



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES

30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

Solução Completa da Equação de Movimento de um Pêndulo Oscilando em Aro Rotativo usando Simetrias de Lie

Cláudio H. C. Costa Basquerotto¹

Afonso Willian Nunes²

Samuel da Silva³

Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira, SP, Brasil.

Edison Righetto⁴

Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Engenharia, Departamento de Matemática, Ilha Solteira, SP, Brasil.

Resumo. O conhecimento de simetrias de Lie em equações diferenciais pode gerar transformações nas variáveis dependentes e independentes e obter novas equações que podem ser mais fáceis de se integrar. Em especial, em algumas situações pode-se reduzir a ordem e obter integrais primeiras. Neste sentido, este artigo apresenta a aplicação do teorema de Lie para obtenção da solução completa de um problema não linear clássico da dinâmica de sistemas mecânicos: o pêndulo oscilando em um aro rotativo. A partir da obtenção das integrais primeiras obtidas com os geradores de simetria a solução exata é encontrada com o auxílio das funções elípticas de Jacobi.

Palavras-chave. Simetrias de Lie, Dinâmica de Rotações, Funções Elípticas de Jacobi.

1 Introdução

Muitos problemas encontrados em engenharia podem ser modelados através de equações diferenciais [1]. Esse tipo de equação fornece informações detalhadas a respeito das distribuições ou mudanças da variável dependente em função de variáveis independentes [8]. Diversos métodos podem ser usados para obtenção de soluções destas equações, tanto de maneira numérica, quanto com aproximações analíticas.

Dentre as formas analíticas para se resolver equações diferenciais, o método de Lie é um dos mais poderosos e consolidados na literatura [3, 5, 6, 9, 19]. O método foi criado pelo matemático Sophus Lie no século XIX com base na ideia de transformação de simetrias [17]. Uma simetria de um sistema de equações diferenciais é uma transformação que mapeia qualquer solução para outra solução do sistema [17, 20]. Tais transformações são grupos

¹cbasquerotto@ymail.com

²afonso_willian@hotmail.com

³samuel@dem.feis.unesp.br

⁴edisonrighetto72@gmail.com

que dependem de parâmetros contínuos e consistem em transformações pontuais (simetrias pontuais), atuando no espaço do sistema de variáveis independentes e dependentes, bem como em todas as primeiras derivadas das variáveis dependentes [11, 15]. Exemplos elementares de grupos de Lie incluem: translações, rotações e escalonamento [4].

Neste sentido, este artigo busca ajudar na popularização do método de Lie através da proposta de solução completa de um problema não linear clássico da dinâmica de sistemas mecânicos. O problema em questão envolve um pêndulo oscilando em um aro rotativo [2, 7, 14]. A partir da equação de movimento, pode-se obter as simetrias de Lie e associar os invariantes correspondentes. Com a aplicação do teorema de Lie, a integral primeira é invertida para obtenção da solução analítica da equação de movimento usando o auxílio de funções elípticas de Jacobi. O exemplo apresentado mostra a alta aplicabilidade que as simetrias de Lie podem ter em problemas práticos de dinâmica de rotações e em robótica, por exemplo.

2 Pêndulo Oscilando em um Aro Rotativo

A figura 1 mostra um pêndulo de massa m deslizando livremente sem fricção em um aro de raio ℓ girando com velocidade angular constante ω em um campo gravitacional constante com aceleração g . Assim, o pêndulo se move em uma superfície esférica de raio ℓ . O sistema de referência $\{x, y, z\}$ utilizado é solidário ao aro. A coordenada generalizada utilizada para descrever o movimento é dada por θ (medido a partir do eixo z negativo).

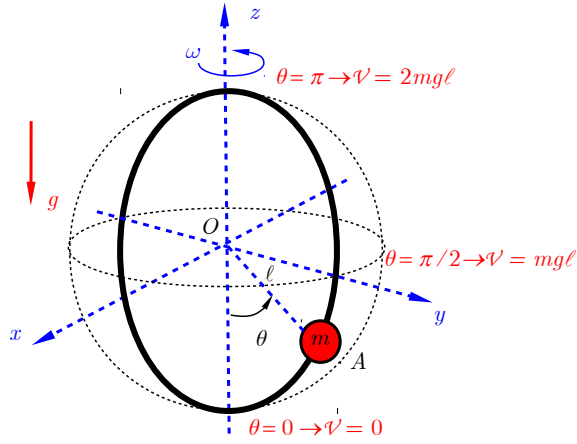


Figura 1: Representação do pêndulo se movendo no aro circular.

