



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES  
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

---

## Análise do Circuito RLD por Espaço de Estados usando modelo Não-ideal do Diodo

Márcia Luciana da Costa Peixoto<sup>1</sup>

Erivelton Geraldo Nepomuceno<sup>2</sup>

Samir Angelo Milani Martins<sup>3</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica,  
Grupo de Controle e Modelagem de Sistemas, UFSJ, São João del-Rei, MG

**Resumo.** Neste trabalho é analisado o comportamento não-linear e caótico para o circuito RLD, que é modelado por espaço de estados e simulado numericamente considerando-se como modelo do diodo a associação em paralelo entre resistências e capacitâncias não lineares. Assim, sendo possível caracterizar a dinâmica do circuito por meio de duplicações de período até o comportamento caótico. Ainda calculou-se o expoente de Lyapunov para comprovar a existência de caos no circuito. E, por último comparou-se resultados simulados com experimentais garantido a qualidade do modelo obtido.

**Palavras-chave.** Circuito RLD, Modelo do Diodo, Duplicação de Período, Caos.

## 1 Introdução

Sistemas dinâmicos caóticos têm recebido grande atenção nos últimos anos, principalmente após Lorenz [9] descobrir que seria praticamente impossível fazer previsão a longo prazo de um sistema dinâmico não-linear. Dentre os sistemas caóticos estudados, há circuitos elétricos como os circuitos RLD [14], Chua [4], Jerk [13], conversor Buck [5].

Em alguns sistemas eletro-eletrônicos, fenômenos como o aparecimento de sub-harmônicas, oscilações quase-periódicas e comportamento caótico estão presentes, pois existe uma série de elementos que possuem relações de não linearidade entre as variáveis como: dispositivos semicondutores, capacitâncias, indutâncias e resistências não lineares. O que ocorre muitas vezes é a linearização dos modelos matemáticos dos sistemas eletro-eletrônicos podendo ocorrer uma simplificação de sua dinâmica, assim o modelo poderá deixar de prever tais fenômenos [6, 11].

---

<sup>1</sup>marciapeixoto93@hotmail.com

<sup>2</sup>nepomuceno@ufs.j.edu.br

<sup>3</sup>martins@ufs.j.edu.br

Uma das marcas mais importantes do caos é a chamada sensibilidade às condições iniciais, o que significa que duas trajetórias arbitrárias inicialmente fechadas divergem exponencialmente ao longo do tempo. O expoente de Lyapunov de um sistema dinâmico é o número que caracteriza a taxa de separação dessas trajetórias infinitesimalmente próximas [1]. Uma outra forma verificar o comportamento do sistema é por meio de atratores estranhos, que é a forma na qual os movimentos caóticos do sistema se auto-organizaram. Seu comportamento é exibido num espaço matemático abstrato, chamado espaço de fase que parece aleatório ou caótico [15].

Dentre os sistemas elétricos caóticos estudados, há um grande interesse em circuitos eletrônicos, devido a facilidade de implementação e análise, como os circuitos Chua [4], Jerk [13] e ainda o RLD [14], que é analisado neste trabalho. O circuito RLD é composto somente por elementos passivos conectados em série, alimentados por um sinal de tensão senoidal [6]. Para alguns determinados valores dos parâmetros as características elétricas do circuito (tensão e corrente) podem apresentar duplicação de período, caos, janelas periódicas, histerese, entre outros efeitos [8, 12].

Uma das formas de analisar o comportamento é por meio da modelagem do circuito em espaço de estados, que permite sua solução em *softwares* como Matlab. Entretanto, para o caso do RLD deve-se ter atenção pois é necessário o modelo não-ideal do diodo. Assim, o principal objetivo deste trabalho é a interpretação do comportamento não-linear e caótico deste sistema, por meio da análise por espaço de estados onde é incorporado as capacitâncias e resistências não lineares ao modelo do diodo, necessárias para exibir o comportamento caótico na simulação.

Com o modelo proposto, escolheu-se a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle e assim foi possível observar o circuito apresentado duplicação de período e caos, por meio da tensão no resistor e pelo atrator estranho. Ainda, comparou-se os resultados obtidos nas simulações com resultados experimentais e considerando somente o modelo exponencial do diodo na simulação. E, por fim com o intuito de comprovar o comportamento caótico é calculado o expoente de Lyapunov por meio do programa Lyapmax [7].

Na seção 2 são apresentados os conceitos básicos do circuito estudado. Na seção 3 os métodos utilizados, já na seção 4 os resultados são apresentados e por fim são apresentadas as conclusões obtidas neste trabalho.

