

CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA

21-25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS TÉRMICOS EM DUTOS DE SETORES CIRCULARES ATRAVÉS DO EMPREGO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA E DA TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Thiago Antonini Alves, thiagoaalves@utfpr.edu.br¹

Ricardo Alan Verdú Ramos, ramos@dem.feis.unesp.br²

Cassio Roberto Macedo Maia, cassio@dem.feis.unesp.br²

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR/Câmpus Ponta Grossa, PR, Brasil

² Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Unesp/Câmpus Ilha Solteira, SP, Brasil

Resumo: No presente trabalho, a transferência de calor por convecção forçada foi calculada para o escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos Newtonianos com perfil de temperatura de entrada uniforme no interior de dutos de setores circulares submetidos a condições de contorno de Dirichlet. Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação de condições de contorno em problemas com essa geometria, uma Transformação Conforme foi empregada visando efetuar uma mudança de coordenadas apropriada e, então, a equação da energia resultante foi resolvida através do emprego da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG sobre ela. O perfil da temperatura média de mistura, o desenvolvimento dos números de Nusselt local e médio e o comprimento de entrada térmica foram, então, determinados para diferentes configurações geométricas dos dutos. Estes resultados foram comparados, quando possível, com aqueles disponíveis na literatura e apresentaram uma boa concordância.

Palavras-chave: convecção forçada, Transformada Integral, Transformação Conforme, geometria de setor circular

1. INTRODUÇÃO

Uma importante linha de pesquisa científico-tecnológica é a obtenção de técnicas e procedimentos que possibilitem a interpretação mais realista possível dos fenômenos naturais, proporcionando assim, resultados precisos e confiáveis. Em particular, a solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos sempre representou um grande desafio à Engenharia Mecânica, uma vez que, as equações diferenciais fundamentais que regem os princípios de conservação, são, em via de regra, de difícil solução (MAIA, 2003). Recentemente, vários pesquisadores estão concentrando seus esforços no desenvolvimento de técnicas híbridas analítico-numéricas que garantam precisão e confiabilidade nos resultados por elas obtidos (COTTA *et al.*, 2013, 2014). Em particular, a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG (COTTA, 1998), é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser eficaz na solução de problemas de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor e Massa, os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas. A TTIG permite um tratamento analítico elegante e formal proporcionando um menor esforço numérico-computacional para a obtenção de solução de problemas (ANTONINI ALVES *et al.*, 2016).

Neste contexto, foi proposta para o presente trabalho, a composição de duas ferramentas matemáticas na obtenção de solução de uma classe de problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em geometria não-convencional (ANTONINI ALVES, 2006). Mais precisamente, foi analisado o problema térmico envolvido no escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos Newtonianos com perfil de temperatura de entrada uniforme no interior de dutos com geometria de setor circular e submetidos a condições de contorno de Dirichlet (temperatura prescrita na parede). Para facilitar a aplicação das condições de contorno, inicialmente proceder-se-á uma mudança de variáveis através de um sistema de coordenadas que seja resultado de uma Transformação Conforme (CHURCHILL, 1975). Este procedimento simplifica o tratamento dos operadores Laplacianos no novo sistema de coordenadas. Feito isso, para a obtenção do campo de temperatura no escoamento, a TTIG foi empregada sobre a equação da energia. Os parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de Nusselt local e médio, comprimento de entrada térmica foram, então, calculados para as diversas configurações da geometria analisada e, comparados, quando possível, com os disponíveis na literatura.

2. METODOLOGIA

Para a formulação matemática do problema foi considerado um escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento no interior de dutos de setores circulares, com perfil de temperatura de entrada uniforme e temperatura prescrita de parede (condição de contorno de *Dirichlet*). As propriedades dos fluidos permanecem constantes em todo o domínio e os efeitos da dissipação viscosa e da condução axial foram desprezados. Desta forma, para fluidos *Newtonianos*, a equação da energia para o sistema de coordenadas (Fig. 1a), é escrita como:

$$\rho c_p w(x,y) \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = k \nabla^2 T(x,y,z), \quad \{(x,y) \in \Omega, z > 0\}, \quad (1)$$

sendo que, ρ representa a massa específica do fluido, c_p é o calor específico a pressão constante, k é a condutividade térmica, w é a velocidade, T é a temperatura, Γ o contorno e Ω o domínio da geometria de setor circular.

