

CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA

21 - 25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS COM ENRIQUECIMENTO DE INTERFACE

Gelson de Sousa Alves, gelsondsalves@gmail.com¹

Francisco Evangelista Junior, fejr.unb@gmail.com¹

José Fabiano Araújo Moreira, jf_moreira1991@hotmail.com¹

¹Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Edifício SG-12, Campus Darcy Ribeiro, Brasília – DF, Brasil.

Resumo: Este artigo tem o objetivo de implementar formulações não convencionais do método dos elementos finitos (MEF) aplicado a análise estrutural em regime elástico linear, especificamente, ao método dos elementos finitos generalizados (MEFG). Funções de enriquecimento, como as funções polinomiais e de interface, foram implementadas a fim de melhorar a aproximação dos problemas de valor de contorno com soluções suaves e descontínuas devido a diferentes interfaces de materiais. Uma técnica foi formulada e implementada levando em consideração a interface do material em compósitos sem a correspondência da malha de elementos finitos com o contorno dos diferentes materiais nos membros estruturais como em vigas laminadas. Assim, os resultados foram comparados com soluções analíticas e soluções pelo MEF, mostrando a eficiência do modelo proposto. A estratégia demonstrou potencial para resolver problemas com gradiente descontínuo causado pela interface material.

Palavras-chave: MEF, MEFG, Materiais Compósitos, Interface

1. INTRODUÇÃO

O surgimento de formulações com abordagens mais flexíveis para se conseguir uma modelagem de materiais e estruturas mais complexas é de grande importância para as indústrias de vários segmentos como o automobilístico, aeronáutico, aeroespacial, da construção civil, do petróleo. Essas indústrias exigem cada vez mais projetos audaciosos com grandes dimensões e elevado grau de complexidade nos materiais desenvolvidos e empregados.

Métodos não convencionais vêm ganhando importância e sendo cada vez mais difundidos para resolução de problemas específicos e complexos da mecânica computacional. Dentre esses métodos destaca-se o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que oferece condições bastante favoráveis às limitações encontradas nos métodos convencionais como o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEFG é uma combinação entre as funções de interpolação do MEF, com conceitos e técnicas dos métodos sem malha na utilização de funções enriquecedoras definido nos nós (Babuška *et al.*, 1994). O MEFG trabalha com diversas famílias de funções de enriquecimento, citando-se: os enriquecimentos polinomiais e de interface utilizados nesse trabalho que visam melhorar a qualidade da aproximação e flexibilizar os aspectos de modelagem.

Entre materiais compósitos, por exemplo, que são formados por duas ou mais fases com diferentes propriedades mecânicas, a modelagem pelo MEFG pode possibilitar que a malha gerada não esteja em conformidade com a interface física entre materiais, como acontece na modelagem no MEF, onde é necessário que a malha adeque aos contornos das diversas fases do material aumentando demasiadamente os custos computacionais de modelagem. O MEFG possibilita a modelagem e simulação de problemas com geometrias complexas, com um menor custo computacional.

Mões *et al.* (2003) implementaram para problemas de interface material, funções de enriquecimento que caracterizem essa interface sobre as funções Partição da Unidade (PU) chamada *level – set*, de forma que a malha de elementos finitos utilizada não precise estar em conformidade com a superfície material. Além disso, como em todos os enriquecimentos do MEFG, a aplicação das condições de contorno essenciais necessita de um tratamento especial nos nós enriquecidos.

Simone *et al.* (2006) formularam o MEFG para utilização em análises envolvendo policristais com contorno de grãos. A abordagem utiliza funções descontínuas no campo dos deslocamentos para simular a interface e não funções de

gradiente descontínuo que é a característica da interface e também necessita de um tratamento especial na aplicação das condições de contorno essenciais.

Soghrati *et al.* (2012) e Soghrati e Geubelle (2012), apresentaram um método para resolver problemas com campos de gradiente descontínuo, envolvendo problemas de transferência de calor para análise em domínios bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. O método foi chamado Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento de Interface (MEFGI). As funções de enriquecimento são criadas a partir de nós na intersecção da interface de fase com as arestas do elemento. Os autores abordaram várias vantagens desse método em comparação com o MEFG convencional, entre elas a fácil implementação e o manuseio simples das condições de contorno essenciais.

