

CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA

21 - 25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON APLICADA A UM PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR UTILIZANDO O SOFTWARE FENICS

João de Sousa Bomfim Neto, joaodesousa1@gmail.com¹

Luana Sousa Silva, luusousa17@gmail.com¹

Maurício Soares de Almeida, mauricio.almeida@fisica.ufc.br¹

Francisco de Assis Leandro Filho, leandrofilho@unifor.br¹

Bruno Aragão Martins de Araújo, brunoaragao84@hotmail.com¹

Rodrigo Alves Patrício, rodrigo.patricio@unifor.br¹

Jorge André Costa dos Santos, jorgeandre@unifor.br¹

¹Universidade de Fortaleza - UNIFOR, leandrofilho@unifor.br

Resumo: A equação de Poisson é muito utilizada em problemas de engenharia, desde a transferência de calor até a torção de barras retangulares. Existem uma vasta quantidade de métodos numéricos para a implementação computacional desse tipo de problema. O Método dos Elementos Finitos é um dos principais, devido a sua eficiência e estabilidade até em superfícies irregulares. O presente trabalho mostra a solução de equações diferenciais parciais através do Método dos Elementos Finitos utilizando o software livre FEniCS. Para tanto, foi analisado um problema de valor inicial referente a propagação de calor em um domínio retangular. A malha foi criada pelo próprio software e a para a visualização dos resultados utilizou-se o ParaView. A parte temporal da equação foi implementada de duas maneiras: utilizando o Método das Diferenças Finitas e utilizando o Método de Newmark. Os resultados obtidos foram analisados e comparados com a solução analítica do problema. O código foi implementado em linguagem Python e os métodos descritos são gerais o suficiente para lidar com problemas tridimensionais.

Palavras-chave: Transferência de Calor, FENICS, Equação de Poisson.

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em um método numérico aproximado para análise de diversos fenômenos físicos que ocorrem em meios contínuos, e que são descritos através de equações diferenciais parciais, com determinadas condições de contorno (Problemas de Valor de Contorno), e possivelmente com condições iniciais (para problemas variáveis no tempo). O MEF é bastante genérico, e pode ser aplicado na solução de inúmeros problemas da engenharia.

A ideia principal do Método dos Elementos Finitos consiste em se dividir o domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões de geometria simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.). Esta ideia é bastante utilizada na engenharia, onde usualmente tenta-se resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples. Logo, trata-se de um procedimento intuitivo para os engenheiros (LEWIS, 2004).

Devido ao fato das sub-regiões apresentarem dimensões finitas, estas sub-regiões são chamadas “elementos finitos”, em contraste com os elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial e integral. Advém daí, o nome “Método dos Elementos Finitos” (PATANKAR, 1980).

O número de áreas de aplicação para o MEF tem crescido de forma considerável recentemente. Dentre os inúmeros campos de aplicação possíveis, podem se citar: Construção Civil, Indústria Automobilística, Naval, Aeronáutica e Aeroespacial, Exploração de Petróleo, Setor Energético, Meio ambiente, Recursos Hídricos, etc.

O problema de condução de calor é estudado nesse trabalho como campo de aplicação do MEF. Escolheu-se este problema pela fácil interpretação física das equações, e da sua relevância prática para diversos setores da engenharia.

1.1. Mecanismos de Transferência de Calor

São três os mecanismos de transferência de calor: Condução, governada pela Lei de Fourier e largamente aplicada no estudo de propagação de calor em sólidos; Convecção, que é a soma dos efeitos de transferência de calor devido à agitação de partículas fluidas mais o movimento aleatório das mesmas (advecção) e é formulada matematicamente pela

Lei do Resfriamento de Newton e por último a Radiação, que não necessita de um meio para se propagar, apenas relacionando-se com as características do corpo que a absorve (um bom absorvedor de radiação térmica é denominado corpo negro) (VESTTEG; MALALASEKERA, 2007).

Neste trabalho será dada ênfase à Condução, e conseqüentemente à Lei de Fourier, porém de uma forma mais completa, de forma a desenvolver a distribuição de temperaturas em um meio, gerando assim uma equação geral, denominada *Equação da Difusão do Calor*.

1.2. Lei de Fourier

A Lei de Fourier foi desenvolvida, assim como varias outras equações físicas, a partir do método experimental. A seguir, será ilustrado como se chegou ao resultado da equação:

Observando a figura, nota-se que $T_1 > T_2$, logo o gradiente de temperatura ∇T aponta para a esquerda.