As condições de entrada e de contorno são dadas por:

$$T(x,y,z) = T_0, \quad \{(x,y) \in \Omega, z = 0\}, \quad (2)$$

$$T(x,y,z) = T_p, \quad \{(x,y) \in \Gamma, z > 0\}, \quad (3)$$

sendo que, T_0 e T_p são as temperaturas de entrada e de parede

O perfil de velocidade $w(x,y)$ do escoamento no interior do duto de setor circular é obtido por meio da Técnica da Transformada Integral Generalizada, conforme apresentado em Antonini Alves *et al.* (2015).

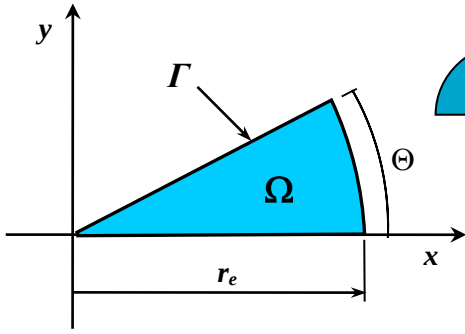


Figura 1a. Geometria proposta para o problema.

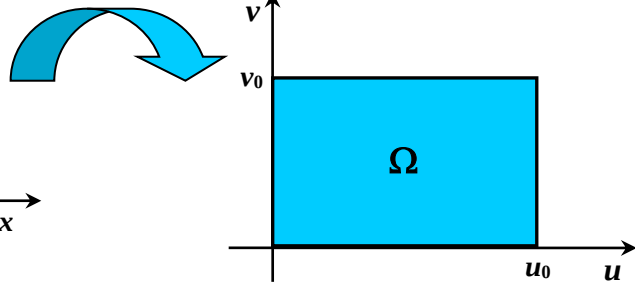


Figura 1b. Transformação do domínio no plano (x,y) para o plano (u,v).

2.1. Adimensionalização

Reescrevendo a equação da energia e as condições de contorno, Eqs. (1)-(3), na forma adimensional, tem-se, respectivamente, que:

$$W(X,Y) \frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial Y^2}, \quad (4)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 1, \quad \{(X,Y) \in \Omega, Z = 0\}, \quad (5)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, Z > 0\}, \quad (6)$$

com:

$$X = \frac{x}{D_h}, \quad Y = \frac{y}{D_h}, \quad Z = \frac{z}{D_h}, \quad D_h = \frac{4A_s}{Per}, \quad (7)$$

$$W(X,Y) = \frac{w(X,Y)}{w_{méd}}, \quad Pe = \frac{\rho c_p w_{méd} D_h}{k}, \quad (8)$$

$$\theta(X,Y,Z) = \frac{T(X,Y,Z) - T_p}{T_0 - T_p}, \quad (9)$$

sendo que, D_h representa o diâmetro hidráulico, Pe o Número de Péclet, A_s a área da seção transversal, Per o perímetro do contorno analisado e $w_{méd}$ a velocidade média do fluido.

2.2. Transformação de Coordenadas

A geometria de setor circular é proveniente da seguinte Transformação Conforme:

$$\xi = r_e e^{i\omega}, \quad (10)$$

sendo que, ξ é a variável complexa no plano z : $\xi = X + iY$ e $\bar{\omega}$ é o conjugado da variável complexa no plano transformado $\omega : \omega = u + iv$. Esta relação permite transformar o domínio do setor circular no plano (x,y) , Fig. 1(a), em um domínio retangular no plano (u,v) conforme ilustrado na Fig. 1(b).

