



Controle de quadricóptero via linearização por realimentação robusta associada à síntese $\mathcal{H}_\infty$

Vinícius Manhães Gabriel de Brito Cavalcanti¹

Seção de Engenharia Elétrica, IME, Rio de Janeiro, RJ

Alberto Mota Simões²

Seção de Engenharia Elétrica, IME, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. O presente trabalho trata do projeto de uma lei de controle para o modelo não linear de um quadricóptero sujeito a incertezas paramétricas. O sistema de controle é projetado por meio da combinação de técnicas de linearização por realimentação com a síntese $\mathcal{H}_\infty$.

Palavras-chave. Linearização por realimentação, síntese $\mathcal{H}_\infty$, controle de quadricóptero

1 Introdução

O controle de sistemas não lineares via a linearização por realimentação clássica [6, 9] apresenta algumas limitações importantes. Além do fato de a dinâmica linearizada em geral perder a interpretação física do problema original, talvez o mais grave seja o fato de a técnica não conseguir lidar satisfatoriamente com incertezas no modelo.

Baseado no conceito de $\mathcal{W}$ -estabilidade introduzido em [2], foi proposta em [5] uma linearização por realimentação robusta como forma de superar as limitações citadas acima da linearização clássica. A ideia central dessa linearização por realimentação robusta consiste em se transformar o sistema não linear original em sua aproximação linear (Jacobiana) em torno de um dado ponto de operação. Desse modo, a combinação com uma lei de controle linear robusta em uma malha externa permite preservar as propriedades de robustez desta última.

Em [3], a efetividade da linearização por realimentação robusta é corroborada através da sua combinação com uma lei de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseada na técnica de *loopshaping* de Glover e McFarlane [7]. A principal vantagem desse método é que ele não requer a obtenção de uma representação linear fracionária para a planta não linear.

No presente trabalho, a abordagem citada conjugando a linearização por realimentação robusta e uma lei $\mathcal{H}_\infty$ é utilizada no controle de um dispositivo quadrirrotor. Os resultados da aplicação numérica corroboram a utilidade da técnica.

¹vinicius.cavalcanti@gmail.com

²simoese@ime.eb.br

2 Dinâmica do quadricóptero

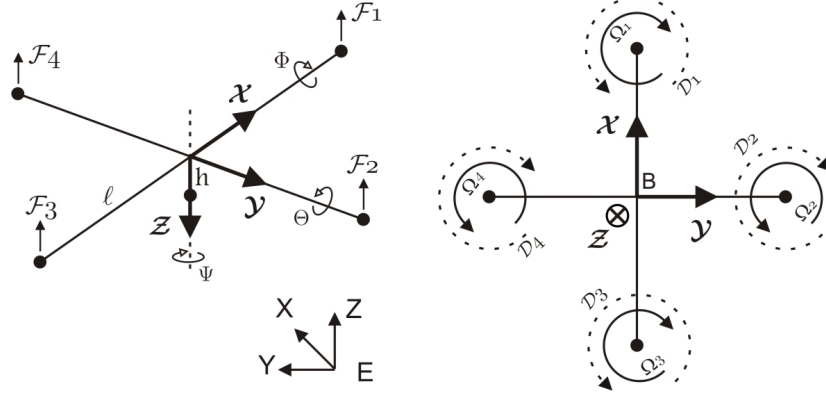


Figura 1: Sistema de referenciais do quadricóptero [1].

Na Figura 1, são representados os referenciais considerados na modelagem da dinâmica do quadricóptero. O vetor de variáveis de estados é dado por

$$x(t) \triangleq [X \ Y \ Z \ \psi \ \theta \ \phi \ U \ V \ W \ p \ q \ r]^T, \quad (1)$$

onde X , Y e Z são as coordenadas e U , V , W as velocidades lineares do centro de massa do quadricóptero em relação ao referencial inercial E , ψ , θ e ϕ são os ângulos de Euler, e p , q e r são as velocidades angulares em relação ao referencial do corpo. O vetor de entrada, por sua vez, é determinado a partir das velocidades angulares Ω_i , $i = 1, \dots, 4$, dos rotores segundo a equação

$$u(t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ b(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ b(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2) \\ d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde b é um coeficiente de empuxo e d um coeficiente de arraste.