O Fluxo de Calor q têm a direção da maior temperatura para a menor, logo têm direção contrária ao gradiente como pode ser visto na Fig. 1 de temperatura, mas cresce com o aumento do seu módulo.

Se aumentarmos a área cujo calor está atacando, maior será a absorção de calor por parte do corpo, logo maior será o fluxo q .

O Fluxo têm um decréscimo ao chegar no final corpo se a espessura L aumentar.

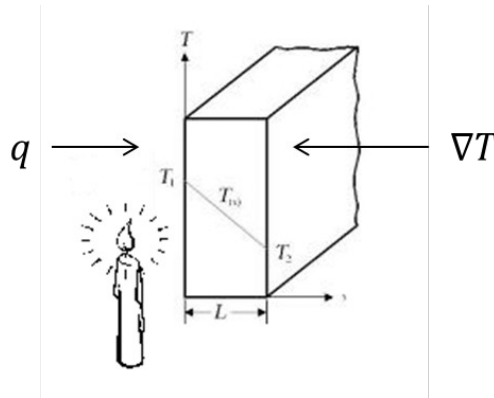


Figura 1: Ilustração do experimento de Fourier.

A Equação é formulada então:

$$q \propto A \times \frac{-\Delta T}{\Delta L} \quad (1)$$

Para se obter uma igualdade, é necessária a inserção de uma constante de proporcionalidade:

$$q = k \times A \times -\frac{\Delta T}{\Delta L} \quad (2)$$

Onde k é a *condutividade térmica*, e está associada ao tipo de material que sofre transferência de calor. (HOLMAN, 1986). Diferencialmente, e adotando a direção de L a mesma do eixo x :

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial L} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

Que é a Lei de Fourier unidirecional. (HOLMAN, 1986). Caso seja analisada no espaço tridimensional, e com a inserção de vetores unitários:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j + \frac{\partial T}{\partial z} k \right) = -kA \nabla T \quad (4)$$

* Considerando que a condutividade térmica k é uma só nas três direções no corpo. Caso não seja, deve ser considerada uma condutividade em cada orientação espacial: k_x, k_y, k_z .

Em termos do fluxo:

$$q'' = \frac{q}{A} = -k \nabla T \quad (5)$$

1.3. Primeira Lei da Termodinâmica

Para seguir adiante, é necessária a adaptação da primeira lei da termodinâmica ao sistema de transferência de calor em estudo. (VESTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Seja a Primeira Lei da Termodinâmica:

$$\Delta U = Q + W \quad (6)$$

Onde:

ΔU : Variação da energia interna do volume de controle;

Q : Calor aplicado sobre o volume;

W : Trabalho exercido pelo sistema.

De forma a trabalhar com taxas de energia num volume de controle, será admitido que:

- A variação da energia interna seja a diferença entre a uma taxa de energia acumulada E_{ac} , que pode ser positiva ou negativa, dependendo da entrada e saída de energia no sistema, e uma taxa de energia E_g , gerada no interior do volume de controle;
- O calor adicionado ao sistema será igual a uma taxa de energia E_e positiva, pois entra no sistema e,
- O trabalho que é a energia de saída será igual a uma taxa de energia E_s , negativa, pois sai do sistema.

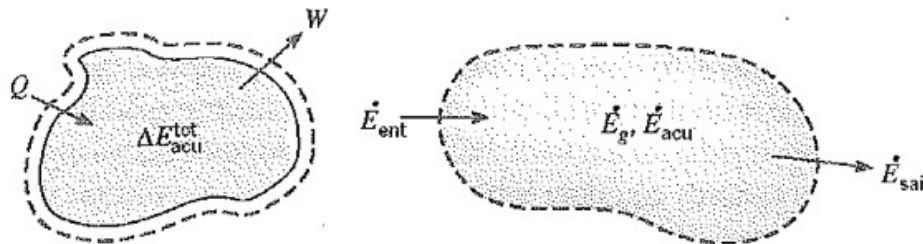


Figura 2: Formulação da 1ª Lei da Termodinâmica aplicada a um volume de controle (Balanço de Energia).

Logo:

$$E_e - E_s = E_{ac} - E_g \quad (7)$$

Organizando:

$$E_e + E_g - E_s = E_{ac} \quad (8)$$

Que é a primeira lei aplicada a um volume de controle.