As relações de transformação de coordenadas, os coeficientes métricos h_u e h_v e o Jacobiano $J(u,v)$ são dadas por:

$$X = r_e e^{-v} \cos(u), \quad Y = r_e e^{-v} \sin(u), \quad Z = z. \quad (11)$$

$$h_u(u,v) = h_v(u,v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2} = r_e e^{-v}, \quad (12)$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = r_e^2 e^{-2v}. \quad (13)$$

Este novo sistema de coordenadas é ortogonal. Como pode ser observado, o arco externo do setor circular é dado pela reta $v = 0$ no novo sistema de coordenadas e o arco interno pela reta $v = v_0$, com $v_0 = \ln(r_e/r_i) = \ln(r^*)$. Além disso, obtém-se a geometria de setor circular fazendo $v \rightarrow \infty$.

Com estas novas variáveis definidas, a equação da energia e as condições de entrada e de contorno, Eqs. (4)-(6), transformam-se em:

$$H(u,v) \frac{\partial \theta(u,v,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial v^2}, \quad \{(u,v) \in \Omega\}, \quad (14)$$

$$\theta(u,v,Z) = 1, \quad \{(u,v) \in \Omega, Z = 0\}, \quad (15)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{u = 0, 0 < v < v_0, Z > 0\}, \quad (16)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{0 < u < u_0, v = 0, Z > 0\}, \quad (17)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{u = u_0, 0 < v < v_0, Z > 0\}, \quad (18)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{0 < u < u_0, v = v_0, Z > 0\}, \quad (19)$$

sendo que, $H(u,v) = J(u,v) W(u,v)$.

2.3. Aplicação da TTIG

Para a solução da equação da energia no novo sistema de coordenadas, aplica-se a TTIG para proceder à remoção das derivadas parciais de segunda ordem. Para esta finalidade, o potencial $\theta(u,v,Z)$ é escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Sendo assim, é realizada a aplicação da Transformada Integral por partes. Neste sentido, inicialmente, é considerado o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0\}, \quad (20)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(u_0) = 0. \quad (21)$$

Os autovalores e as autofunções associados a este problema são dados, respectivamente, por:

$$\mu_i = \frac{i\pi}{u_0}, \quad \psi_i(u) = \sin(\mu_i u), \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (22)$$

Essas autofunções são ortogonais, o que permite o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v, Z) = \int_0^{u_0} K_i(u) \theta(u, v, Z) du, \quad \text{transformada}, \quad (23)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, Z), \quad \text{inversa}, \quad (24)$$

sendo que $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad N_i = \int_0^{u_0} \psi_i^2(u) du = \frac{u_0}{2}. \quad (25)$$

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação da energia e utilizando-se das condições de contorno e das equações que definem o problema auxiliar de autovalor, obtém-se a primeira transformação da equação diferencial:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, Z)}{\partial Z} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, Z) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, Z)}{\partial v^2}, \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (26)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) K_j(u) H(u, v) du. \quad (27)$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada v , considera-se o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\}, \quad (28)$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(v_0) = 0. \quad (29)$$

Os autovalores e as autofunções para este problema são:

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{v_0}, \quad \phi_m(v) = \sin(\lambda_m v), \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (30)$$

As autofunções acima definidas têm a propriedade de ortogonalidade que permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{im}(Z) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, Z) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (31)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \quad \text{inversa}, \quad (32)$$

sendo que, $Z_m(v)$ são as autofunções normalizadas:

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}. \quad (33)$$

Efetua-se a remoção da derivada parcial relativa a variável v através do produto interno das autofunções normalizadas $Z_m(v)$ com a equação diferencial transformada em u e fazendo uso das condições de contorno e das relações de ortogonalidade relativas ao segundo problema de autovalor. Obtém-se assim, a Transformação Integral da equação da energia, dada pela seguinte equação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d \tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (34)$$

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_j(u) K_i(u) Z_m(v) Z_n(v) H(u, v) du dv \quad (35)$$

sendo que os parâmetros B_{ijnm} são integráveis e, portanto, conhecidos.

A solução do sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias dado permite a obtenção do potencial transformado, quando submetido à condição de entrada transformada dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, 0) du dv. \quad (36)$$

O potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}(Z)$ pode ser obtido numericamente resolvendo o sistema de equações diferenciais correspondente e truncando-se a expansão para uma dada ordem M e N , de acordo com a precisão estabelecida:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0. \quad (37)$$

O potencial temperatura pode, então, ser reconstruído fazendo uso da transformada inversa, para a expansão truncada até a ordem M e N ,

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \quad (38)$$

e, finalmente, realiza-se a determinação dos parâmetros térmicos de interesse. Obviamente, quanto maior N e M maior será a precisão dos resultados.

