



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES

30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Novas condições para controle de sistemas lineares chaveados incertos com acesso à saída

Alexandre Ataíde Carniato¹

Departamento de Engenharia Elétrica, IFSP, Presidente Epitácio, SP,

Leonardo Ataíde Carniato²

Departamento de Engenharia Elétrica, IFSP, Presidente Epitácio, SP,

Tiago Veronese Ortunho³

Departamento de Engenharia Elétrica, IFSP, Presidente Epitácio, SP,

Haislan Ranelli Santana Bernardes⁴

Departamento de Engenharia Elétrica, IFSP, Presidente Epitácio, SP,

Ricardo Fernando Nunes⁵

Departamento de Engenharia Elétrica, IFSP, Presidente Epitácio, SP,

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira⁶

Departamento de Engenharia Elétrica, UNESP, Ilha Solteira, SP

Resumo. Neste trabalho são propostas novas condições de estabilidade para sistemas lineares chaveados incertos com acesso à saída. Utiliza-se a saída como sendo uma nova variável de estado. Deste modo, a regra de chaveamento pode ser generalizada através da inserção de novas variáveis de decisão. As formulações são baseadas em LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*. Um exemplo numérico mostra que, quando as condições propostas são factíveis, os teoremas apresentados neste trabalho generalizam resultados publicados na literatura.

Palavras-chave. Sistema linear chaveado incerto, chaveamento dependente da saída, sistema aumentado.

¹carniato@ifsp.edu.br

²leonardo@ifsp.edu.br

³tiagoveronese@ifsp.edu.br

⁴haislan@ifsp.edu.br

⁵rnunes@ifsp.edu.br

⁶marcelo@dee.feis.unesp.br

1 Introdução

Sistemas chaveados representam uma subclasse dos sistemas híbridos. Deste modo, pode-se dizer que sistemas chaveados são sistemas dinâmicos compostos por um número finito de subsistemas que comutam entre si, respeitando uma regra de chaveamento. Os subsistemas não precisam apresentar as mesmas características, ou seja, caso o sistema global seja estável, não necessariamente, cada subsistema será estável [1]. Recentemente, tópicos de pesquisa relacionados aos sistemas chaveados apresentaram um crescimento considerável [2, 3]. Este fato associa-se à uma vasta possibilidade de descrever sistemas físicos. Pode-se citar algumas aplicações práticas, tais como: controle de tráfego urbano [4], controle de conversores CC-CC [6, 7], dentre outros.

Muitas vezes, em implementações de sistemas de controle com alocação de polos, o vetor de estado pode não estar completamente disponível. Deste modo, é importante desenvolver estratégias de chaveamento que dependam da saída medida da planta [?]. Inicialmente serão propostas condições de estabilidade para sistemas lineares chaveados incertos. Em seguida, variáveis de folga serão consideradas visando flexibilizar as condições de estabilidade.

Em sequência, definindo um sistema aumentado interpretando-se a saída medida da planta como uma nova variável de estado do sistema, são propostas condições originais para a estabilidade que podem reduzir o conservadorismo de técnicas conhecidas. Todas as formulações são baseadas em LMIs, (do inglês Linear Matrix Inequalities). O artigo é organizado como segue: na seção 2 são apresentados conceitos iniciais para o controle de sistemas lineares chaveados incertos. Na seção 3 são apresentadas novas condições de estabilidade. Na seção 4 um exemplo numérico mostra que as condições desenvolvidas são factíveis e generalizam resultados da literatura. Finalmente, na seção 5 apresentam-se as conclusões.

2 Sistemas Lineares Chaveados Incertos

Considere o sistema linear chaveado incerto com a seguinte realização em espaço de estados [5]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\sigma, \alpha)x(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$ e $\sigma(t)$ a regra ou lei de chaveamento, que seleciona em cada instante de tempo $t \geq 0$, um subsistema disponível $A(i, \alpha)$, $i \in \mathbb{K}_N$. Na matriz $A(\sigma, \alpha)$, o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas da planta. A matriz $A(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser descrita por meio da combinação convexa de seus vértices, como mostrado abaixo:

$$A(\sigma, \alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_{\sigma j}, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sigma(t) \in \mathbb{K}_N, \quad (2)$$

sendo r o número de vértices do politopo. Os resultados apresentados a seguir, servirão de base para o desenvolvimento teórico deste trabalho. Deste modo, tem-se o seguinte problema de controle:

Problema 2.1. *Determine uma função $u(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que a regra de chaveamento*

$$\sigma(t) = u(y(t)), \quad (3)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado definido em (1) globalmente assintoticamente estável.

