



## Análise Temporal e Espectral de Sinais Caóticos Gerados por um Mapa Tenda Generalizado

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisencraft<sup>1</sup>

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

**Resumo.** No presente trabalho, obtém-se analiticamente a SAC e a DEP das órbitas de um mapa linear por partes que é uma generalização de diversos casos apresentados recentemente na literatura. Esse mapa é constituído por um número arbitrário de segmentos com inclinações positivas ou negativas.

**Palavras-chave.** Caos, Comunicação com Caos, Análise Espectral, Sequência de Autocorrelação

### 1 Introdução

Nas últimas décadas, diversas aplicações práticas para sinais caóticos e os sistemas que os geram têm sido propostas. Dentre essas aplicações destacam-se comunicações digitais [5, 10], criptografia [2] entre outras [11].

Em algumas dessas aplicações, como em Telecomunicações e processamento de sinais, é de fundamental importância conhecer as características temporais e espectrais desses sinais. É necessário determinar e possivelmente controlar a Sequência de Autocorrelação (SAC), a densidade espectral de potência (DEP) e a banda ocupada pelos sinais a serem utilizados.

Recentemente, alguns progressos foram obtidos na determinação analítica da SAC e da DEP de sinais caóticos gerados por mapas unidimensionais. No artigo [6], obteve-se expressões analíticas para SAC e DEP do mapa tenda inclinada. Feltekh et al. [7] deduziram expressões analíticas para SAC e DEP para uma família de mapas com três segmentos.

Em [3, 4] obtiveram-se resultados gerais para mapas lineares com um número arbitrário de segmentos, todos com inclinação positiva. Note-se porém que, os resultados obtidos não se aplicam, por exemplo, aos mapas estudados em [6] e [7].

---

<sup>1</sup>rcosta@lcs.poli.usp.br, marcio@lcs.poli.usp.br

Nesse contexto, o objetivo desse artigo é obter a SAC e a DEP das órbitas de um mapa para o qual os apresentados em [3, 4, 6, 7] são casos particulares. Esse mapa é constituído por  $r$  segmentos e cada um deles pode ter inclinação positiva ou negativa.

O artigo é estruturado da seguinte forma: na Seção 2 define-se o mapa estudado e na Seção 3 deduzem-se sua SAC e DEP. Na Seção 4, mostram-se resultados numéricos para alguns casos particulares. Por fim, na Seção 5 tecem-se as conclusões.

## 2 Mapa tenda generalizado

Seja  $r$  um número inteiro com  $r \geq 2$  e  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$  números reais com  $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = 1$ . A cada  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq r$  associa-se um  $\beta_j \in \{-1, 1\}$ . O mapa tenda generalizado  $f : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  é definido por  $s(n+1) = f(s(n))$ , em que, para um ponto  $s \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,

$$f(s) = \beta_j \left[ \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right], \quad (1)$$

$n \in \mathbb{N}$  e  $s(0) \in [-1, 1[$ .

Na Figura 1(a) exemplifica-se o mapa  $f(s)$  para  $r = 6$  e parâmetros  $\alpha_1 = -0,3$ ,  $\alpha_2 = -0,1$ ,  $\alpha_3 = 0,3$ ,  $\alpha_4 = 0,5$  e  $\alpha_5 = 0,8$  com  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\beta_4 = -1$ ,  $\beta_5 = -1$  e  $\beta_6 = -1$ . Na Figura 1(b) são mostradas duas órbitas geradas por esse mapa com condições iniciais  $s(0) = 0,6$  (linha contínua) e  $s(0) = 0,600000001$  (linha tracejada) deixando-se explícita a dependência sensível com as condições iniciais, característica dos sinais caóticos [1].