Plews *et al.* (2012) utilizaram uma estratégia global local para resolver problemas de gradientes de temperatura, onde funções de enriquecimentos são construídas no domínio local para serem aplicadas no domínio global. Plews e Duarte (2015) aplicaram essa estratégia global local em um problema com múltiplas escalas locais para um único problema global, resolvendo os problemas locais em processamento paralelo para construção das funções de enriquecimento, para resolver problemas de transferência de calor.

No presente trabalho estudam-se a formulação e implementação do método dos elementos finitos generalizados adicionando funções de enriquecimento polinomiais e de interface para a análise de estruturas em regime elástico linear. Valida uma técnica eficiente para a simulação de interface entre materiais, de modo a flexibilizar a geração de malhas para análises de materiais compósitos.

2. FORMULAÇÃO DO MEFG

O MEFG utiliza a estrutura do MEF e os conceitos dos métodos sem malha. Esta seção faz-se uma abordagem geral do MEFG. Na sequência é descrito uma formulação do MEFG que se aplica para o estudo da interface entre materiais com as respectivas funções de enriquecimento mais conhecido como MEFGI.

2.1. Aproximação no MEFG

O MEFG foi proposto a partir dos trabalhos de Babuška *et al.* (1994), Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997) com as denominações: Método dos Elementos Finitos Especiais; e Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade. Uma estratégia similar foi também proposta por Duarte e Oden (1995), Duarte e Oden (1996) e Oden *et al.* (1998), com as denominações Nuvens *hp* e Método dos Elementos Finitos baseado nas Nuvens *hp*. Outra abordagem foi proposta por Belytschko e Black (1999) e Mões *et al.* (1999) como denominação de Método dos Elementos Finitos Estendido.

O MEFG abrange o conceito de nuvens de influência (suporte) entre os elementos, no qual se utiliza uma malha de elementos finitos para o posicionamento dos nós e as nuvens de influência ω_j são formadas pelo conjunto de elementos finitos que compartilham o mesmo nó x_j , similarmente como ocorre no método das nuvens *hp* de Duarte e Oden (1996). Para cada nuvem, a PU fica determinada pelo conjunto das funções de forma dos elementos finitos que compartilham o nó base e devem respeitar as mesmas propriedades que são estabelecidas pelo MEF para se formar a PU. Maiores detalhes sobre as propriedades da PU podem ser encontrados em (Bathe, 1996; Reddy, 2006 e Zienkiewicz *et al.* 2005).

Para obtenção de uma melhor qualidade nas aproximações, amplia-se o espaço da aproximação multiplicando as funções PU já estabelecidas, por funções de aproximação local, conhecidas como funções de enriquecimento como apresentados na Eq. (1):

$$\mathfrak{Z}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq}(x)\} \text{ com } L_{j1}(x) = 1 \quad (1)$$

em que L_{ji} são as funções de enriquecimento definidas em cada nó x_j da nuvem ω_j . O produto entre a PU pelas funções da Eq. (1) resulta nas funções de forma do MEFG, representado na Eq. (2):

$$\{\phi_{ji}(x)\}_{i=1}^q = N_j(x) \cdot \{L_{ji}(x)\} \quad (2)$$

em que N_j são as funções PU também conhecido como funções de interpolação ou funções de forma e ϕ_{ji} são as funções de forma do MEFG.

Na Figura 1, pode ser visualizado uma representação para a construção da função de forma do MEFG mostrado pela Eq. (2). Na parte superior da Fig. 1 são representadas as funções PU (N_j) de uma determinada nuvem de elementos. Essas funções são as funções de forma tradicionais do MEF. Na parte central, encontram-se as funções de enriquecimento (L_{ji}) para caracterização do problema local sendo definidas a partir de um conhecimento *a priori* do comportamento da solução. Na parte inferior, mostra-se a função de forma do MEFG (ϕ_{ji}) resultado do produto entre a PU e a função de enriquecimento, essas funções possuem características locais em decorrência das características da função de enriquecimento escolhida e herdam o suporte compacto da PU, ou seja, as funções de forma valem zero fora dos elementos que contém o seu nó associado (Strouboulis *et al.*, 2000).

