



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Estimando o atrator de sistemas chaveados afins via extensão do princípio de invariância

Thiago de Souza Pinto¹

Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

Luís Fernando Costa Alberto²

Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP, São Carlos, SP

Michele Cristina Valentino³

Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

Resumo. Neste trabalho desenvolve-se um procedimento computacional baseado em otimização para estimar o conjunto atrator de sistemas chaveados afins sob chaveamento "dwell-time" arbitrário. Este procedimento explora, para esta classe de sistemas dinâmicos, uma extensão do princípio de invariância de LaSalle de modo a sistematizar a obtenção de uma boa estimativa do conjunto atrator. Neste intuito, propõe-se um resultado, que por meio de um problema de otimização não linear, que leva em conta a minimização do volume de uma região elipsoidal, permite a obtenção de uma região para onde as trajetórias são assintoticamente atraídas. Um exemplo de um sistema dinâmico de terceira ordem é utilizado para ilustrar o procedimento proposto e demonstrar a efetividade em encontrar estimativas do conjunto atrator.

Palavras-chave. Sistemas Chaveados Afins, Conjunto Atrator, Princípio de invariância de LaSalle

1 Introdução

Embora o conceito de chaveamento não seja novo em engenharia, nos últimos anos a análise de estabilidade de sistemas chaveados revelou-se um problema importante e desafiador que vem recebendo atenção considerável na literatura recente. Estes problemas surgem em muitas aplicações de engenharia tais como: controle de sistemas mecânicos, controle de processos, sistemas de potência, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência e muitos outros campos [4].

¹thiagosp@uftpr.edu.br

²lfcaberto@usp.br

³valentino@utfpr.edu.br

Os atratores de diversos sistemas chaveados podem não ser um ponto de equilíbrio [11]. Desse modo um dos problemas básicos existentes na análise de estabilidade de sistemas chaveados é determinar o conjunto atrator desses sistemas, isto é, para essa classe de problemas, o interesse não é estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio particular, mas o comportamento assintótico das soluções.

Uma poderosa ferramenta para estudar o comportamento assintótico das soluções de sistemas dinâmicos é o Princípio de Invariância de LaSalle. Este resultado foi primeiramente desenvolvido para equações diferenciais ordinárias autônomas definidas em espaço de dimensão finita [7] e depois o resultado foi estendido para outras classes de sistemas dinâmicos incluindo equações diferenciais funcionais [5], sistemas descontínuos [1] e sistemas chaveados [2, 6, 9, 12].

O objetivo desse trabalho é explorar a extensão do princípio de invariância apresentada em [10], de modo a sistematizar o processo de obtenção de boas estimativas do conjunto atrator de sistemas chaveados afins sob chaveamento "dwell-time" arbitrário. O resultado aqui obtido permite, que por meio de um problema de otimização não linear, que leva em conta a minimização do volume de uma região elipsoidal, a obtenção de uma região para onde as trajetórias são assintoticamente atraídas.

A notação matemática utilizada ao longo deste trabalho é usual. Sendo $\mathbb{R}^n$ usado para denotar o Espaço Euclidiano de dimensão n e $\mathbb{R}^{n \times n}$ o conjunto de matrizes reais $n \times n$. Além disso, para matrizes ou vetores, o símbolo $()'$ indica transposto. Para qualquer matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P > 0$ ($P < 0$) denota uma matriz definida positiva (negativa). O autovalor máximo (mínimo) de uma matriz P é denotado por $\lambda_{\max}(P)$ ($\lambda_{\min}(P)$).