Com as definições acima, a dinâmica do quadricóptero pode ser finalmente descrita

por [8]:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ -\frac{1}{m}(\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi)\mathcal{U} \\ -\frac{1}{m}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi)\mathcal{U} \\ g - \frac{1}{m} \cos \theta \cos \phi \mathcal{U} \\ \frac{I_y - I_z}{I_x}qr + \frac{l}{I_x}\tau_x \\ \frac{I_z - I_x}{I_y}pr + \frac{l}{I_y}\tau_y \\ \frac{I_x - I_y}{I_z}pq + \frac{l}{I_z}\tau_z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

onde m é a massa do corpo, g é a aceleração gravitacional, I_x , I_y e I_z são os momentos de inércia e l é a distância entre o centro de massa e os rotores. Os valores nominais considerados para os parâmetros do sistema, listados na Tabela 1, foram retirados de [4] e correspondem ao nanoquadricóptero Crazyflie[©] 1.0.

Tabela 1: Valores nominais dos parâmetros do quadricóptero.

Parâmetro	Valor Nominal	Parâmetro	Valor Nominal
I_x	770 kg·m ²	m	0.02 kg
I_y	770 kg·m ²	l	0.02 m
I_z	1600 kg·m ²	g	9.81 m/s ²

O vetor de saída para a malha de controle externa é dado por

$$y(t) = [X \quad Y \quad Z \quad \psi]^T. \quad (4)$$

3 Controle do quadricóptero

A dinâmica descrita pelas Equações (3)-(4) apresenta deficit de grau relativo, e portanto não admite linearização por realimentação. Entretanto, conforme discutido em [6], sob certas condições é possível se modificar um sistema que não possui um grau relativo suficiente de modo a se obter um sistema que possua, e isso é possível através de uma realimentação dinâmica de estados. Na presente aplicação, a condição de linearizabilidade por realimentação pode ser obtida através da passagem da ação de controle $\mathcal{U}$ por um integrador duplo e a posterior realimentação dos estados associados, conforme representado na Figura 2.

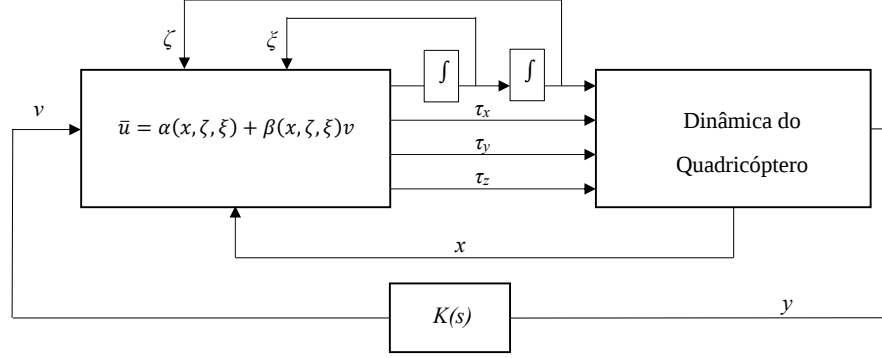


Figura 2: Diagrama da realimentação dinâmica.

Utilizando-se o esquema de controle representado na Figura 2, a dinâmica aumentada do quadricóptero torna-se

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ -\frac{1}{m}(\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi)(\zeta + mg) \\ -\frac{1}{m}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi)(\zeta + mg) \\ g - \frac{1}{m} \cos \theta \cos \phi (\zeta + mg) \\ \xi \\ \zeta \\ \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{l}{I_x} \tau_x \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{l}{I_y} \tau_y \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq + \frac{l}{I_z} \tau_z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

onde o vetor de estados aumentado é dado por

$$\hat{x}(t) \triangleq [x \ y \ z \ \psi \ \theta \ \phi \ U \ V \ W \ \zeta \ \xi \ p \ q \ r]^T \quad (6)$$

e a solução de equilíbrio desse sistema é

$$\hat{x}(t) = 0 \quad (7)$$

$$\hat{u}(t) = [u_1 - mg \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (8)$$

O novo modelo dinâmico (5) atende aos critérios de linearização por realimentação. Para essa dinâmica aumentada é, então, projetada a lei de linearização por realimentação robusta proposta em [5].