## 2 Conceitos Preliminares

O circuito eletrônico RLD é composto somente por elementos passivos conectados em série, um resistor  $R$ , um indutor  $L$  e um diodo  $D$ , alimentados por um sinal de tensão senoidal, conforme apresentado na Figura 1. Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões ao circuito obtêm-se a equação diferencial apresentada em (1)

$$E \sin(\omega t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_D, \quad (1)$$

onde  $E$  é a tensão de entrada,  $v_D$  a tensão no diodo,  $i(t)$  a corrente do circuito,  $\omega$  é a frequência angular,  $t$  é o tempo,  $D$  é o diodo,  $L$  é a indutância e  $R$  é a resistência.

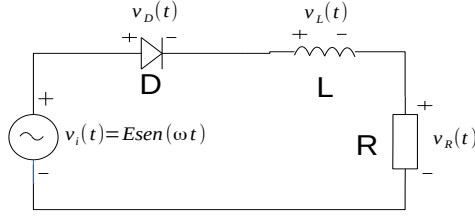


Figura 1: Circuito RLD.

### 3 Metodologia

A solução para o circuito, apresentado pela Equação (1), depende do modelo matemático adotado para o comportamento do diodo. Um dos modelos mais aceitos na literatura é o modelo exponencial. Entretanto, ele não incorpora as não linearidades do diodo [3]. Dessa forma, decidiu-se trabalhar com o modelo apresentado na Figura 2. Neste modelo inclui-se as capacitâncias internas não lineares, juntamente com a resistência não-linear, necessárias para exibir o comportamento caótico na simulação. A capacitância

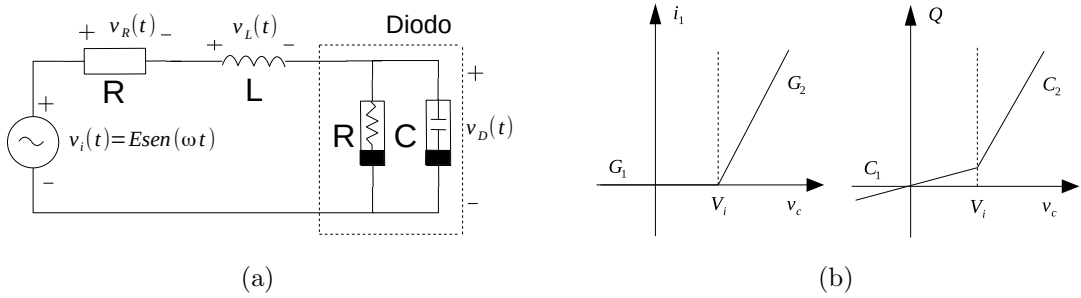


Figura 2: (a) Circuito RLD com modelo do diodo adotado incluindo as não lineares. (b) Comportamento da resistência e das capacitâncias do modelo do diodo adotado.

apresentada na Figura 2 é a soma da capacitância de junção e difusão, o comportamento da resistência linear por partes e das capacitâncias estão representados na Figura 2 (b). Para tensões maiores que a tensão de limiar, o diodo é polarizado diretamente, com capacitância  $C_2$  e consequentemente, resistência  $R_2 = 1/G_2$ , e para tensões abaixo da tensão de limiar, a capacitância é a  $C_1$  e a resistência é  $R_1 = 1/G_1$ , como  $G_1 = 0$ ,  $R_1 \rightarrow \infty$  [10].

A partir das leis de Kirchhoff para o circuito equivalente, as seguintes equações diferenciais são obtidas [2]:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{G_k}{C_k}(q - q_0) + i \quad \text{e} \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC_k}(q - q_0) - \frac{R}{L}i + \frac{E \cos \omega t - V_i}{L},$$

onde  $q$  é a carga do capacitor,  $E$  é a tensão de entrada,  $V_i$  a tensão de limiar,  $i$  a corrente do circuito,  $t$  é o tempo,  $L$  é a indutância,  $R$  é a resistência,  $G_k$  e  $C_k$  são a condutância a capacitância, respectivamente, do modelo do diodo e os índices  $k$  dependem da região de

operação 1 ou 2 conforme apresentado na Figura 2. Introduzindo o vetor  $x = (q - q_0, i)^T$ , tem-se

$$\frac{dx}{dt} = A_k x + b_k(t), \quad (2)$$

onde

$$A_k = \begin{bmatrix} -\frac{G_k}{C_k} & 1 \\ -\frac{1}{LC_k} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad \text{e}, \quad b_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E \cos \omega t - V_i}{L} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Normalmente dispositivos eletrônicos são sensíveis a alta frequência, muitos efeitos capacitivos podem ser desconsiderados em baixas frequências, pois  $X_C = 2\pi fC$  é muito grande, portanto um circuito aberto. Entretanto, em altas frequências  $X_C$  ficará pequeno devido ao valor de  $f$ , isso introduz um caminho de baixa reatância [3]. Como já foi visto o diodo é um elemento sensível as capacitâncias.