1.4. Equação do calor

Finalmente será demonstrado como é montada a equação do calor, tendo como base um volume de controle diferencial e infinitesimalmente pequeno sujeito a condução. Não serão considerados efeitos convectivos, apenas condutivos. Posteriormente, após feita a análise de tráfego de taxas de condução através de um volume de controle, será aplicada a primeira lei da termodinâmica ao volume, definida acima, mais comumente chamada de “Balanço de Energia” em problemas de transferência de calor (VESTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Seja um volume nas seguintes condições:

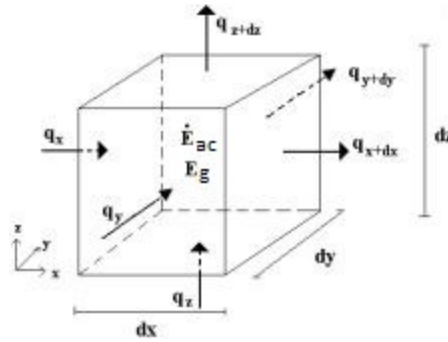


Figura 3: Volume de Controle Sofrendo Transferência de Calor Multidirecional.

Analisemos as taxas de calor nas três direções cartesianas (PATANKAR, 1980):

A potência térmica de entrada no volume de controle será dada por:

$$q_x \cdot q_y \cdot q_z \quad (9)$$

Agora vejamos a potência térmica ou taxa de condução que sai do volume no eixo x . Esta é dada pela taxa inicial de entrada mais um incremento dx . A parte incremental pode ser escrita como:

$$q_{dx} = \frac{\Delta q_x}{\Delta x} dx \quad (10)$$

Ou seja, é a variação da condução em cada unidade de comprimento ao longo da espessura, multiplicado pelo incremento. A taxa de saída da condução é então:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\Delta q_x}{\Delta x} dx = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (11)$$

A relação acima é facilmente verificada através de uma expansão em Série de Taylor.

De forma análoga, a taxa de saída na direção dos outros eixos cartesianos é:

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (12)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (13)$$

Foi definida taxa de entrada e saída de condução. O próximo passo é definir a geração de energia dentro do volume de controle e posteriormente, o acúmulo no decorrer do tempo.

A geração de energia para o elemento confinado pela fronteira controlada é função da potência térmica e do volume em questão. Podemos então escrevê-la da seguinte forma:

$$E_g = qdV = qdx dy dz \quad (14)$$

Onde q é a taxa volumétrica de calor (W/m^3).

A potência térmica acumulada é função além de volume e calor, da massa que remete ao volume de controle, do calor específico à pressão constante (consideramos que ao sofrer aplicação de calor, o volume em questão têm dilatação positiva), de uma diferença de temperatura e, é claro, do tempo (PATANKAR, 1980). Escrevamos então matematicamente:

$$E_{ac} = \frac{\Delta m}{\Delta V} c_p \frac{\Delta T}{\Delta t} dV \quad (15)$$

Diferencialmente e fazendo $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$:

$$E_{ac} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (16)$$

Aplicando os conceitos acima descritos e reescrevendo (8), temos:

$$q_x + q_y + q_z + q dx dy dz - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (17)$$

Realizando as adições de entrada e saída:

$$q dx dy dz - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (18)$$

Recordemos agora da lei de Fourier. Observando cada área onde ocorrer incidência do fluxo de calor no cubo que ilustra o volume de controle, temos o que se segue:

$$q_x = -k_x dA \frac{\partial T}{\partial x} = -k_x dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (19)$$

Analogamente:

$$q_y = -k_y dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (20)$$

$$q_z = -k_z dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (21)$$

Inserindo as três equações acima definidas em (17), temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (22)$$

Que é a *Equação do Calor*, como queríamos demonstrar.

A equação acima está em na forma cartesiana. É possível adaptá-la para corpos cilíndricos e esféricos, com as devidas conversões de coordenadas retangulares para cilíndricas e esféricas.

Caso a condutividade térmica k seja uma só ao longo do volume, podemos ainda simplificar:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

Onde $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ é a *difusividade térmica* do corpo.

No caso de não haver geração de energia interna, e o processo de transferência de calor se encontrar em regime permanente, e equação do calor se reduz a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (24)$$

Ou simplesmente:

$$\nabla^2 T = \Delta T = 0 \quad (25)$$

Onde o operador Δ para este caso (∇^2) é chamado Laplaciano, sendo assim $\Delta T = 0$ chamada *Equação de Laplace* aplicada a um campo de temperatura.

1.4.1. A equação do calor bidimensional

Foi estudado a distribuição de temperatura em uma placa retangular delgada, homogênea e isotrópica de dimensões 80 cm x 60 cm, na ausência de fontes de calor (Fig. 4).