2.4. Parâmetros Térmicos de Interesse

2.4.1. Temperatura Média de Mistura

A temperatura adimensional média de mistura é dada por:

$$\theta_{med}(Z) = \frac{1}{A_s} \int_{\Omega} \theta(X, Y, Z) W(X, Y) d\Omega. \quad (39)$$

Dessa forma, no plano (u, v) , θ_{med} é dada por:

$$\theta_{med}(Z) = \frac{1}{A_s} \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} \theta(u, v, Z) W(u, v) J(u, v) dv du. \quad (40)$$

2.4.2. Número de Nusselt Local

O número de *Nusselt* local é definido da seguinte forma:

$$Nu(Z) = -\frac{1}{4\theta_{med}(Z)} \frac{d\theta_{med}(Z)}{dZ}. \quad (41)$$

2.4.3. Número de Nusselt Médio

O número de *Nusselt* médio pode ser obtido por integração analítica dada por:

$$Nu_{med}(Z) = \frac{1}{Z} \int_0^Z Nu(Z) dZ = -\frac{1}{4Z} \ln \theta_{med}(Z). \quad (42)$$

2.4.4. Comprimento de Entrada Térmica

Segundo Shah & London (1978), o comprimento de entrada térmica é definido como sendo a posição em que o número de *Nusselt* local é 5% maior que o número de *Nusselt* na região em que o fluido está desenvolvido termicamente (número de *Nusselt* limite). Desta forma,

$$L_{th} = \text{raiz positiva de } \{1,05 Nu(\infty) - Nu(Z) = 0\}. \quad (43)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a obtenção de resultados numéricos, o Método da Quadratura de *Gauss* foi utilizado para efetuar o cálculo das integrais envolvidas nos coeficientes B_{ijnm} e nos demais parâmetros físicos de interesse. Desta forma, foi necessária, também, a determinação das autofunções e do *Jacobiano* da transformações nos pontos de quadraturas. Feito isso, o sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente para a determinação dos coeficientes do potencial transformado por meio da utilização da rotina *DIVPAG* da Biblioteca *IMSL* (1994).

Para a determinação dos coeficientes do potencial transformado, a expansão da série que representa a equação da energia, Eq. (38), foi truncada para diversas ordens M e N . Por meio de uma análise de convergência, foi verificado que $r^* = 10^{-3}$ é um excelente valor para a obtenção da geometria de setor circular. Além disso, em decorrência desta análise foi constatado que a convergência da temperatura adimensional média de mistura é mais lenta principalmente na região próxima a entrada do duto e/ou para $5^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$, sendo necessário considerar truncamentos da série com ordem superior a $M = N = 35$, para alcançar pelo menos quatro dígitos de precisão. Para a região em que $\Theta > 90^\circ$ foi observado que a série que determina o potencial temperatura converge mais rapidamente, sendo necessário a consideração de 30 termos na expansão da série em cada direção. Ressalta-se que o tempo máximo de processamento necessário para o cálculo dos parâmetros térmico de interesse é de aproximadamente 30 segundos em um microcomputador pessoal comum (processador de 3,6 GHz com 16 GB de memória RAM).

Nas Figuras 2, 3 e 4 são apresentados os resultados numéricos dos comportamentos da temperatura adimensional média de mistura e dos números de *Nusselt* local e médio, respectivamente, para diversos dutos de geometria de setor circular em função do ângulo Θ . Além disso, é apresentado na Fig. 5 e na Tab. 1, o comportamento do número de *Nusselt* limite e do comprimento de entrada térmica para o escoamento nestes dutos.