A equação do movimento que descreve esta dinâmica é dada por:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \quad (1)$$

A solução analítica desta equação diferencial não linear é conhecida e descrita na literatura [2]. No entanto, algumas transformações podem ser aplicadas para manter a equação invariante como, por exemplo, a utilização de simetrias de Lie para redução de ordem e obtenção da solução analítica.

3 Simetrias de Lie

Um grupo de transformação envolvendo θ e t a um parâmetro contínuo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ pode ser feita da seguinte maneira [3, 5, 19]:

$$\bar{t} = \psi(t, \theta, \varepsilon), \quad \bar{\theta} = \phi(t, \theta, \varepsilon) \quad (2)$$

Pode-se expandir $\bar{t}$ e $\bar{\theta}$ com séries de MacLaurin em torno de um infinitesimal ε através de:

$$\bar{t} \approx t + \varepsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \right), \quad \bar{\theta} \approx \theta + \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \right) \quad (3)$$

Definindo-se novas funções infinitesimais:

$$\xi(t, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad \eta(t, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad (4)$$

pode-se reescrever a eq. (2) como:

$$\bar{t} \approx t + \varepsilon \xi(t, \theta), \quad \bar{\theta} \approx \theta + \varepsilon \eta(t, \theta) \quad (5)$$

Contudo, além de mudanças nas variáveis t e θ , um prolongamento para as derivadas de alta ordem $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ devem ser obtidas, conhecidas como prolongamento de ordem superior.

3.1 Prolongamento das Transformações e seus Geradores

A seção anterior concentrou-se em transformar as variáveis dependentes e independentes, considerando transformações a um parâmetro e encontrando seus geradores infinitesimais. No entanto, se for necessário aplicar uma transformação para uma equação diferencial, as transformações das derivadas também devem ser conhecidas [6]. Com isso, é preciso estender os geradores infinitesimais, a partir de:

$$\dot{\bar{\theta}} \approx \dot{\theta} + \varepsilon \beta^{(1)} \quad (6)$$

sendo:

$$\beta^{(1)} = \mathcal{D}_t(\eta) - \dot{\theta} \mathcal{D}_t(\xi) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \xi}{\partial \theta} (\dot{\theta})^2 \quad (7)$$

o prolongamento de primeira ordem.

Em sistemas de equações diferenciais com termos de alta ordem, deve-se realizar o prolongamento para estas variáveis. Pode-se escrever $\ddot{\bar{\theta}}$ com relação ao campo de vetor $\gamma = \{\xi \quad \eta\}^T$ e ε , obtendo-se assim:

$$\ddot{\bar{\theta}} \approx \ddot{\theta} + \varepsilon \beta^{(2)} \quad (8)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \beta^{(2)} = \mathcal{D}_t(\beta^{(1)}) - \ddot{\theta} \mathcal{D}_t(\xi) = & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left(2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial \theta} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) \dot{\theta} + \\ & \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial \theta} \right) (\dot{\theta})^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} (\dot{\theta})^3 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \ddot{\theta} - 3 \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \dot{\theta} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

o prolongamento de segunda ordem.

3.2 Teorema de Lie

O conhecimento das funções ξ e η , formando um vetor $\gamma = \{\xi \quad \eta\}^T$, permite a construção de um gerador infinitesimal de simetrias, descrito por $\mathcal{X}$ a partir do seguinte cálculo:

$$\mathcal{X} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (10)$$

Lie demonstrou que uma equação diferencial admite um grupo de simetrias se, e somente se, a chamada condição de Lie for satisfeita. Por exemplo, em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, pode-se aplicar um operador $\mathcal{U}''$ como [3, 5, 12]:

$$\mathcal{U}'' = \beta^{(1)} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} + \beta^{(2)} \frac{\partial}{\partial \ddot{\theta}} \quad (11)$$

Reescrevendo a eq. (1) na forma:

$$\mathcal{F}(t, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \equiv \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \quad (12)$$

Para a condição de Lie ser satisfeita deve valer a relação:

$$(\mathcal{U}'' + \mathcal{X}) \mathcal{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{U}'' + \mathcal{X}) \mathcal{F} = \xi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} + \beta^{(1)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} + \beta^{(2)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \ddot{\theta}} = 0 \quad (13)$$

O critério de invariância infinitesimal, descrito pela eq. (13), envolve t e θ , e as derivadas de θ com respeito a t , assim como ξ e η e suas derivadas parciais com respeito a t e θ . Depois de eliminar todas as dependências através das derivadas envolvendo θ , pode-se equacionar os coeficientes das derivadas parciais remanescentes de θ até zero. Com isso, pode-se ter um resultado com um grande número de equações diferenciais parciais para determinar as funções ξ e η . Estas equações são conhecidas como equações determinantes para um grupo de simetrias de um determinado sistema. Encontrar as soluções das equações determinantes podem ser feitas através da utilização de alguns pacotes computacionais de manipulação simbólica, como por exemplo, wxMaxima, Mathematica, Maple (DETools e/ou PDETools), MathLie [3], Sym [10], entre outros.