2 Conceitos Fundamentais

Considere o sistema chaveado afim

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

em que $\sigma(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{P}$ é uma função constante por partes, chamada de lei de chaveamento dwell-time, $\mathcal{P}$ é um conjunto finito de números inteiros positivos, ou seja, $\mathcal{P} = \{1, \dots, \mathcal{N}\}$ e $\mathcal{N}$ é o número de subsistemas. Seja $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de tempos de chaveamento associada a lei de chaveamento dwell-time σ , então $\forall k \in \mathbb{N}$ tem-se que $\tau_{k+1} - \tau_k \geq T_{\text{dwell}}$, com $T_{\text{dwell}} > 0$ chamado tempo de permanência do sinal de chaveamento $\sigma(t)$. Considere $I_p = \{t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) : \sigma(\tau_k) = p, k \in \mathbb{N}\}$ sendo a união dos intervalos em que o subsistema p é ativo. Uma função contínua, suave por partes, $x(t) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema chaveado afim (1) no intervalo $\mathcal{I}$ se $x(t)$ satisfaz $\dot{x}(t) = A_p x(t) + b_p$, $\forall t \in I_p \cap \mathcal{I}$ para todo p . O conjunto de todas as soluções com chaveamento dwell-time é denotada por $\mathcal{S}_{\text{dwell}}$. Denota-se $\varphi_{\sigma(\cdot)}(t, x_0)$, ou simplesmente $\varphi(t, x_0)$, a solução de (1) com condição inicial x_0 no tempo $t = 0$ através da lei de chaveamento dwell-time $\sigma(t)$.

A seguir algumas definições preliminares, as quais podem ser encontradas em [8] e [2], são apresentadas.

Definição 2.1. *Um conjunto compacto $\mathcal{M}$ é fracamente invariante com respeito ao sistema chaveado (1) se para cada $x_0 \in \mathcal{M}$ existe um índice $p \in \mathcal{P}$, uma solução $\varphi(t, x_0)$*

do campo vetorial $f_p(x(t))$ e um número real $c > 0$ tal que $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{M}$ para qualquer $t \in [-c, 0]$ ou $t \in [0, c]$.

A solução $\varphi(t, x_0)$ é atraída para o conjunto $\mathcal{M}$, ou seja, $\varphi(t, x_0) \rightarrow \mathcal{M}$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x_0), \mathcal{M}) = 0$, onde d é a distância de um ponto ao conjunto que pode ser definida, se adotarmos a norma Euclidiana, por $d(y, \mathcal{M}) = \inf_{m \in \mathcal{M}} \|y - m\|_2$.

Na próxima seção, é apresentado o resultado principal, o qual permite obter estimativas de conjuntos atratores de sistemas chaveados afins sob chaveamento arbitrário.

3 Estimativa de conjuntos atratores de sistemas chaveados afins via extensão do princípio de invariância

Suponha a existência de uma função auxiliar comum $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para o sistema chaveado (1) dada por

$$V(x) = (x - d)'P(x - d), \quad \text{onde } d \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

e considere que

$$\exists P > 0 \quad \text{satisfazendo} \quad Q_p = A_p'P + PA_p < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3)$$

Defina os seguintes conjuntos: $C_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x)(A_p x + b_p) \geq 0\}$ o conjunto dos pontos onde a derivada da função V ao longo da trajetória do subsistema p é positiva ou nula, $C = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} C_p$ e $\Omega_v = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq v, \text{ onde } v \in \mathbb{R}\}$ um conjunto de nível da função V .

O lema a seguir garante que C é um conjunto limitado e oferece uma estimativa deste conjunto na forma de um conjunto de nível da função V .

Lema 3.1. *Considere o sistema chaveado afim (1) e a função escalar (2) tal que (3) seja satisfeita. Então o conjunto C é limitado e existe um número real*

$$\ell > \lambda_{\max}(P)z^2, \quad (4)$$

onde $z = \max_{p \in \mathcal{P}} \left\{ -\frac{2 \|(b_p + A_p d)'P\|}{\lambda_{\max}(Q)} \right\}$, que garante a inclusão $C \subset \Omega_\ell$.

Demonstração. Inicialmente vamos adotar a função auxiliar comum definida em (2). Então sua derivada ao longo da solução do subsistema p é dada por

$$\begin{aligned} \nabla V(x)(A_p x + b_p) &= \overbrace{(x - d)'P(x - d)} + (x - d)' \overbrace{P(x - d)} \\ &= (x - d)'(A_p'P + PA_p)(x - d) + (b_p + A_p d)'P(x - d) + \cdots \\ &\quad \cdots + [(b_p + A_p d)'P(x - d)]' \\ &= (x - d)'Q_p(x - d) + 2(b_p + A_p d)'P(x - d) \\ &\leq (x - d)'Q_p(x - d) + 2\|(b_p + A_p d)'P(x - d)\| \\ &\leq \lambda_{\max}(Q)\|x - d\|^2 + 2\|(b_p + A_p d)'P\|\|x - d\| \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que

$$\dot{V}(x) \leq \lambda_{\max}(Q_p) \|x - d\|^2 + 2 \|(b_p + A_p d)' P\| \|x - d\|. \quad (5)$$