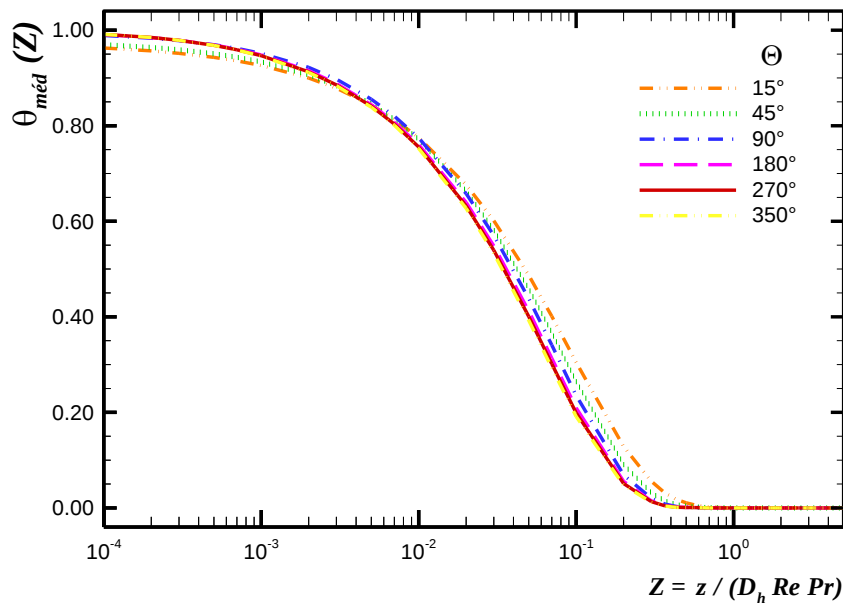


Figura 2. Temperatura adimensional média de mistura para diversas configurações dos dutos de setores circulares.

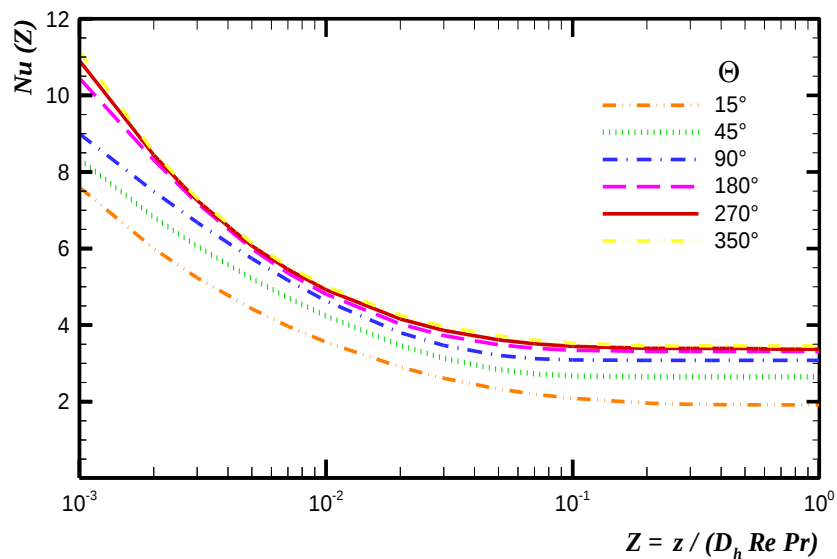


Figura 3. Número de *Nusselt* local para diversas configurações dos dutos de setores circulares.