4 Aplicação das Simetrias de Lie na Equação do Movimento

Aplicando-se a condição de Lie (13) na eq. (1), pode-se obter as seguintes equações determinantes:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial t} = 0 \quad (15)$$

$$3 \sin \theta \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta \partial t} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) - \sin \theta \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \\
& \eta \left(-\omega^2 \sin^2 \theta - \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \cos \theta \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Resolvendo as eqs. (14)-(17) pode-se obter o seguinte gerador infinitesimal: $\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ sendo $\xi = 1$ e $\eta = 0$. Este gerador infinitesimal corresponde à translação temporal, e corresponde ao clássico invariante que mostra a conservação da energia, uma vez que não se assume dissipação.

Deve-se ressaltar que neste exemplo, apenas um gerador é obtido, e com isto uma integral primeira. Uma vez que o sistema tem um grau de liberdade, isto indica que o sistema é completamente integrável. Nota-se que em algumas equações de movimento é possível ter mais de um gerador de simetrias, por exemplo, no oscilador harmônico [13,21].

4.1 Redução da Ordem da EDO

Supondo que $\mathcal{X}$ é um campo vetorial que não se anula nos pontos de origem, pode-se introduzir novas coordenadas $\{\bar{\theta}(t, \theta), \bar{t}(t, \theta)\}$. A mudança de variáveis é feita usando os métodos para encontrar invariantes de grupo. Isto implica que $\mathcal{X}$ pode ser transformada na seguinte forma $\partial/\partial \bar{t}$ fornecendo assim $\bar{t}$ e $\bar{\theta}$ que satisfaçam as seguintes condições [19]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1(\bar{\theta}) &= \xi \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} = 0 \\
\mathcal{X}_1(\bar{t}) &= \xi \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \bar{t}}{\partial \theta} = 1
\end{aligned} \tag{18}$$

Para satisfazer a condição expressa pela eq. (18), deve-se escolher $\bar{\theta} = \theta$ e $\bar{t} = t$. Expandindo esta condição para $\dot{\bar{t}}$ e $\ddot{\bar{t}}$, obtém-se:

$$\dot{\bar{t}} = \frac{d\bar{t}}{d\bar{\theta}} = \frac{1}{\dot{\bar{\theta}}} \implies \ddot{\bar{t}} = \frac{d\dot{\bar{t}}}{d\bar{\theta}} = -\frac{\ddot{\bar{\theta}}}{\dot{\bar{\theta}}^3} \tag{19}$$

Reescrevendo a eq. (1) usando as novas coordenadas:

$$-\frac{\ddot{\bar{t}}}{\dot{\bar{t}}^3} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \bar{\theta} \right) \sin \bar{\theta} = 0 \tag{20}$$

Fazendo uma nova projeção $z = \dot{\bar{t}}$ e $\dot{z} = \ddot{\bar{t}}$ a eq. (20) pode ser reescrita como:

$$-\frac{\dot{z}}{z^3} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \bar{\theta} \right) \sin \bar{\theta} = 0 \tag{21}$$

Resolvendo a eq. (21), pode-se obter:

$$z = \frac{\sqrt{\omega^2 \ell^2 \sin^2 \bar{\theta} + 2g\ell \cos \bar{\theta} + \mathcal{C}\ell^2}}{\omega^2 \ell \sin^2 \bar{\theta} + 2g \cos \bar{\theta} + \mathcal{C}\ell} \tag{22}$$

sendo $\mathcal{C}$ uma constante de integração.

Retornando às coordenadas anteriores:

$$\dot{t} = \frac{d\bar{t}}{d\bar{\theta}} = \frac{\sqrt{\omega^2 \ell^2 \sin^2 \bar{\theta} + 2g\ell \cos \bar{\theta} + C\ell^2}}{\omega^2 \ell \sin^2 \bar{\theta} + 2g \cos \bar{\theta} + C\ell} \quad (23)$$

então:

$$\bar{t} = \int \frac{d\bar{\theta}}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \bar{\theta} + 2\frac{g}{\ell} \cos \bar{\theta} + C}} \quad (24)$$