Uma vez que (3) é satisfeita $\forall p \in \mathcal{P}$, então $\lambda_{\max}(Q_p) < 0$, logo de (5) pode-se concluir que a derivada é negativa ou nula quando: $\|x - d\| \leq 0$ ou $\|x - d\| \geq -\frac{2 \|(b_p + A_p d)' P\|}{\lambda_{\max}(Q_p)}$. Assim,

$$C_p \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x - d\| \leq -\frac{2 \|(b_p + A_p d)' P\|}{\lambda_{\max}(Q_p)} \right\}.$$

Portanto, o conjunto C é limitado, pois, $C = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} C_p \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x - d\| \leq z\}$, onde $z = \max_{p \in \mathcal{P}} \left\{ -\frac{2 \|(b_p + A_p d)' P\|}{\lambda_{\max}(Q_p)} \right\}$.

Agora, analisando os valores numéricos que a função auxiliar comum V assume quando $x \in C$, obtém-se

$$V(x) \leq \lambda_{\max}(P) (x - d)' (x - d) = \lambda_{\max}(P) \|x - d\|^2 \leq \lambda_{\max}(P) z^2.$$

Portanto tomando $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\ell > \lambda_{\max}(P) z^2$, conclui-se que $C \subset \Omega_\ell$.

Observação 3.1. *O Lema 3.2 é uma modificação do resultado apresentado em [10], obtida pela maneira na qual é estimado o conjunto onde C está contido.*

O lema a seguir, cuja demonstração encontra-se em [10], garante a existência de um conjunto positivamente invariante para sistemas chaveados afins sob chaveamentos dwell-time arbitrários.

Lema 3.2. *Considere o sistema chaveado afim (1) e a função escalar (2) tal que (3) seja satisfeita. Seja ℓ um número real satisfazendo (4). Se $x_0 \in \Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \ell\}$ então, toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ permanece dentro de Ω_ℓ para todo $t \geq 0$.*

Explorando o Lema 3.1 e Lema 3.2, a seguinte extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins utilizando uma função auxiliar comum é estabelecida. Observa-se que a demonstração desse resultado é realizada de maneira análoga ao que foi descrito em [10] e por este motivo omitimos sua demonstração.

Teorema 3.1. *Considere o sistema chaveado afim (1) e a função escalar (2) tal que (3) seja satisfeita. Então, toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ , onde ℓ dado por (4).*

O teorema anterior garante que o conjunto de nível Ω_ℓ , associado a função auxiliar comum dada por (2), seja uma estimativa do conjunto atrator do sistema chaveado afim (1) sob chaveamento dwell-time arbitrário. Entretanto é evidente, a partir do Lema 3.1, que o tamanho de Ω_ℓ está relacionado com a matriz $P > 0$ e o vetor $d \in \mathbb{R}^n$, ou seja, a estimativa do conjunto atrator depende do valor escolhido para o número real ℓ que satisfaz (4).

Desse modo, como estamos interessados em determinar uma estimativa de Ω_ℓ tão pequena quanto possível, a ideia é pesquisar entre todas matrizes $P > 0$ e vetores $d \in \mathbb{R}^n$ aquela combinação que minimiza o tamanho do conjunto Ω_ℓ , considerando algum critério de tamanho. Visto que Ω_ℓ é um conjunto elipsoidal, um dos seguintes critérios clássicos de

tamanho pode ser usado: maximização do volume, maximização do eixo secundário, maximização do traço de P e também a maximização em determinadas direções [3]. Optamos, neste trabalho, pelo critério de tamanho dado pela maximização de volume.

O próximo teorema permite encontrar uma estimativa de volume mínimo do conjunto atrator do sistemas chaveado afim (1).