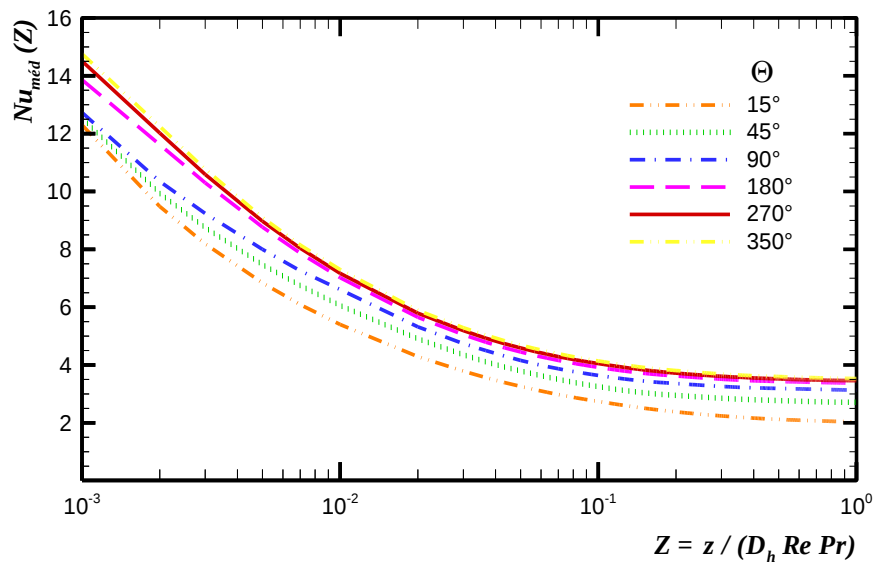


Figura 4. Número de Nusselt médio para diversas configurações dos dutos de setores circulares.

Tabela 1. Parâmetros térmicos relevantes para o escoamento em dutos de setores circulares.

Θ	Nu_∞	$Nu_{méd}$ (10^{-3})	$Nu_{méd}$ (10^{-2})	$Nu_{méd}$ (10^{-1})	$Nu_{méd}$ (10^0)	L_{th}
5°	1,451	12,07	5,25	2,49	1,61	0,3122
10°	1,703	13,64	5,97	2,86	1,88	0,1799
15°	1,916	12,26	5,39	2,73	2,02	0,1390
30°	2,365	12,29	5,72	3,03	2,43	0,0743
45°	2,646	12,46	6,01	3,24	2,70	0,0588
90°	3,078	12,63	6,55	3,63	3,13	0,0469
120°	3,200	12,94	6,76	3,77	3,26	0,0476
150°	3,270	13,21	6,89	3,86	3,33	0,0495
180°	3,313	13,47	6,97	3,92	3,37	0,0520
210°	3,343	13,62	7,05	3,97	3,41	0,0547
240°	3,367	13,77	7,10	4,01	3,43	0,0573
270°	3,390	13,89	7,14	4,05	3,46	0,0598
300°	3,414	14,01	7,20	4,08	3,48	0,0620
330°	3,439	14,11	7,24	4,12	3,51	0,0641
350°	3,457	14,17	7,26	4,14	3,53	0,0654
360°	3,466	14,19	7,28	4,16	3,54	0,0660

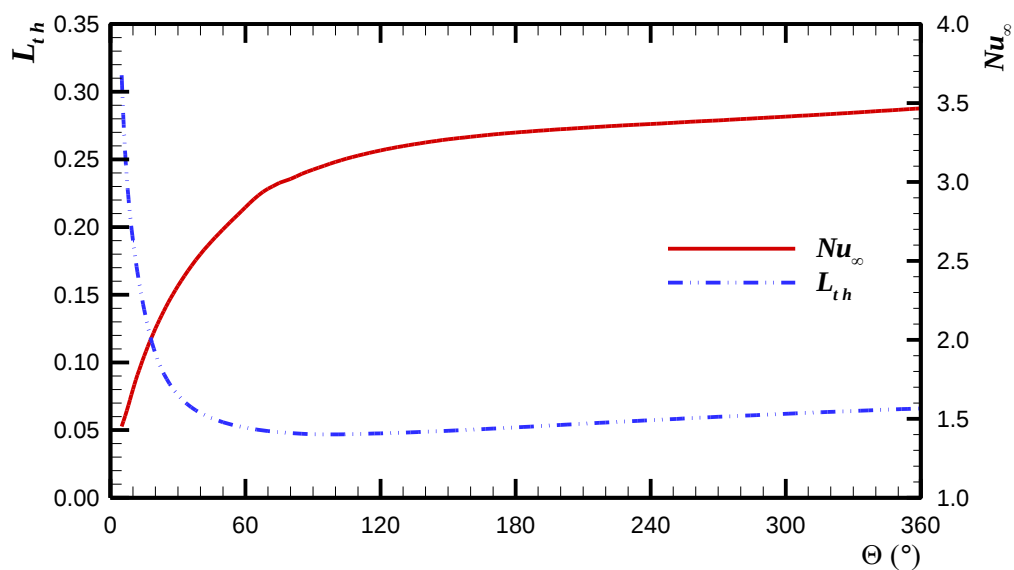


Figura 5. Número de Nusselt limite e do comprimento de entrada térmica para o escoamento em dutos de setores circulares.