Utiliza-se aqui as integrais elípticas de Jacobi para resolver esta integral, a partir da seguinte equivalência: $\text{sn}(u, k) \equiv \sin \bar{\theta} = \sin(\text{am } u)$, $\text{cn}(u, k) \equiv \cos \bar{\theta} = \cos(\text{am } u)$ e $\text{dn}(u, k) \equiv \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u} = \frac{d(\text{am } u)}{du}$ [2, 16]. A partir das definições, pode-se obter as seguintes identidades: $\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$, $\text{dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u = 1$ e $\text{cn}^2 u + (1 - k^2) \text{sn}^2 u = \text{dn}^2 u$. Cuidadosamente considerando o argumento (u, k) na transformações, obtém-se finalmente a equação de movimento do pêndulo oscilando em um aro rotativo:

$$\theta(t) = 2 \arctan \left\{ \sqrt{a} \text{dn} \left[\frac{1}{2} \omega t \sqrt{|p| a}, \sqrt{\frac{a-b}{a}} \right] \right\} \quad (25)$$

sendo $a \equiv \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$, $b \equiv \frac{1 + \cos \theta - 2 \cos \theta}{1 - \cos \theta + 2 \cos \theta}$ e $p \equiv C - 1 \pm 2 \cos \theta$.

5 Considerações Finais

Pode-se observar que a aplicação das simetrias de Lie para redução de ordem de uma equação diferencial pode ser muito útil, desde que esta, seja invariante sob um grupo a um parâmetro de simetria. Pode-se ver que através da aplicação das simetrias de Lie a ordem é reduzida e obtém-se integrais primeira que podem ser resolvidas usando algumas classes de funções especiais, como as funções elípticas de Jacobi. O método apresentado aqui pode ser estendido para diversas equações de movimento.

Agradecimentos

O dois primeiros autores agradecem, respectivamente, a CAPES e a FAPESP (Processo 16/22473-6) por suas bolsas. Os autores agradecem o apoio financeiro do Edital Universal 2016 do CNPq (Processo 404463/2016-9) e as discussões sobre Simetrias de Lie com o Prof. Peter J. Olver da University of Minnesota (USA) durante o período sanduíche realizado pelo primeiro autor.

Referências

- [1] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer Science & Business Media, (2013).
- [2] T. E. Baker and A. Bill, Jacobi elliptic functions and the complete solution to the bead on the hoop problem, American Journal of Physics, vol. 80, 506–514, (2012).
- [3] G. Baumann, Symmetry Analysis of differential equations with Mathematica, Springer, (2000).

- [4] G. W. Bluman and S. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Springer Science & Business Media, vol. 154, (2008).
- [5] G. W. Bluman and S. Kumei, Symmetries and differential equations, Springer, (1989).
- [6] G. W. Bluman, Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 145, 52–62, (1990).
- [7] A. Burov and I. Yakushev, Bifurcations of the relative equilibria of a heavy bead on a rotating hoop with dry friction, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 78, 460–467, (2014).
- [8] S. C. Chapra and R. P. Canale, Numerical methods for engineers, McGraw-Hill, vol. 2, (1998).
- [9] M. Craddock, Symmetry groups of linear partial differential equations and representation theory: The Laplace and axially symmetric wave equations, Journal of Differential Equations, vol. 166, 107–131, (2000).
- [10] S. Dimas and D. Tsoubelis, SYM: A new symmetry-finding package for Mathematica, Proceedings of the 10th international conference in modern group analysis, 64–70, (2004).
- [11] K. Erdmann and M. J. Wildon, Introduction to Lie algebras, Springer-Verlag London, (2006).
- [12] A. Fatima and F. M. Mahomed, Conditional symmetries for ordinary differential equations and applications, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 67, 95–105, (2014).
- [13] T. J. Gordon, On the symmetries and invariants of the harmonic oscillator, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 19, 183, (1986).
- [14] A. K. Johnson and J. A. Rabchuk, A bead on a hoop rotating about a horizontal axis: A one-dimensional ponderomotive trap, American Journal of Physics, vol. 77, 1039–1048, (2009).
- [15] B. A. Kochetov, Lie group symmetries and Riemann function of Klein–Gordon–Fock equation with central symmetry, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, 1723–1728, (2014).
- [16] N. A. Lemos, Oscilador quártico e funções elípticas de Jacobi, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 39, (2017).
- [17] S. Lie and G. Scheffers, Vorlesungen über differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen transformationen, Leipzig: B. G. Teubner, (1981).
- [18] A. de S. Martins, Simetrias e leis de conservação na mecânica clássica, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 21, 33–39, (1999).
- [19] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer, (1986).
- [20] M. Rosa and M. S. Bruzón and M. L. Gandarias, Symmetry analysis and exact solutions for a generalized Fisher equation in cylindrical coordinates, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 25, 74–83, (2015).
- [21] C. E. Wulfman and B. G. Wybourne, The Lie group of Newton’s and Lagrange’s equations for the harmonic oscillator, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 9, 507, (1976).