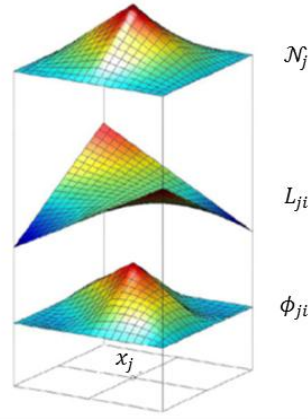


Figura 1. Construção das funções de forma do MEFG (Evangelista Jr. *et al.*, 2013).

Segundo Duarte *et al.* (2006), as funções de enriquecimento polinomiais podem ser representadas de acordo com o domínio dimensional do problema. O enriquecimento é estabelecido de forma hierárquica, obedecendo ao triângulo ou pirâmide de Pascal.

À medida que se aumenta a ordem polinomial do enriquecimento melhora-se a qualidade da solução e, conseqüentemente, aumenta-se o número de graus de liberdade em cada direção à medida que monômios representados na pirâmide de pascal são adicionados.

2.2. Aproximação no MEFGI

O Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento de Interface (MEFGI) utiliza uma estratégia similar ao MEFG convencional visto anteriormente, a diferença crucial entre ambos está na escolha das funções de enriquecimento. No MEFG convencional se escolhem as funções a partir de um conhecimento inicial do comportamento da solução e no MEFGI as funções de enriquecimentos são escolhidas a partir das funções de forma do próprio domínio. A Figura 2 melhor se compreende essa definição do MEFGI num domínio com dois materiais.

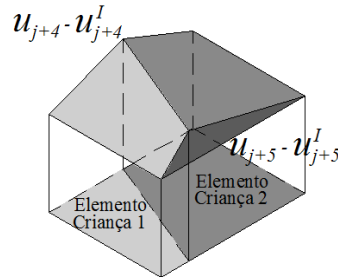


Figura 2. Aproximações em um domínio com 2 materiais em uma interpolação do MEFGI.

Para um domínio com dois materiais sendo discretizado por dois elementos quadriláteros, cada um em conformidade com cada material é realizada uma interpolação pelo MEF, utilizando funções de forma Lagrangeanas como funções de interpolação. A aproximação genérica $\tilde{u}(x)$ pelo MEF é mostrada na Eq. (3):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j \quad (3)$$

No entanto, se os dois elementos forem agrupados e transformados em apenas um elemento em não conformidade, ter-se-á um domínio com dois materiais pertencente ao mesmo elemento. A aproximação pelo MEF calculado pela Eq. (3) desse elemento, não reconstrói o gradiente de descontinuidade na região da interface do material (Soghrati *et al.*, 2012).

A parte que falta na interpolação do campo de deslocamento pode ser recuperada, conforme observado na Fig. 2, por meio da utilização da estratégia do MEFGI. A estratégia consiste em utilizar em um domínio com dois materiais, apenas um elemento, no qual se extrai as funções de forma Lagrangeanas $N_j^{(p)}$ desse elemento chamado de pai. Na

intersecção da aresta do elemento com a interface, criam-se nós e, consequentemente, aumenta-se o número de graus de liberdade, porém esses nós não são pertencentes à malha original (Soghrati *et al.*, 2012).

Com os nós inseridos na intersecção da interface com a aresta do elemento, criam-se novos elementos, chamados elementos criança, como se observa na Fig. 2, em que cada elemento criança pertence a cada material, possuindo funções de forma Lagrangeanas associadas a cada ponto nodal dos mesmos e que são responsáveis pelo cálculo da integração em cada material separadamente.