Para o problema difusivo-convectivo analisado no escoamento laminar interno em dutos de setores circulares, vários trabalhos foram encontrados na literatura (TRUPP & LAU, 1984; BEN-ALI *et al.*, 1989; ETEMAD & BAKHTIARI, 1999 e LIN *et al.*, 2000) possibilitando assim, a comparação dos resultados na Tab. 2. Desta análise, foi verificado uma boa concordância entre resultados apresentados e os disponíveis na literatura, principalmente com os obtidos numericamente pelo Método de Diferenças Finitas apresentados em Trupp & Lau (1984).

Tabela 2. Comparação dos resultados obtidos com os disponíveis na literatura para o número de Nusselt limite no escoamento em dutos de setores circulares.

Θ	Presente Trabalho	Trupp & Lau (1984)	Ben-Ali <i>et al.</i> (1989)	Etemad & Bakhtiari (1999)	Lin <i>et al.</i> (2000)
5°	1,451	-	1,423	-	-
10°	1,703	1,686	1,692	-	-
15°	1,916	1,898	1,901	-	-
30°	2,365	2,342	2,341	2,266	2,383
45°	2,646	2,625	-	-	-
90°	3,079	-	3,060	3,052	-
120°	3,200	3,188	3,191	-	-
150°	3,270	-	3,268	-	-
180°	3,313	3,316	3,316	3,239	-
210°	3,343	-	3,347	-	-
240°	3,367	-	3,370	-	-
270°	3,390	-	3,389	-	-
300°	3,414	-	3,407	-	-
330°	3,439	-	3,427	-	-
350°	3,457	-	3,443	-	-

4. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi proposta a composição de duas ferramentas matemáticas, a Transformação Conforme e a Técnica da Transformada Integral Generalizada, na solução de uma classe de problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em domínios de geometrias não-convencionais. Para tal, foram analisados os parâmetros térmicos do escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos *Newtonianos* no interior de dutos de setores circulares submetidos às condições de contorno de *Dirichlet* (temperatura prescrita na parede) e perfil de temperatura de entrada uniforme.

Diante da necessidade da implantação de um sistema de coordenadas que facilitasse o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno do problema em questão, foi empregada uma Transformação Conforme capaz de gerar o domínio analisado. Este procedimento simplificou significativamente o tratamento dos operadores *Laplacianos* no novo sistema de coordenada. A Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG foi empregada na equação da energia visando a remoção das derivadas espaciais de segunda ordem, transformando assim, a equação que representa o fenômeno em um problema de estrutura mais simples, que pode ser resolvido analítica ou numericamente.

Para o problema estudado, a aplicação da TTIG gerou sistemas equações diferenciais ordinárias – EDO acoplados para o potencial transformado que foram resolvidos numericamente com a utilização da rotina *DIVPAG* da biblioteca *IMSL Fortran*. Parâmetros físicos de interesse foram, então, determinados para diversas configurações geométricas dos dutos de setores circulares. Destaca-se, que o tempo máximo de processamento gasto no cômputo dos parâmetros interesse é pequeno, cerca de 30 segundos em um computador pessoal comum (processador de 3,6 GHz com 16 GB de memória RAM).

Diante do exposto pode ser concluído que o emprego da TTIG e da Transformação Conforme foram eficientes para a obtenção de solução formal de uma classe problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em domínios de geometrias não-convencionais que, *a priori*, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

5. REFERÊNCIAS

- Antonini Alves, T., 2006, “Aplicação da Transformada Integral na Solução de uma Classe de Problemas Difusivos e Difusivo-Convectivos em Domínios de Geometria Não-Convencionais”, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira/SP, Brasil, 345p.
- Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V. & Maia, C.R.M., 2015, “Escoamento Laminar em Dutos de Setor Circular”, *Ciência & Engenharia*, Vol. 24, No. 2, pp. 65-74.
- Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V. & Maia, C.R.M., 2016, “Aplicação da Transformada Integral Generalizada e da Transformação Conforme na Solução de um Problema de Convecção Forçada Laminar em Dutos de Setor de Anel Circular”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, disponível online em 02 de março de 2016.