Por fim, o controlador $\mathcal{H}_\infty$ da malha externa $K(s)$ ilustrado na Figura 2 é projetado utilizando-se a técnica de *loop-shaping* de Glover e McFarlane [7], com a pós-compensação

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2 \times 10^5(s+0.1)}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \times 10^5(s+0.1)}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s+0.1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2 \times 10^3(s+0.1)}{s} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

4 Simulação numérica

Na presente seção, é realizado um experimento numérico para se avaliar a robustez do controlador não linear obtido pela conjugação da linearização por realimentação robusta e o controle $\mathcal{H}_\infty$.

No experimento realizado, o sistema encontra-se em uma condição inicial correspondendo a um ângulo de arfagem de 45° e um ângulo de rolagem de 30° , enquanto que os outros estados são nulos. O objetivo do experimento é avaliar o comportamento da lei de controle durante a regulação até a origem. Supõe-se que os parâmetros I_x , I_y , I_z e m apresentam variação de até $\pm 14\%$ em relação aos valores nominais na Tabela 1. Além disso delimita-se a faixa de operação de atitude, como em [8], de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2: Faixa de operação de atitude.

Ângulo de guinada	$-180^\circ < \psi < 180^\circ$
Ângulo de arfagem	$-90^\circ < \theta < 90^\circ$
Ângulo de rolagem	$-90^\circ < \phi < 90^\circ$

Nas Figuras 3, 4 e 5 são mostradas as respostas do sistema em malha fechada sob condição nominal dos parâmetros, e para 10 condições aleatórias para os parâmetros dentro do valor admissível de incerteza. Na Figura 6 é mostrada a ação de controle $\mathcal{U}$, que corresponde ao empuxo total gerado para mover o quadricóptero

5 Conclusão

No presente trabalho, foi discutida a aplicação, ao problema de controle de um quadricóptero, de uma técnica de projeto de lei de controle não linear conjugando a linearização por realimentação robusta e uma lei $\mathcal{H}_\infty$. A abordagem considerada permitiu o

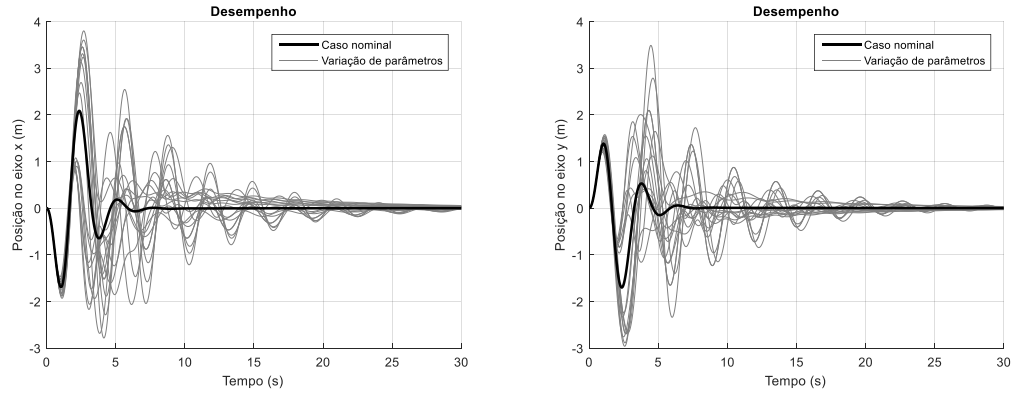


Figura 3: Resposta das posições X e Y .

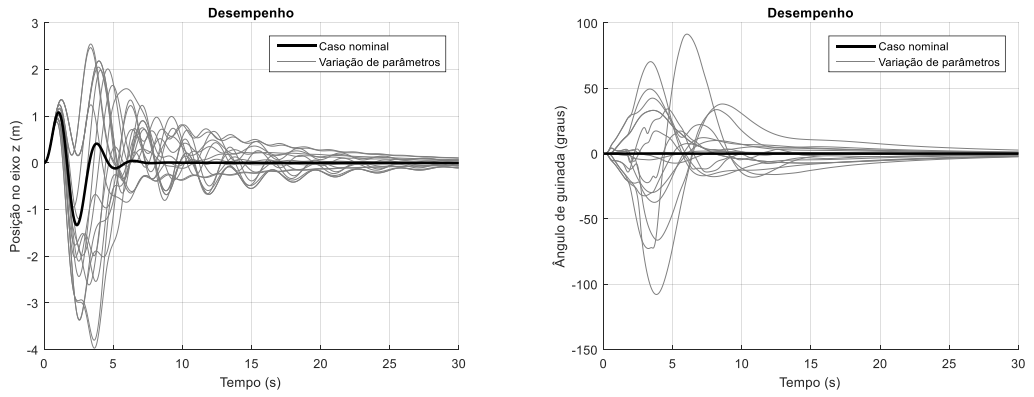


Figura 4: Resposta da posição Z e do ângulo de guinada ψ .