Ao final, junta-se cada elemento criança ao elemento pai, para a montagem da matriz de rigidez do elemento. A aproximação $\tilde{u}(x)$ pelo MEFGI é apresentada na Eq. (4):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j^{(p)}(x) u_j + \sum_{i=1}^{nen} s \psi_i(x) \alpha_i \quad (4)$$

em que $N_j^{(p)}$ são as funções de forma Lagrangeanas do elemento pai em cada nó j , u_j são os deslocamentos em cada ponto nodal j do elemento pai, ψ_i e α_i são funções de enriquecimento de interface e graus de liberdade generalizados para cada nó i de interface, respectivamente e s é um fator de escala relacionado à relação de aspecto entre o elemento criança e o pai, maiores detalhes podem ser encontrados em Soghrati *et al.*, (2012).

As funções de enriquecimento do MEFGI são construídas, a partir da obtenção dos valores das funções de forma Lagrangeanas dos elementos criança relativos a cada nó que intercepta a interface e no final são somados os valores dessas funções de forma correspondentes a cada nó dessa interface (Soghrati e Geubelle, 2012). Na Figura 2, como foram inseridos dois nós na interface, duas funções de enriquecimento são adicionadas.

Segundo Soghrati e Geubelle (2012), os subelementos quadrilaterais são criados apenas para se avaliar as funções de enriquecimento de interface. As funções de forma são selecionadas do elemento como um todo, equivalente à primeira parte da Eq. (4), ou seja, do elemento pai.

3. MODELAGEM COMPUTACIONAL DE MATERIAIS COMPÓSITOS

São apresentados nesta seção os resultados das simulações numéricas, usando todo o estudo apresentado nas seções precedentes em relação ao MEFGI com o objeto de validação do MEFGI para estruturas com comportamento elástico linear, em um domínio de análise composto por dois materiais. Como modelo de validação, tem-se uma viga submetida à flexão simples composta por dois materiais distintos, discretizadas por elementos quadrilaterais.

3.1. Aplicação em Vigas Laminadas

Neste modelo, é analisada uma viga engastada e livre composta por dois materiais diferentes, com comprimento $a = 10$ m, altura $b = 2$ m e espessura unitária submetida à flexão simples, em que é submetida a uma tensão na aresta livre, conforme pode ser visualizado na Fig. 3.

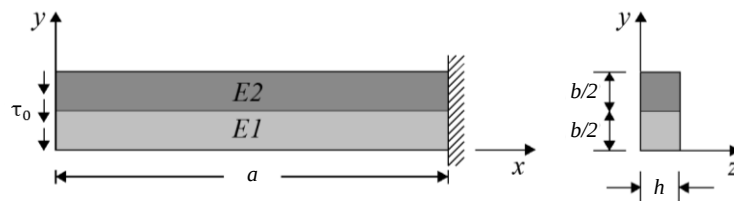


Figura 3. Geometria e carregamento da viga composta de dois materiais submetido à flexão simples.

Como propriedades mecânicas essa viga possui um Modulo de Elasticidade de Referência, $E_R = 30$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Para qualquer Valor de y em $x = 0$, tem-se uma tensão $\tau_0 = 150$ N/m² como uma força uniformemente distribuída $f_y = -300$ N/m.

O E_R é um valor de base para comparação, em que os valores de E_1 e E_2 são relacionados a esse valor. Nessa viga, o objetivo é analisar a convergência para os valores dos deslocamentos, utilizando o MEFGI com as funções de enriquecimento de interface implementadas em conjunto com as funções de enriquecimento polinomiais. Para se calcular a solução analítica para os deslocamentos, u_y da viga compósita é necessário fazer uma relação entre os módulos de elasticidade dos materiais E_1 e E_2 , transformar em apenas um material e através de um coeficiente de homogeneização se forma uma nova seção transversal equivalente para o cálculo da inércia com valor de módulo de elasticidade do material que se deseja transformar, como é mostrado na Eq. (5):

$$u_y(0,1) = -\frac{f_y a^3}{3E_{1,2}I_{1,2}} \left[1 + 3(1+\nu)/L^2 \right] \quad (5)$$

em que $E_{1,2}$ é o módulo de elasticidade longitudinal do material que se deseja transformar e $I_{1,2}$ é a inércia da seção transversal transformada por um coeficiente de homogeneização entre os módulos E_1 e E_2 .