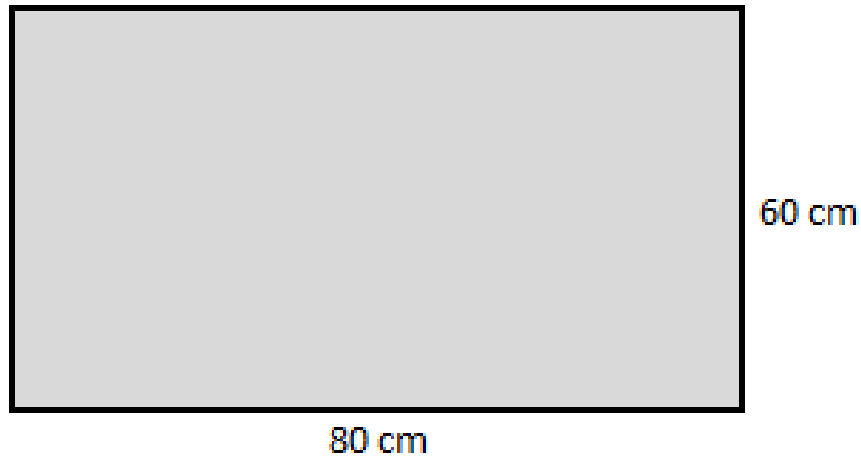


Figura 4: Ilustração da placa retangular a ser simulada.

O problema foi descrito matematicamente da seguinte forma (LEWIS, 2004)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \quad (26)$$

onde $u(x, y, t)$ é a temperatura e f o termo fonte. Adotou-se as condições iniciais

$$u(x, 0) = u(x, 60) = u(80, y) = u(0, y) = 100 \quad (27)$$

A discretização do tempo pode ser feita utilizando o método de Euler regressivo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n) \approx \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \quad (28)$$

$$u(t^n) \approx u^n \quad (29)$$

$$f^n \approx f(u^n) \quad (30)$$

Sendo assim, a semi-discretização da equação do calor fica da seguinte forma

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = \Delta u^n + f^n \quad (31)$$

ou ainda

$$u^n - \Delta t \Delta u^n = u^{n-1} + \Delta t f^n \quad (32)$$

Multiplicando essa equação pela função de teste v e realizando integração por partes, chega-se a forma fraca do problema

$$\int_{\Omega} (u^n + \Delta t \nabla u^n \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} (u^{n-1} + \Delta t f^n) v dx \quad (33)$$

Em termos das formas linear e bilinear, temos

$$a(u^n, v) = L^n(v) \quad (34)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (uv + \Delta t \nabla u \cdot \nabla v) dx \quad (35)$$

$$L^n(v) = \int_{\Omega} (u^{n-1} v + \Delta t f^n v) dx \quad (36)$$

Note que a forma bilinear é constante no tempo enquanto a forma linear possui dependência temporal.

2. RESULTADOS

A seguir está a implementação do problema em linguagem de programação Python

```
from dolfin import *

# Importa malha
mesh = Mesh("malha.xml.gz")
V = FunctionSpace(mesh, "Lagrange", 1)

# Define o dominio
def left(x):
    return near(x[0], 0)
def right(x):
    return near(x[0], 80)
def top(x):
    return near(x[1], 60)
def bottom(x):
    return near(x[1], 0)

# Parametros da simulacao
T = 1000
dt = 0.5
t = 0

# Condições de contorno de Dirichlet
u0 = interpolate(Constant(0.0), V)
u1 = Constant(100.0)
u2 = Constant(0.0)
u3 = Constant(0.0)
u4 = Constant(0.0)
bc1 = DirichletBC(V, u1, left)
bc2 = DirichletBC(V, u2, right)
bc3 = DirichletBC(V, u3, top)
bc4 = DirichletBC(V, u4, bottom)
bcs = [bc1, bc2, bc3, bc4]

# Define problema variacional
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f = Constant(0.0)

a = u*v*dx + dt*inner(grad(u), grad(v))*dx
L = u0*v*dx + dt*f*v*dx
A = assemble(a)

# Calcula solucao
u = Function(V)

# Salva solucao no formato VTK
file = File("solucao2/xdmf.pvd")
while t <= T:
    b = assemble(L)
    [bc.apply(A, b) for bc in bcs]
    solve(A, u.vector(), b)
    print "Time: ", t
    t = t + dt
    u0.assign(u)
    file << u

# Plota solucao
plot(u, interactive=True)
```

Figura 5: Implementação Computacional do Problema em Python.

Malhas com geometria simples, como a presente neste trabalho, podem ser criadas no próprio FEniCS; no caso contrário é possível importar malhas geradas por outros softwares como GMSH, Gambit, etc, fazendo apenas uma conversão no tipo de arquivo de .msh para .xml.