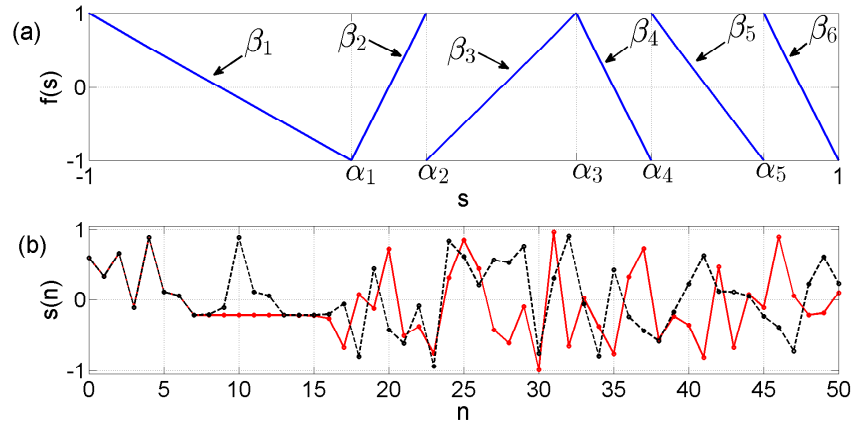


Figura 1: (a) Exemplo de mapa  $f(s)$  com  $r = 6$  inclinações; (b) órbitas para duas condições iniciais diferentes.

Usando argumentos similares aos apresentados em [4, 6] pode-se mostrar que a densidade invariante desse mapa é

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq s < 1, \quad (2)$$

independente dos parâmetros  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ . Assim, a potência média de quase todas as órbitas geradas por  $f(\cdot)$  é

$$P_s = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}. \quad (3)$$

Usando argumentos análogos aos apresentados em [4, 6] pode-se mostrar que quase todas as órbitas geradas por  $f(\cdot)$  são caóticas.

### 3 Sequência de autocorrelação e densidade espectral de potência

Para um processo aleatório estacionário, a SAC é definida por

$$R(k) \equiv E[s(n)s(n+k)], \quad (4)$$

em que  $s(n)$  é uma função amostra do processo e  $E[\cdot]$  é a esperança matemática tomada sobre todas as funções amostras.

Sinais caóticos gerados por mapas ergódicos podem ser considerados como funções amostras de um processo estocástico [8]. A partir dessa interpretação, deduz-se a SAC utilizando-se uma técnica análoga à empregada em [4, 6].

Sejam  $x = s(n)$ , e  $y = s(n+k) = f^k(x)$ . Assim, como  $y$  é completamente determinado por  $x$ , a função densidade invariante conjunta de  $x$  e  $y$ ,  $p(x,y)$ , pode ser escrita como

$$p(x,y) = p_*(x)p(y|x) = p_*(x)\delta(y - f^k(x)), \quad (5)$$

em que  $p_*(\cdot)$  é dada por (2) e  $\delta(\cdot)$  representa a função delta de Dirac. Dessa forma, como  $U = [-1,1[$ , usando (5) e (2) em (4), tem-se para o mapa  $f(\cdot)$

$$R(k) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp_*(x)\delta(y - f^k(x))dxdy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xf^k(x)dx. \quad (6)$$

O desenvolvimento de (6) depende da obtenção da expressão para  $f^k(x)$ , isto é, a  $k$ -ésima iteração de  $f(\cdot)$ . O mapa  $f(\cdot)$  é composto por  $r$  segmentos lineares com inclinações positivas ou negativas. A imagem de cada um desses segmentos é o domínio  $U = [-1,1[$ . Dessa maneira, quando se itera  $f(\cdot)$ , o número de segmentos lineares é multiplicado por  $r$ , i.e.,  $f^k(\cdot)$  é formado por  $r^k$  segmentos. A  $m$ -ésima extremidade dos segmentos de  $f^k(\cdot)$  é representada por  $a_{k,m}$  e o sinal que representa a inclinação desse segmento é dada por  $b_{k,m}$ , para  $1 \leq m \leq r^k$  e  $k = 1, 2, \dots$

O  $m$ -ésimo segmento que forma  $f^k(\cdot)$  tem então equação

$$f^k(x) = b_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{(a_{k,m} - a_{k,m-1})}, \quad a_{k,m-1} \leq x < a_{k,m}, \quad (7)$$

com  $b_{k,m} \in \{-1, 1\}$ . Substituindo-se (7) em (6) obtém-se

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^k} \underbrace{\int_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}} x \left( b_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{a_{k,m} - a_{k,m-1}} \right) dx}_I. \quad (8)$$