Em [5] os autor propôs uma solução para o problema de controle supracitado.

Teorema 2.1. *[5] Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes $X_{1_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{2_{ik}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positiva definidas $P_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} X_{1_{ik}}A_{ij} + X_{1_{ij}}A_{ik} + (*) & (*) \\ P_{jk} - X'_{1_{ik}} + X_{2_{ik}}A_{ij} + P_{kj} - X'_{1_{ij}} + X_{2_{ij}}A_{ik} & -X_{2_{ik}} - X_{2_{ij}} - (*) \end{bmatrix} \\ < \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} + Q_{0_{kj}} + 2C'Q_iC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$Q_{0_{jk}} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (5)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento

$$\sigma(y) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y), \quad (6)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (1) e (2) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Para mais detalhes, veja [5]. □

3 Novas condições para estabilidade e custo garantido para sistemas lineares chaveados

A seguir propõe-se contemplar a saída como uma nova variável de estado. Tal abordagem visa aumentar a ordem do sistema. Ao fazê-lo, a regra de chaveamento pode ser generalizada através da inserção de outras variáveis de decisão. Sendo assim, o novo vetor de variáveis de estado, será composto por $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Considere que o sistema linear chaveado incerto (1) possa ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \alpha)x(t), & x(0) = x_0 \\ \dot{y}(t) = CA(\sigma, \alpha)x(t) \end{cases} \quad (7)$$

Deste modo, a expressão (7) pode ser reescrita como:

$$\dot{\xi}(t) = A_N(\sigma, \alpha)\xi, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (8)$$

sendo $\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $A_N(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & 0 \\ CA(\sigma, \alpha) & 0 \end{bmatrix}$.

A partir de (2) e (8) propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Considere o sistema linear chaveado incerto (7) e (8) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem, $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $P_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{1_{jk}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $Q_{0_{jk}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0_{n \times p} \\ 0_{p \times n} & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{ij}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{ij} & A'_{ij}C'P_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}}CA_{ij} & 0_{p \times p} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_i \\ Z_iC & Q_i \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C < 0, \quad (11)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, j e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(y) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} [y'(2Z_i + Q_i)y], \quad (12)$$

torna o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema representado por (2) e (8) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (9), (10) e (11) são factíveis e uma função candidata quadrática de Lyapunov:

$$V(\xi) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \xi' \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} \xi, \quad (13)$$

sendo $k = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, r$.

A partir de (7), (8), (10), (11), (12) e (13), têm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} A'_{\sigma j} & A'_{\sigma j}C' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0_{jk}} & 0 \\ 0 & P_{1_{jk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\sigma j} & 0 \\ CA_{\sigma j} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_{\sigma j}P_{0_{jk}} + P_{0_{jk}}A_{\sigma j} & A'_{\sigma j}C'P_{1_{jk}} \\ P_{1_{jk}}CA_{\sigma j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{k=1}^r \alpha_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_{0_{jk}} & C'Z_\sigma \\ Z_\sigma C & Q_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \sum [x'(Q_{0_{jk}})x + y'(2Z_\sigma + Q_\sigma)y] \\ &= \sum [x'(Q_{0_{jk}})x] + \min_{i \in \mathbb{K}_N} y'(2Z_i + Q_i)y \\ &\leq \sum [Q_{0_{jk}} + C'(2Z_\lambda + Q_\lambda)C] < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Note que, a primeira desigualdade é obtida considerando (10). A partir de (2) e (13), verifique que $V(\xi) > 0$, para $\xi_0 = \xi(0) \neq 0$ e a partir de (14), $\dot{V}(\xi) < 0$. Deste modo, a prova está concluída. $\square$