Teorema 3.2. *Suponha que $P > 0$ e $d \in \mathbb{R}^n$ sejam solução do problema de otimização não linear*

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && -\ln(\det(P)) \\ & \text{sujeito a} && P > 0 \\ & && Ap'P + PA_p < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \\ & && \lambda_{\max}(P)z_p^2 - 1 < 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \end{aligned} \quad (6)$$

onde $z_p = -\frac{2\|(b_p + A_p d)'P\|}{\lambda_{\max}(Q_p)}$. Então Ω_1 é uma estimativa de volume mínimo do conjunto atrator do sistema chaveado afim (1) sob chaveamento arbitrário, ou mais precisamente toda solução $\varphi(t, x_0) \in S_{\text{dwell}}$ tende para o maior conjunto fracamente invariante contido em Ω_1 .

Demonstração. Observa-se que fixando a solução do problema de otimização (6), ou seja, fixando $P > 0$ e $d \in \mathbb{R}^n$, é possível escrever

$$\Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - d)'P(x - d) < \ell\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - d)'\bar{P}(x - d) < 1\} = \Omega_1$$

onde $\bar{P} = \frac{1}{\ell}P$. Além disso, as restrições do problema de otimização são equivalentes a (3) e (4). Assim, devido ao Teorema 3.1, tem-se que toda solução $\varphi(t, x_0) \in S_{\text{dwell}}$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_1 . A demonstração é finalizada levando em conta que o volume de Ω_ℓ é proporcional a $(\det(P))^{1/2}$ e minimizar este determinante é o mesmo que minimizar $-\ln(\det(P))$.

4 Exemplo Numérico

Nesta seção, o Teorema 3.2 é aplicado para estimar o conjunto atrator de um sistema chaveado afim tridimensional sob um chaveamento arbitrário. Observa-se que as simulações numéricas foram realizadas com auxílio do software Matlab 20016a em um intel(R) Core(TM) i5-2450M @ 2.50GHz. Além disso, como o foco deste trabalho não foi desenvolver algoritmos que resolvam problemas de otimização, na resolução do Exemplo 1 foi utilizado a função *ga*, pertencente ao software Matlab e presente na Global Optimization Toolbox, que é uma um Algoritmo Genético que explora a técnica de otimização heurística inspirada pela evolução biológica.

Exemplo 1. Considere o sistema chaveado afim (1) em $\mathbb{R}^3$ consistindo de dois subsistemas $\dot{x} = A_p x + b_p$, $p = 1, 2$, em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o problema de otimização (6) do Teorema 3.2, obtemos a solução ótima local

$$P = \begin{bmatrix} 0,1180 & 0,0003 & 0,0011 \\ 0,0003 & 0,0759 & -0,0093 \\ 0,0011 & -0,0093 & 0,1149 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d = [-0,1986 \quad 0,6922 \quad -0,0408]',$$

que define a região elipsoidal Ω_1 centrada em d com volume mínimo $vol(\Omega_1) = 131,20$. Assim, pelo Teorema 3.2, toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_1 , isto é, o conjunto atrator deste sistema chaveado afim sob chaveamento dwell-time arbitrário está contido no elipsoide Ω_1 . A Figura 1 ilustra a simulação no domínio do tempo para a condição inicial $x_0 = [6 \ 5 \ 7]'$ e $\tau_{k+1} = \tau_k + 1$, $k = 1, \dots, 50$ arbitrário.

A Figura 1 mostra, na parte superior, o espaço de estado com a região Ω_1 e as trajetórias do sistema chaveado partindo de x_0 e, na parte inferior, o comportamento do funcional V no tempo.