Solucionando a integral  $I$ ,

$$I = \left[ \frac{2x^3 b_{k,m}}{3(a_{k,m} - a_{k,m-1})} - \frac{(a_{k,m} + a_{k,m-1})x^2 b_{k,m}}{2(a_{k,m} - a_{k,m-1})} \right]_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}} \\ = b_{k,m} \frac{a_{k,m}^3 - 3a_{k,m}^2 a_{k,m-1} + 3a_{k,m} a_{k,m-1}^2 - a_{k,m-1}^3}{6(a_{k,m} - a_{k,m-1})} = b_{k,m} \frac{(a_{k,m} - a_{k,m-1})^2}{6}. \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8),

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2. \quad (10)$$

Calculando-se  $R(k+1)$  a partir de (10), obtém-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k+1}} b_{k+1,m} (a_{k+1,m} - a_{k+1,m-1})^2. \quad (11)$$

Ao iterar uma vez o mapa, cada segmento é transformado em  $r$  novos segmentos. Por exemplo, o segmento no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$  associado à inclinação  $b_{k,m}$  mostrado na Figura 2(a) é transformado nos  $r$  segmentos com os limites e inclinações mostrados na Figura 2(b).

Definem-se  $w_{m,j}$ ,  $0 \leq j \leq r$  tais que  $f^k(w_{m,j}) = \alpha_j$  no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$ . Usando (7),

$$w_{m,j} = \frac{b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1}) \alpha_j + a_{k,m} + a_{k,m-1}}{2}. \quad (12)$$

As abscissas  $w_{m,j}$  são os pontos extremos dos  $r$  segmentos que compõem  $f^{k+1}(x)$  no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$ . Assim, da Figura 2(b),

$$a_{k+1,r(m-1)+j} = w_{m,j}. \quad (13)$$

A inclinação do  $j$ -ésimo segmento gerado a partir do segmento no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$  é dado pelo produto da inclinação do segmento original  $b_{k,m}$  por  $\beta_j$ , como mostrado na Figura 2. Ou seja,

$$b_{k+1,r(m-1)+j} = b_{k,m} \beta_j, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (14)$$

Reescrevendo-se (11) como uma somatória de  $r^k$  somas de  $r$  parcelas tem-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k+1,r(m-1)+j} (a_{k+1,r(m-1)+j} - a_{k+1,r(m-1)+j-1})^2. \quad (15)$$

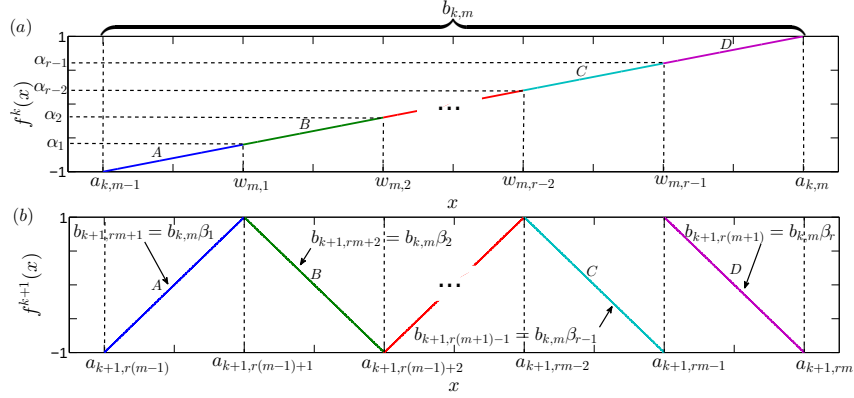


Figura 2: (a)  $f^k(x)$  e (b)  $f^{k+1}(x)$  no intervalo  $[a_k(m-1); a_k(m)]$ .

Usando-se (12), (13) e (14) em (15),

$$\begin{aligned}
 R(k+1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m} \beta_j (w_{m,j} - w_{m,j-1})^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m} \beta_j \left( \frac{b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1}) (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m} \beta_j \underbrace{b_{k,m}^2}_{=1} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \sum_{j=1}^r \beta_j \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Então  $R(k+1)$  pode ser escrito como

$$R(k+1) = \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \tag{17}$$

em que

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2. \tag{18}$$

Comparando (10) e (17), observa-se que  $R(k+1) = \psi R(k)$ . Resolvendo-se essa equação de diferenças com a condição inicial dada em (3), obtêm-se

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}. \tag{19}$$

A DEP  $P(\omega)$  é obtida calculando-se a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de  $R(k)$ , considerando-se  $k$  a variável temporal [9]. Assim a DEP de  $f(\cdot)$ , é dada

por

$$P(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega))}. \quad (20)$$

Essa equação generaliza resultados apresentados para o mapa tenda inclinada em [6], mapa com 3 inclinações de [7] e o mapa apenas com inclinações positivas apresentado em [3, 4]. Porém o mapa (1) é mais geral e o espectro associado pode apresentar comportamentos diversos, como ilustrado na próxima seção.