Observação 3.1. Comparando-se as condições dispostas nos Teoremas 2.1 e 3.1 destacam-se algumas generalizações. Por exemplo, no Teorema 2.1, as matrizes $P_{jk} > 0$, para todo $j, k \in \mathbb{K}_r$, ou seja, todas as matrizes devem ser positivas definidas. Já no Teorema 3.1, não existe nenhuma condição que obrigue $P_{0_{jk}} > 0$ e $P_{1_{jk}} > 0$, apenas que a condição (9) seja satisfeita. Isto flexibiliza as condições LMIs, pois, ocasionalmente pode-se ter que $P_{0_{jk}} < 0$ ou $P_{1_{jk}} < 0$. Outro fato interessante relaciona-se ao aumento do número de variáveis de decisão na regra de chaveamento (12). Note que, na estratégia de chaveamento do Teorema 2.1, a única variável de decisão é Q_i , para todo $i \in \mathbb{K}_N$, conforme mostrado em (6). Porém, note que em (12) tem-se duas variáveis de decisão, neste caso, Q_i e Z_i , para todo $i \in \mathbb{K}_N$.

4 Exemplo Numérico

Considere o sistema linear incerto (1) e (2), sendo $r = 2$, $N = 3$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$, e as seguintes matrizes que representam as dinâmicas dos subsistemas:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} h_1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, & A_{21} &= \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -3 & h_2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, & A_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, & A_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & h_3 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

As matrizes A_{12} , A_{22} e A_{32} dependem de parâmetros incertos, h_1 , h_2 e h_3 respectivamente. Desta maneira, é possível verificar que A_{12} e A_{32} não são Hurwitz para todos valores de $h_1 \in [-5, 5]$ e $h_3 \in [-2, 5, 27, 5]$, respectivamente. Além disso, note que a matriz A_{22} é Hurwitz para todos valores de $h_2 \in [-50, 0]$. Outrossim, observe que as matrizes A_{11} e A_{31} não são Hurwitz e a matriz A_{21} é Hurwitz. A matriz de saída do sistema linear chaveado é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Neste exemplo adotou-se $\lambda_1 = 0, 1$, $\lambda_2 = 0, 7$ e $\lambda_3 = 0, 2$. Estes valores foram retirados do exemplo 2 apresentado em [5]. A partir da Figura 1 note que, as novas condições propostas no Teorema 3.1 apresentaram maiores regiões de factibilidade quando comparadas com as condições previamente publicadas em [5]. Justifica-se este ganho a partir da generalização obtida na regra de chaveamento através da inserção de novas variáveis de decisão, conforme mostrado em (12). Na Figura 2 apresenta-se a resposta temporal obtida através das condições propostas no Teorema 3.1, considerando-se $x_0 = x(0) = [-1 \ 3 \ 2]'$, $h_1 = 5$ e $h_2 = -26$. Note que, o sistema é estável e a trajetória das variáveis de estado convergem para o ponto de equilíbrio, neste caso, $x = 0$.

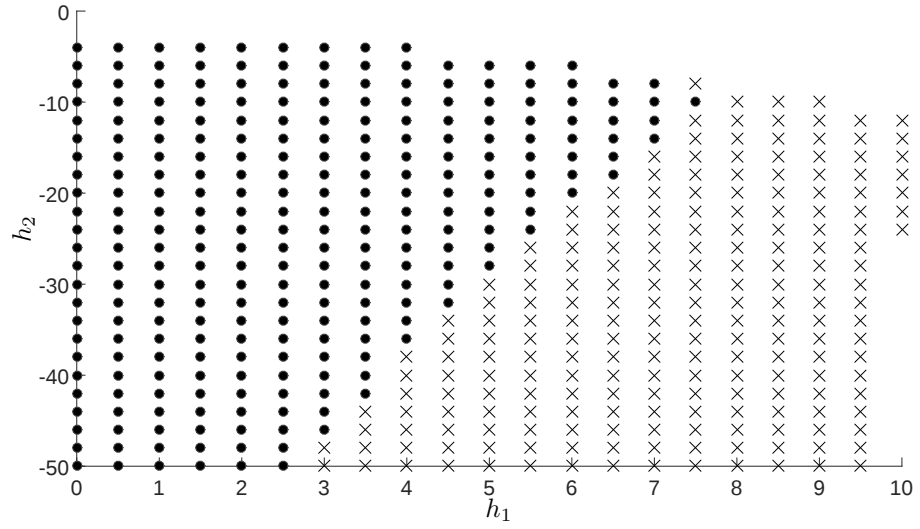


Figura 1: Regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 2.1 e 3.1, sendo que a região factível obtida através do Teorema 2.1 é representada por ($\bullet$), a região factível obtida através do Teorema 3.1 é representada por ($\bullet$) e ($\times$).