- Ben-Ali, T.M., Soliman, H.M. & Zariffah, E.K., 1989, "Further Results for Laminar Heat Transfer in Annular Sector and Circular Sector Ducts", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 111, pp. 1090-1093.
- Churchill, R.V., 1975, "Variáveis Complexas e Suas Aplicações", McGraw-Hill, São Paulo.
- Cotta, R.M., 1998, "The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering", Begell House Inc., New York.
- Cotta, R.M., Knupp, D.C., Navieira-Cotta, C.P., Sphaier, L.A. & Quaresma, J.N.N., 2013, "Unified Integral Transforms Algorithm for Solving Multidimensional Nonlinear Convection-Diffusion Problems", *Numerical Heat Transfer, Part A, Applications*, Vol. 63, pp. 840-866.
- Cotta, R.M., Knupp, D.C., Navieira-Cotta, C.P., Sphaier, L.A. & Quaresma, J.N.N., 2014, "The Unified Integral Transforms (UNIT) Algorithm with Total and Partial Transformation", *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, Vol. 6, pp. 507-524.
- Etemad, S.G. & Bakhtiari, F., 1999, "General Equations for Fully Developed Fluid Flow and Heat Transfer Characteristics in Complex Geometries", *International Communication of Heat and Mass Transfer*, Vol. 26, No. 2, pp. 229-238.
- IMSL Library, 1994, Edition 7, "GNB Building", 7500 Ballaire Blod, Houston, Texas 77036.
- Lin, M.J., Wang, Q.W. & Tao, W.Q., 2000, "Developing Laminar Flow and Heat Transfer in Annular-Sector Ducts", *Heat Transfer Engineering*, Vol. 21, pp. 53-61.
- Maia, C.R.M., 2003, "Solução de Problemas Difusivos e Difusivo-convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada", Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 251p.
- Maia, C.R.M., Ramos, R.A.V., Pelegrini, M.F. & Antonini Alves, T., 2005, "Heat Transfer Study in Slug Flow on Elliptical Ducts Cross Section by Generalized Integral Transform Technique", *Engenharia Térmica*, Vol. 4, No. 2, pp. 154-163.
- Shah, R.K. & London, A.L., 1978, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts. Advances in Heat Transfer", Supplement 1, Academic Press Inc., New York, 477 p.
- Trupp, A.C. & Lau, A.C.Y., 1984, "Fully Developed Laminar Heat Transfer in Circular Sector Ducts with Isothermal Walls", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 467-469.

6. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

SOLUTION OF THERMAL PROBLEMS INSIDE CIRCULAR SECTOR DUCTS WITH APPLICATION OF GENERALIZED INTEGRAL AND CONFORMAL TRANSFORMS

Thiago Antonini Alves, thiagooalves@utfpr.edu.br¹
Ricardo Alan Verdú Ramos, ramos@dem.feis.unesp.br²
Cassio Roberto Macedo Maia, cassio@dem.feis.unesp.br²

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR/Câmpus Ponta Grossa, PR, Brasil

² Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Unesp/Câmpus Ilha Solteira, SP, Brasil

Abstract. In this work, the forced convection heat transfer was calculated for hydrodynamically fully developed and thermally non-developed Newtonian laminar flow with uniform temperature entrance profile inside circular sector ducts under Dirichlet boundary conditions. In order to facilitate the analytical treatment and the application of the boundary conditions, a Conformal Transform was employed to change the domain into a more suitable coordinate system. Thereafter, Generalized Integral Transform Technique – GITT was applied on the energy equation to obtain the temperature field. Numerical results were obtained for bulk mean temperature, local and average Nusselt number, and thermal entry length considering several geometric configurations. These results were compared, as much as possible, to those available in the literature and they presented a good agreement.

Keywords: forced convection, Integral Transform, Conform Transform, geometry of circular sector