É apresentada a relação entre materiais para simulação numérica, no qual os módulos de elasticidade possuem valores iguais a $E_1 = 10E_R$ para o material 1, $E_2 = E_R$ para o material 2. O valor de referência calculado para a relação entre módulos de elasticidade $E_1/E_2 = 10$, para o deslocamento no ponto determinado é $u_y(0,1) = 0,0018941$ m.

Nesse modelo, o método MEFGE é implementado para elementos quadrilaterais, adicionando as funções de enriquecimento polinomiais. Foram simuladas seis diferentes malhas para se realizar as análises para a viga. Na Tabela 1 é apresentado o número de elementos e de nós de cada malha.

Tabela 1. Número de elementos e número de nós para cada malha para o MEFGE.

Malhas	MEFGE	
	nº elementos	nº nós
I	1	4
II	2	6
III	12	20
IV	56	72
V	240	272
VI	992	1056

No MEFGE, as malhas não estão em conformidade com a interface e cortam todos os elementos que a abrigam.

As simulações são realizadas para a relação $E_1/E_2 = 10$. Os nós situados na aresta engastada não tiveram seus deslocamentos enriquecidos para se respeitar as condições de contorno do problema. A integração numérica, utilizando enriquecimentos polinomiais, é realizada para todas as análises dessa viga pela regra de integração de Gauss - Legendre mínima para cada elemento, porém no MEFGE os elementos que abrigam a interface dividem-se em dois elementos de integração e em cada um deles aplica-se a regra acima.

3.1.1. Análise da convergência do refinamento de malha

A primeira análise foi obter uma aproximação do campo dos deslocamentos considerando o refinamento da malha, iniciando da malha I (mais grosseira) até a malha VI (mais refinada) sem qualquer combinação de função de enriquecimento sobre a PU, isso resultou em uma aproximação final de ordem P0. Repetiu-se o mesmo refinamento de malha anterior, porém adicionou-se à PU linear das funções de aproximação do MEF, funções de enriquecimento polinomiais com aproximação local de ordem um, dois e três, resultando em aproximações finais P1, P2 e P3, respectivamente.

Na Figura 4, é apresentado um gráfico correspondente ao ε_r com relação ao NGL, por meio do refinamento da malha para cada ordem de aproximação enriquecida separadamente, analisado para os deslocamentos para o MEFGE. No gráfico o aumento do NGL é devido ao aumento no número de elementos para cada ordem polinomial utilizada.

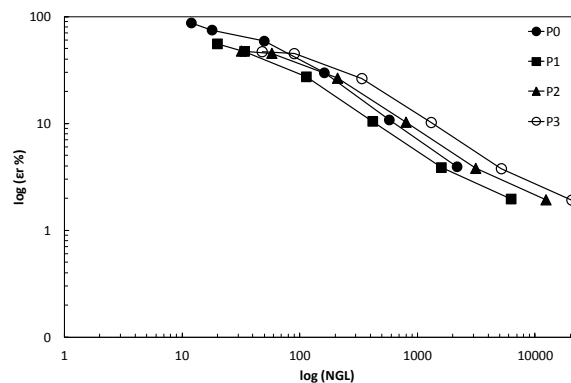


Figura 4. Erro relativo, ε_r , com relação ao NGL para os deslocamentos para diferentes ordens de funções de enriquecimento para a relação $E_1/E_2 = 10$.

Na Figura 4, analisa-se que para a simulação do MEFGI, obteve-se uma redução no ε_r à medida que se refina a malha. Porém, no MEFGI, as aproximações resultantes P1 a P3, fornecidas pelo enriquecimento polinomial, não potencializam a melhora na qualidade da solução da maneira desejada. No entanto, com o refinamento da malha, o método alcança resultados satisfatórios, chegando-se $\varepsilon_r \approx 1\%$ para a relação entre módulos de elasticidade estabelecida.