## 4 Resultados numéricos para alguns casos particulares

Nessa seção analisam-se numericamente alguns casos particulares da expressão (20). Em particular, considera-se  $r = 2$  com  $\alpha_1 = \alpha$ .

Na Figura 3 são apresentadas, de forma normalizada, os comportamentos gerais das DEPs para os valores de  $\alpha$ , para as quatro diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  possíveis. Na Figura 3(a) confirma-se a característica de baixa frequência dos sinais gerados pelo mapa dente-de-serra estudado em [4]. Já na Figura 3(b) a potência está concentrada nas altas ou baixas frequências de acordo com o estudado em [6]. Na Figura 3(c) o espectro possui semelhante diversidade de Figura 3(b) mas para diferentes valores de  $\alpha$ . E por fim, na Figura 3(d) os sinais gerados possuem características da alta frequência.

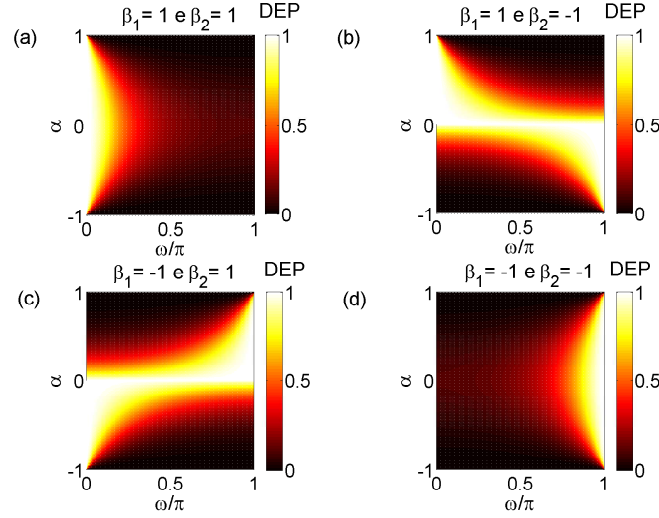


Figura 3: Comportamento geral da DEP normalizada para os valores admissíveis de  $\alpha \in (-1,1)$  para  $f(\cdot)$  com  $r = 2$ , (a)  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 1$ , (b)  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = -1$ , (c)  $\beta_1 = -1$  e  $\beta_2 = 1$  e (d)  $\beta_1 = -1$  e  $\beta_2 = -1$ .

## 5 Conclusões

Para aplicações práticas na área de Telecomunicações é fundamental conhecer e controlar as características temporais e espectrais dos sinais envolvidos. Nesse artigo, deduziram-

se a SAC e a DEP para as órbitas do mapa tenda generalizado. Diversos mapas apresentados na literatura são casos particulares do apresentado aqui. Esses resultados podem ser úteis em projetos de sistemas de comunicação baseados em caos.

## Agradecimentos

ME agradece ao suporte financeiro do CNPq, processos 479901/2013-9 e 309275/2016-4.

## Referências

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer, 2000.
- [2] M. Baptista. Cryptography with chaos. *Physics Letters A*, 240:50 – 54, 1998.
- [3] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft. Análise espectral de sinais caóticos gerados pelo mapa de Bernoulli com  $r$  segmentos. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2015.
- [4] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Processing*, 133:187–191, apr 2017.
- [5] M. Eisencraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*. CRC Press, 2013.
- [6] M. Eisencraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Processing*, 90(1):385–390, jan 2010.
- [7] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Processing*, 94(0):149–157, jan 2014.
- [8] A. Lasota and M. C. Mackey. *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [9] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing (3rd Ed.): Principles, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [10] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi. Wireless communication with chaos. *Physical Review Letters*, 110(18):184101, apr 2013.
- [11] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books Group, January 2001.