \mathcal{A}$, pois esta σ -álgebra de Borel é completa. Então $\mu(S^+\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}\} \cap E) = 0$. $\square$

Assim, sob certos aspectos, um sistema com medidade de probabilidade invariante satisfazendo $\mu(E) = 0$ é quase certamente similar a situação com as hipóteses restritivas enunciadas anteriormente. Esta hipótese também sugere uma assimetria no sistema dinâmico na medida em que a medida de probabilidade do deslize Sl é positiva.

Proposição 3.2. $\mu(Sl) > 0$.

Demonstração. Sabe-se que $\mu(H_q) > 0$, $q = \pm 1$. Seja $A \subset H_q$: $\mu(A) > 0$. Seja $t > 0$: $\varphi_t(A) \in Sl$. Como o sistema preserva medida $\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(Sl) \geq \mu(A) > 0$. $\square$

3.2 Probabilidade $\mu(E) > 0$

Nesta seção verifica-se algumas consequências de considerar positiva a probabilidade de E . Assim, aqui levamos em consideração a densidade de probabilidade no escape.

Proposição 3.3. *Seja um sistema dinâmico como 1, com uma medida de probabilidade que, no escape, é dada por $d\mu(A) = \rho \, dm(A)$, $A \in E$ tal que $\mu(E) = \int_E \rho(x) \, dx$. Neste caso $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma densidade de probabilidade em E e m medida de Lebesgue em E . Se o suporte $\text{supp}(\rho)$ não é limitado, então o conjunto de recorrência também não o é.*

Demonstração. Suponha que $\text{supp}(\rho)$ não é limitado. Então $\forall A \in \mathcal{A}$, $A \subset E$ limitado $\mu(E \setminus A) = \int_E \rho(x) \, dx > 0$ tal que $\mu(E \setminus A) = \int_{E \setminus A} \rho(x) \, dx > 0$. Seja $B \subset E \setminus A$ mensurável tal que $\mu(B) > 0$. Pelo teorema da Recorrência $\exists B_0 \subset B : \mu(B_0) = \mu(B) > 0$ recorrente. Por outro lado $\forall \mathbf{x} \in B \, \exists \varphi \in S : \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{0})$. $\square$

Note que, a partir da origem, é possível atingir estados tão distantes quanto se queira. Este resultado sugere que, para assegurar a estabilidade local, deve-se garantir que a densidade de probabilidade tenha um suporte conveniente e compacto.

4 Conclusões

A consideração de um suporte compacto no escape é crucial para a estabilidade local do sistema, na medida que evita conjuntos com medida de probabilidade positiva arbitrariamente distantes da origem.

Um outro aspecto fundamental é a assimetria entre o deslize e o escape com respeito à medida de probabilidade: a medida no deslize é positiva e no escape pode não o ser. Porém, mesmo que o for a densidade é concentrada próximo à singularidade, sugerindo uma assimetria (Segundo Princípio da Termodinâmica).

5 Agradecimentos

O autor agradece à FAPESP pelo auxílio financeiro para a apresentação no evento.

Referências

- [1] C.A. Buzzi, T. de Carvalho and R.D. Euzebio, Chaotic planar piecewise smooth vector fields with non trivial minimal sets, Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol. 0, 502-504 (2014).
- [2] J. Cassiano, Some Thermodynamical Aspects in Same Classes of Piecewise Continuous Dynamical Systems, Preprint, vol. 0, 1–12 (2016).
- [3] A. Colombo and M.R. Jeffrey, Non-deterministic chaos, and the two fold singularity in piecewise smooth flows, SIAM J. Applied Dynamical Systems, vol. 2, 423–451 (2011).

- [4] M.R. Jeffrey, Non determinism in the limit of nonsmooth dynamics, *Physical Review Letters*, vol. 106, 1–4, (2011).
- [5] M. Jeffrey and S. Fernández-García, *Criptografia*, Structural stability of the two-fold singularity, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, vol. 5, 624–640 (2012).