Assim, para análise do circuito implementou-se a rotina em Matlab, considerando o modelo apresentado. Nas simulações utilizou-se a tensão como parâmetro de controle e manteve-se a frequência constante em 100 KHz. Utilizou-se uma resistência de 10  $\Omega$ , uma indutância de 1 mH e os parâmetros do diodo 1N4001 para a simulação do modelo. Variou-se a amplitude da senoide de entrada em 1 V, 3 V, 6 V e 9 V.

## 4 Resultados

A Figura 3 apresenta a tensão no resistor e a Figura 4 apresenta a tensão de entrada versus a tensão de saída, ambas mantendo-se a frequência em 100 kHz e variando a tensão de entrada entre 1 a 9 V.

Para comparação dos resultados obtidos por meio do modelo apresentado, analisou-se o circuito com uma tensão de entrada de 9 V, 100 kHz de frequência,  $R = 10 \Omega$  e  $L = 1$  mH. Experimentalmente-se fez a medição utilizando um osciloscópio DSO-X, 202 A, 70 MHz. A Figura 5 (a) apresenta o resultado. Ainda para efeito de verificar a qualidade do modelo apresentado, considerou-se somente o modelo exponencial e simulou-se, o resultado pode ser visto na Figura 5 (b). Pode-se observar maior semelhança do modelo apresentado com os dados experimentais e não com o resultado obtido utilizando o modelo exponencial, comprovando a necessidade da inserção das não linearidades ao modelo.

O expoente de Lyapunov foi calculado pelo simulador Lyapmax e o resultado obtido foi de  $0,0770 \mu s/bits$ , comprovando a existência de caos no circuito.

## 5 Conclusões

Neste trabalho analisou-se o comportamento não-linear e caótico do circuito eletrônico RLD. Para tal, considerou-se como modelo do diodo a associação em paralelo entre resistências e capacitâncias não lineares, necessárias para exibir o comportamento caótico na simulação.

O modelo obtido por meio de espaço de estados para o circuito foi simulado no Matlab, utilizando-se a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle e pode-se observar as duplicações de período. Ainda pode-se verificar o sistema entrando em caos,