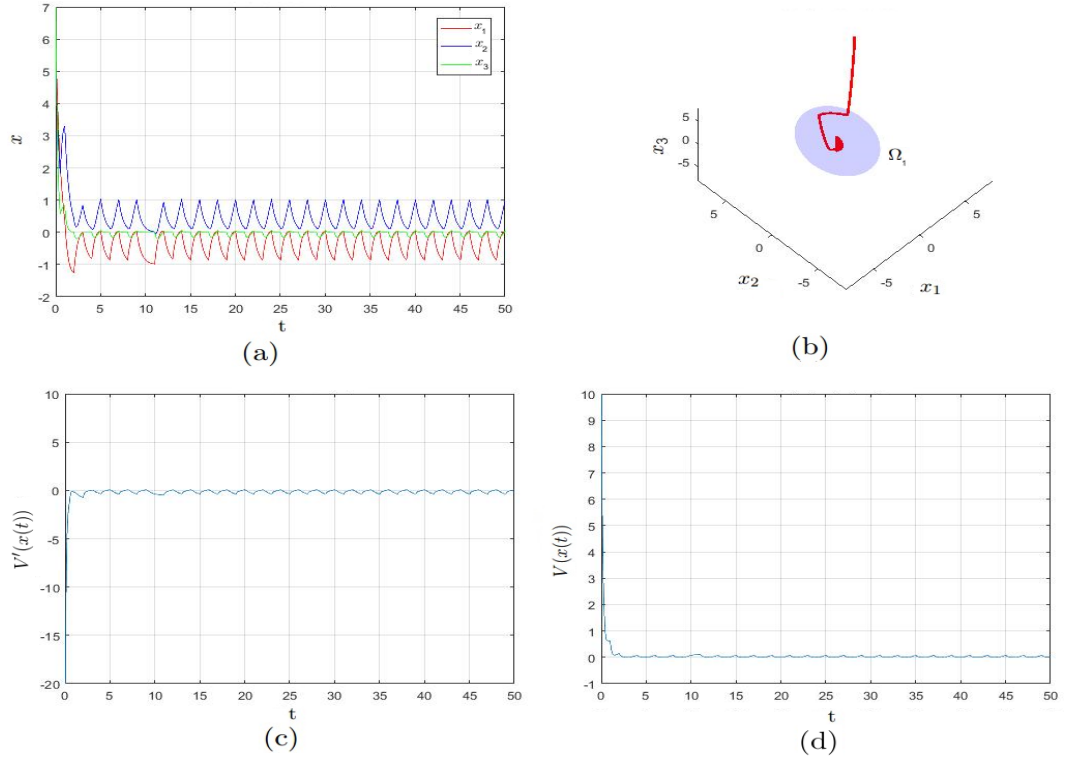


Figura 1: (a) Solução chaveada com condição inicial $x_0 = [6 \ 5 \ 7]'$, (b) plano de fase, (c) gráfico da derivada da função derivada $V'(x(t))$ e (d) gráfico da função auxiliar $V(x(t))$

5 Conclusão

Neste trabalho, obtivemos estimativas do conjunto atrator de sistemas chaveados afins sob chaveamento dwell-time arbitrários. Uma abordagem baseada em otimização não

linear foi proposta para calcular, garantindo o volume mínimo, estimativas do conjunto atrator. O conservadorismo da estimativa fornecida recai na dificuldade de se resolver problemas de otimização não linear quando o número de subsistemas é grande.

6 Agradecimentos

Este trabalho teve apoio parcial da FAPESP - Processo 2014/50851-0.

Referências

- [1] A. Bacciotti and F. Ceragioli. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth lyapunov functions. *ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations* 4, 1999.
- [2] A. Bacciotti and L. Mazzi. An invariance principle for nonlinear switched systems. *Systems & Control Letters*, 54(11):1109 – 1119, 2005.
- [3] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994.
- [4] H. Lin e P. J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(2):308–322, Feb 2009.
- [5] J.K. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 1991.
- [6] J.P. Hespanha. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle’s invariance principle. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(4):470–482, 2004.
- [7] J. LaSalle. Some extensions of liapunov’s second method. *Circuit Theory, IRE Transactions on*, 7(4):520–527, Dec 1960.
- [8] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser Basel, 2003.
- [9] J.L. Mancilla-Aguilar and R.A. Garcia. An extension of lasalle’s invariance principle for switched systems. *Systems & Control Letters*, 55(5):376 – 384, 2006.
- [10] T.S. Pinto, L.F.C. Alberto, and M.C. Valentino. Uma extensão do princípio de invariancia para sistemas chaveados afins. *Anais do XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2017.
- [11] Z. Sun and S.S. Ge. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. Communications and Control Engineering. Springer London, 2011.
- [12] M.C. Valentino, V.A. Oliveira, L.F.C. Alberto, and D.S. Azevedo. An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 61(4):580 – 586, 2012.