3.1.2. Análise da convergência da ordem polinomial do enriquecimento

Outra análise estabelecida para o método e relação entre material na viga foram utilizar para cada malha quatro casos de análises. O primeiro caso foi à aproximação da PU linear das funções de aproximação do MEF, sem adicionar enriquecimentos, obtendo a uma aproximação final P0 e os demais casos a aproximação da PU com a adição de enriquecimentos lineares, quadráticos e cúbicos, resultando em aproximações finais P1, P2 e P3, respectivamente.

Na Figura 5, apresenta-se um gráfico correspondente ao ε_r com relação ao NGL para cada caso de malha mostrado na Tab. 1, adicionando a cada uma dessas malhas funções de enriquecimento de ordem zero até três, analisadas para os deslocamentos, utilizando uma simulação pelo MEFGI. O aumento do NGL nesse gráfico é devido ao aumento da ordem de aproximação para cada malha.

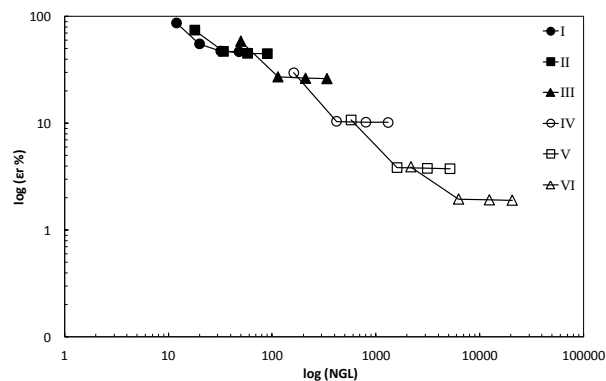


Figura 5. Erro relativo, ε_r , com relação ao NGL para cada malha adicionando diferentes ordens de funções de enriquecimento sobre cada malha para a determinação do deslocamento.

Na Figura 5, analisa-se para a simulação do MEFGI, uma redução no ε_r em cada configuração de malha à medida que se adicionaram ordens polinomiais de enriquecimento sobre as mesmas. Da Figura 5 observa-se uma melhora na qualidade das aproximações à medida que se utiliza malhas com muitos elementos. Essas malhas mais refinadas, adicionadas às ordens polinomiais de enriquecimentos, alcançaram, $\varepsilon_r \approx 1\%$. Os resultados finais não tiveram uma maior aproximação devido às condições de contorno impostas no MEFGI, em que se utilizaram os dois nós mais próximos ao nó central para a restrição na direção vertical.

No entanto, como comentado anteriormente, o MEFGI é vantajoso, pois a interface corta alguns elementos e, mesmo assim, com o refinamento da malha e adicionando enriquecimentos polinomiais, alcançam resultados muito próximos do valor de aproximação pretendido, sem a preocupação de gerar malhas com elementos em conformidade com os materiais como seria na aproximação pelo MEF, o que é bastante útil em problemas envolvendo mudança no formato de materiais, pois só gera a malha apenas uma vez, com a mudança apenas das coordenadas da interface.

O MEFGI abordado nesta pesquisa foi simulado para seções transversais retangulares, bem como interfaces com cortes planos, como foi visto nas simulações para a viga. No entanto, esse método pode também ser aplicado para outros tipos de seções transversais como, por exemplo, seções circulares, assim como para interfaces com cortes não planos, como no caso de materiais soldados, interfaces curvas. Porém esses estudos estão em desenvolvimento para futuros trabalhos.

4. CONCLUSÕES

Essa pesquisa abordou a formulação e implementação de métodos não convencionais do MEF, especificamente, o MEFG, utilizando funções de enriquecimento polinomiais e de interface para aplicações em estruturas bidimensionais de materiais compósitos. Foram realizadas simulações numéricas de um modelo para validar as formulações e implementações propostas. Os métodos apresentaram um sucesso na implementação de funções de enriquecimentos polinomiais e de interface.