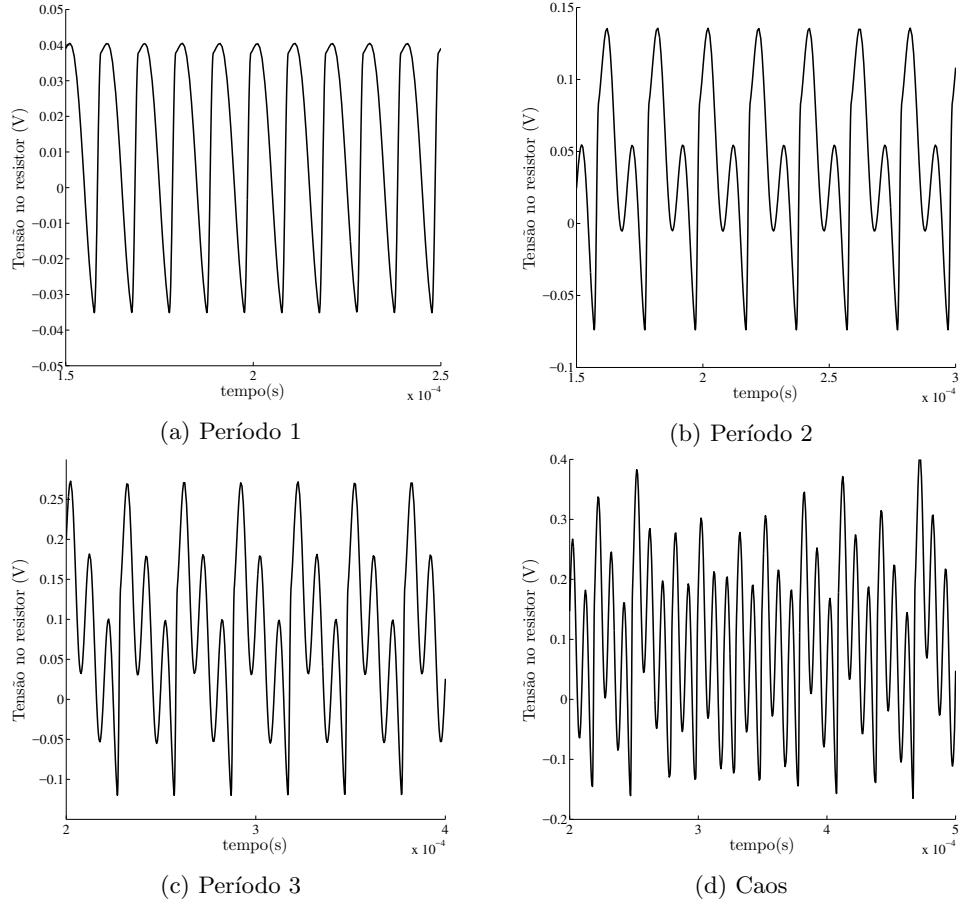


Figura 3: Análise da tensão no resistor. (a) Tensão de entrada 1 V, sistema apresenta período 1. (b) Tensão de entrada 3 V, sistema apresenta período 2, (c) Tensão de entrada 6 V, sistema apresenta período 3. (d) Tensão de entrada 9 V, sistema aparentemente em caos.

para tal constatação calculou-se o expoente de Lyapunov. E, por fim comparou-se a resposta do sistema em caos com dados experimentais e considerando-se somente o modelo exponencial para o diodo, onde se pode observar maior semelhança do modelo apresentado com os dados experimentais e não com o resultado obtido utilizando o modelo exponencial, que é um dos mais aceitos na literatura, comprovando a eficiência e a necessidade da inserção das não linearidades ao modelo do diodo.

Dessa forma, a maior contribuição deste trabalho, foi obter uma modelagem para o circuito RLD por meio de espaço de estados que correspondesse mais precisamente ao comportamento real do mesmo.

## Agradecimentos

Agradecemos à CAPES, CNPq/INERGE, FAPEMIG e à Universidade Federal de São João del-Rei pelo apoio.