A figura a seguir mostra a distribuição de temperatura ao longo da placa para o instante de tempo $t = 200 \text{ s}$.

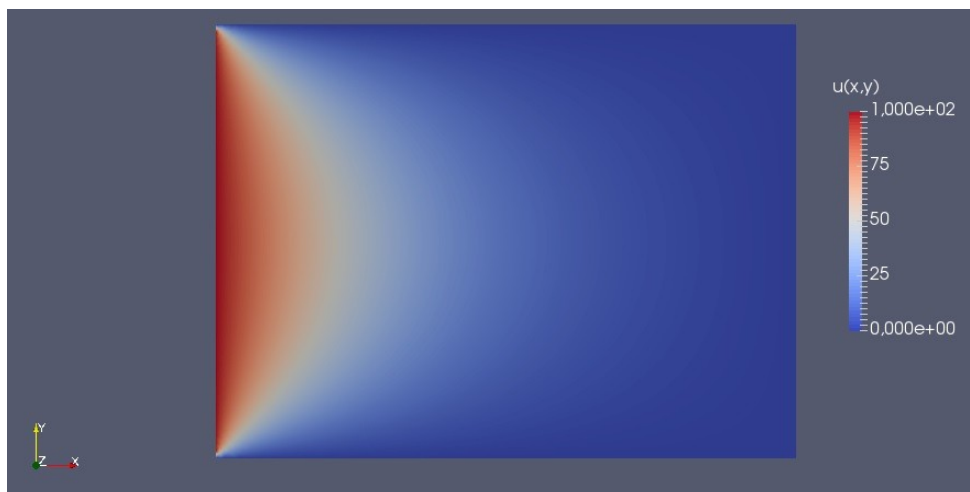


Figura 6: Distribuição de Temperatura (K) ao longo da placa retangular simulada pelo software FENICS.

Como é possível observar, haverá uma propagação de calor da esquerda para direita e as temperaturas de maior valor estarão presentes no centro da placa.

Os resultados apresentam conformidade com os resultados analíticos encontrados na literatura.

3. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo numérico para ser aplicado a um problema de transferência de calor. O modelo matemático foi baseado na equação de Poisson. O problema direto foi resolvido a partir de uma malha regular por meio do Método de Elementos Finitos.

Comparando os valores obtidos pelo método analítico e numérico, conclui-se que os resultados foram satisfatórios.

4. AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade de Fortaleza (UNIFOR) e aos organizadores do evento pela oportunidade de participação no CONEM 2016.

5. REFERÊNCIAS

- Holman J. P., Heat Transfer. 6a Edição. McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
Lewis R.W., Nithiarasu P. e Seetharamu, K. N. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow. John Wiley and Sons, 2004
Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow (Taylor & Francis, Boca Raton, 1980) 1ª ed.
Versteeg, H.K. e Malalasekera, W., An Introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method (Editora Pearson, London, 2007), 2ª ed.

6. RESPONSABILIDADE AUTURAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

SOLUTION OF POISSON EQUATION APPLIED TO HEAT TRANSFER PROBLEM USING SOFTWARE FENICS

João de Sousa Bomfim Neto, joaodesousa1@gmail.com¹

Luana Sousa Silva, luusousa17@gmail.com¹

Maurício Soares de Almeida, mauricio.almeida@fisica.ufc.br¹

Francisco de Assis Leandro Filho, leandrofilho@unifor.br¹

Bruno Aragão Martins de Araújo, brunoaragao84@hotmail.com¹

Rodrigo Alves Patrício, rodrigo.patricio@unifor.br¹

Jorge André Costa dos Santos, jorgeandre@unifor.br¹

¹Universidade de Fortaleza - UNIFOR, leandrofilho@unifor.br

Abstract. Poisson's equation is widely used in engineering problems, since the heat transfer to the torsional rectangular bar. There are a vast amount of numerical methods for computational implementation of this problem. The Finite Element Method is one of the main, because of its efficiency and stability even on uneven surfaces. This study shows the solution of partial differential equations by the Finite Element Method using free software FEniCS. Therefore, it was considered an initial value problem related to heat propagation in a rectangular area. The network was set up by the software and for viewing the results used the ParaView. The temporal part of the equation is implemented in two ways: using the Finite Difference Method and Newmark using the method. The results were analyzed and compared with analytical solution of the problem. The code was implemented in Python and the methods described are general enough to handle three-dimensional problems.

Keywords: Heat Transfer, FENICS, Poisson's equation.