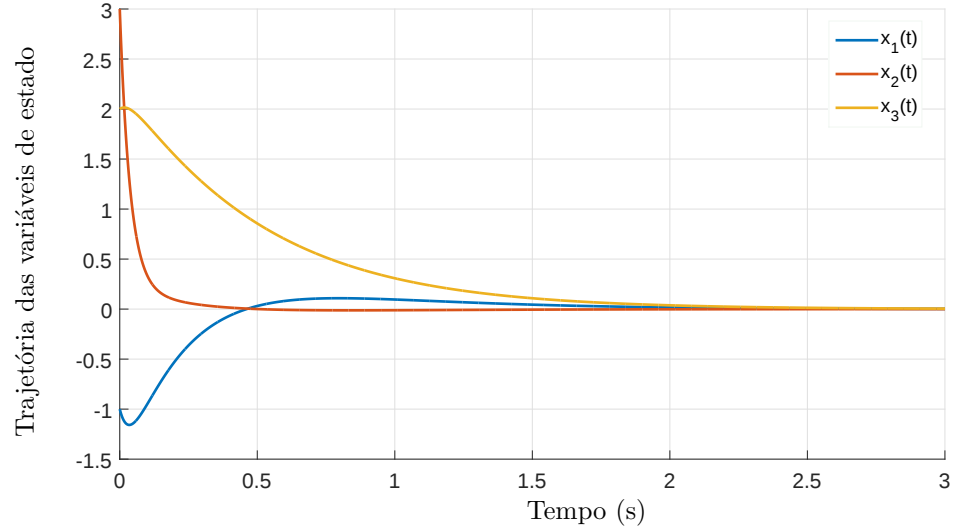


Figura 2: Resposta temporal das variáveis de estado.

5 Conclusões

Neste trabalho foram propostas novas condições para estabilidade para sistemas lineares chaveados incertos com chaveamento dependente da saída medida da planta. Através do sistema aumentado, ou seja, considerando a saída medida como sendo uma nova variável de estado, novas condições mais flexíveis para estabilidade foram propostas. Um exemplo numérico mostra que, o teorema proposto aumenta a região de factibilidade quando comparados com resultados previamente publicados na literatura.

Referências

- [1] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Springer Science & Business Media, (2003).
- [2] C. Yuan and F. Wu, Asynchronous switching output feedback control of discrete-time switched linear systems, *International Journal of Control.*, (2015), DOI: 10.1080/00207179.2015.1016454.
- [3] L. Zhang, S. Zhuang and R. D. Braatz, Switched model predictive control of switched linear systems: Feasibility, stability and robustness, *Automatica*, vol. 67, 8–21, (2016), DOI: 10.1016/j.automatica.2016.01.010.
- [4] M. Papageorgiou, C. Diakaki, V. Dinopoulou, A. Kotsialos and W. Yibing, Review of road traffic control strategies, *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, 2043–2067, (2003), DOI: 10.1109/JPROC.2003.819610.
- [5] E. I. Mainardi Junior, M. C. M. Teixeira, R. Cardim, E. Assunção, M. R. Moreira, D. R. de Oliveira and A. A. Carniato, Robust Control of Switched Linear Systems with Output Switching Strategy, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 26, 455–465, (2015), DOI: 10.1007/s40313-015-0195-1.
- [6] R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção and M. R. Covacic, Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, 3505–3513, (2009), DOI: 10.1109/TIE.2009.2026381.
- [7] G. S. Deaecto, J. C. Geromel F. S. Garcia and J. A. Pomilio, Switched affine systems control design with application to DC-DC converters, *IET Control Theory and Applications*, vol. 4, 1201–1210, (2010), DOI: 10.1049/iet-cta.2009.0246.