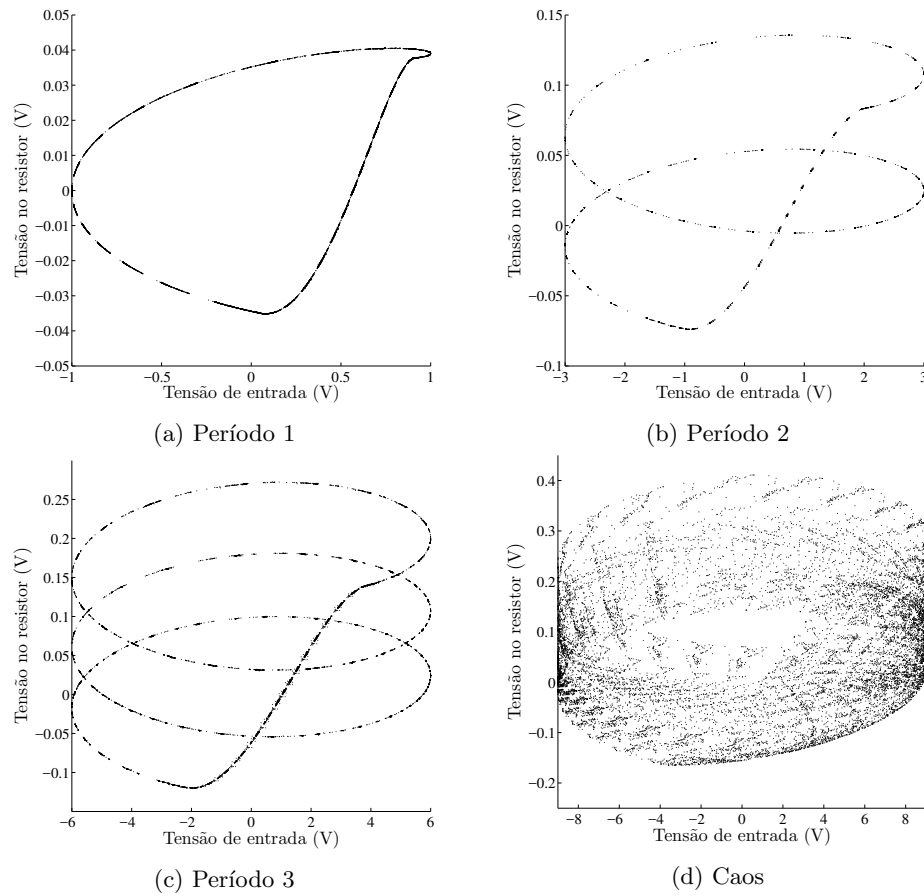


Figura 4: Análise da tensão entrada versus tensão no resistor. (a) Tensão de entrada 1 V, sistema apresenta período 1. (b) Tensão de entrada 3 V, sistema apresenta período 2, (c) Tensão de entrada 6 V, sistema apresenta período 3. (d) Tensão de entrada 9 V, sistema aparentemente em caos.

## Referências

- [1] O. Alpar. Analysis of a new simple one dimensional chaotic map. *Nonlinear Dynamics*, 78(2):771–778, (2014).
- [2] A. Azzouz and M. Hasler. Orbits of the r-l-diode circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 37(11):1330–1338, (1990).
- [3] R. Boylestad and L. Nashelsky. *Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos*. Pearson Education do Brasil, (2004).
- [4] L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, and G.-Q. Zhong. A universal circuit for studying and generating chaos. i. routes to chaos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10):732–744, (1993).
- [5] E. Fossas and G. Olivar. Study of chaos in the buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 43(1):13–25, (1996).

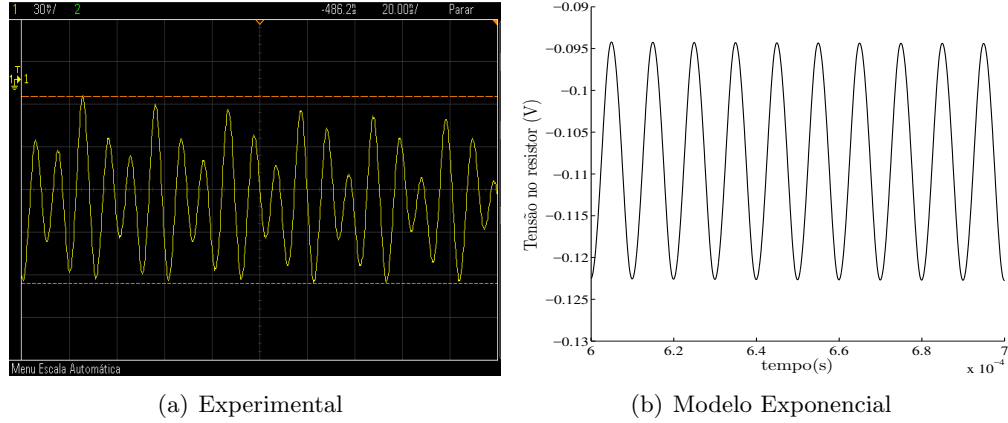


Figura 5: Análise da tensão no resistor, para tensão de entrada 9 V. (a) Dados experimentais obtidos por meio do osciloscópio, (b) simulação utilizando o modelo exponencial do diodo.

- [6] M. Halias, Z. Avgerinos, and G. Tombras. Period doubling, feigenbaum constant and time series prediction in an experimental chaotic RLD circuit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(3):1050 – 1059, (2009).
- [7] S. Kodba, M. Perc, and M. Marhl. Detecting chaos from a time series. *European Journal of Physics*, 26(1):205, (2005).
- [8] P. S. Linsay. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1349–1352, (1981).
- [9] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, (1963).
- [10] T. Matsumoto, L. O. Chua, and S. Tanaka. Simplest chaotic nonautonomous circuit. *Phys. Rev. A*, 30:1155–1157, (1984).
- [11] S. M. Potirakis, Y. Contoyiannis, F. K. Diakonou, and M. P. Halias. Intermittency-induced criticality in a resistor-inductor-diode circuit. *Phys. Rev. E*, 95:042206, (2017).
- [12] R. W. Rollins and E. R. Hunt. Exactly solvable model of a physical system exhibiting universal chaotic behavior. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1295–1298, (1982).
- [13] J. C. Sprott. A new chaotic jerk circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 58(4):240–243, (2011).
- [14] S. Tanaka, T. Matsumoto, and L. Chua. Bifurcation scenario in a driven r-l-diode circuit. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 28(3):317 – 344, (1987).
- [15] M. J. Wheatley. *Liderança e a nova ciência*. Editora Cultrix, (1996).