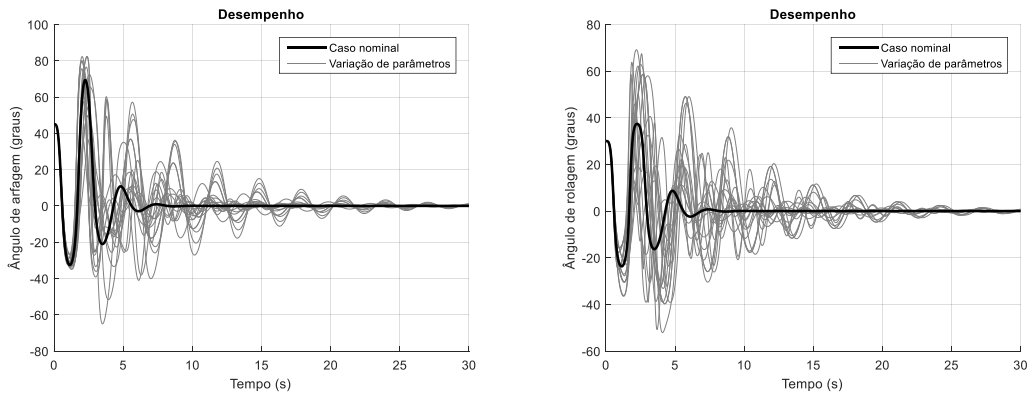


Figura 5: Resposta dos ângulo de arfagem θ e rolagem ϕ .

projeto de sistema de controle capaz de garantir a estabilidade do sistema não linear em malha fechada a despeito da presença de incertezas paramétricas no quadricóptero.

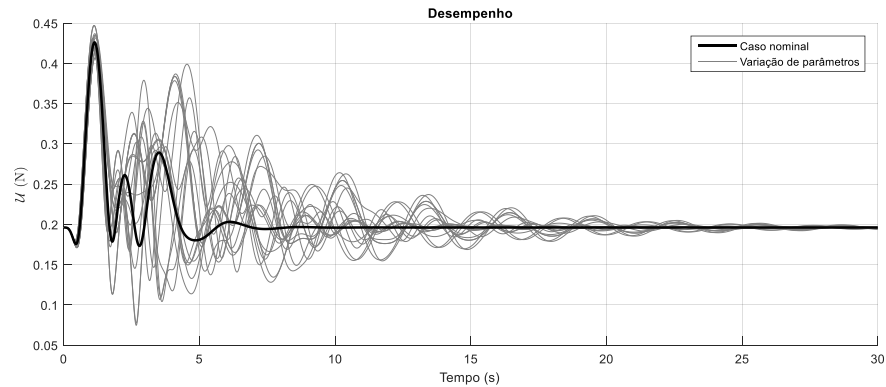


Figura 6: Ação de controle $\mathcal{U}$

Referências

- [1] Samir Bouabdallah. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. PhD thesis, STI, Lausanne, 2007.
- [2] H. Bourlès and F. Colledani. W-stability and local input-output stability results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6):1102–1108, Jun 1995.
- [3] A. L. D. Franco, H. Bourlès, E. R. De Pieri, and H. Guillard. Robust nonlinear control associating robust feedback linearization and h-infinity control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(7):1200–1207, July 2006.
- [4] M. Furci, G. Casadei, R. Naldi, R. G. Sanfelice, and L. Marconi. An open-source architecture for control and coordination of a swarm of micro-quadrotors. In *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 139–146, June 2015.
- [5] H. Guillard and H. Bourlès. Robust feedback linearization. In *Proceedings MTNS 2000, The International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Perpignan, France, June 19-23, 2000*, pages 1–6, 2000.
- [6] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1995.
- [7] D. McFarlane and K. Glover. A loop-shaping design procedure using h-infinity synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):759–769, Jun 1992.
- [8] V. Mistler, A. Benallegue, and N. K. M’Sirdi. Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. In *Proceedings 10th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication. ROMAN 2001 (Cat. No.01TH8591)*, pages 586–593, 2001.
- [9] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.