Para a metodologia para materiais compósitos, a estratégia de enriquecimento proposta, denominada MEFGI, demonstrou grande potencialidade para a resolução de problemas com gradiente descontínuo originado pela diferença de rigidez entre os diferentes materiais sem usar uma malha de conformidade nas bordas da interface. A principal característica do método proposto é que os graus de liberdade do enriquecimento são atribuídos somente nos nós fictícios da interface. Esta variação na formulação elimina os problemas encontrados em algumas funções de enriquecimento no MEFG convencional para a atribuição de condições de contorno essenciais dos nós enriquecidos.

Além disso, as funções de enriquecimento são simplesmente construídas através da combinação linear de funções de forma Lagrangeanas nos elementos de integração, o que reduz o custo e facilita a aplicação deste método.

O método foi validado para materiais compósitos laminados. A convergência do MEFGI pela ordem polinomial de enriquecimento não é satisfatória, no entanto, a convergência com relação ao refinamento da malha é semelhante a do MEF. A vantagem do MEFGI está no alcance de bons resultados para a aproximação com a utilização de elementos que abrigam a interface, ou seja, a mesma corta alguns elementos sem precisar se preocupar com a geração da malha, como no MEF.

Finalizando, conclui-se que a utilização do MEFG traz uma grande capacidade na qualidade da aproximação final com a utilização racional de funções de enriquecimento melhorando a eficiência computacional. A aplicação das funções de interface propostas flexibilizam significativamente a modelagem de problemas com campos de gradiente descontínuos, em que se geram malhas sem a preocupação de estar em conformidade com cada material.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro e a Universidade de Brasília pela estrutura fornecida para desenvolvimento deste trabalho.

6. REFERÊNCIAS

- Babuška, I., Caloz, G. and Osborn, J. E., 1994, "Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n. 4, p. 945 – 981.
- Babuška, I. and Melenk, J. M., 1997, "The partition of unity method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, p. 727-758.
- Bathe, K. J., 1996, "Finite element procedures", [S.I.]: Prentice-Hall, Inc., ISBN 0-13-301458-4.
- Belytschko, T. and Black, T., 1999, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, No. 5, pp. 601-620.
- Duarte, C. A., Babuška, I. and Oden, J. T., 2000, "Generalized finite element methods for three-dimensional Structural mechanics problems", *Computers and Structures*, vol. 77, n. 2, p. 215-232.
- Duarte, C. A. and Oden, J. T., 1995, "Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem", Technical Report 9505, TICAM, University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A. and Oden, J. T., 1996, "An h-p adaptive method using clouds", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1–4, p. 237-262.
- Duarte, C. A., Liszka, T. J. and Tworzydło, W. W., 2006, "Clustered generalized finite element methods for mesh unrefinement, non-matching and invalid meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, n. 11, p. 2409–2440, 2006.
- Evangelista Jr, F., Roesler, J. R. and Duarte, C.A., 2013, "Two scale Approach Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures using the Generalized Finite Element Method", *International Journal of Solids and Structures*, v. 50, p. 1991-2002, 2013.
- Melenk, J. M. and Babuška, I., 1996, "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1–4, p. 289-314.
- Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "A finite element method for crack growth without remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131-150.
- Moës, N., Cloiree, M., Cartraud, P. and Remacle, J. F., 2003, "A computational approach to handle complex microstructure geometries", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 192, pp. 3163-3177.
- Oden, J. T., Duarte, C.A. and Zienkiewicz, O. C., 1998, "A new cloud-based hp finite element method", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 153, pp. 117-126.
- Plews, J., Duarte, C. A. and Eason, T., 2012, "An Improved Non-Intrusive Global-Local Approach for Sharp Thermal Gradients in a Standard FEA Platform", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, n. 4, pp. 426-449.
- Plews, J. and Duarte, C. A., 2015, "Bridging Multiple Structural Scales with a Generalized Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, n. 3-4, pp. 180-201.
- Reddy, J. N. , 2006. "An Introduction to the Finite Element Method", 3rd ed: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering. Inc., ISBN 0-07-246685-5.
- Simone, A.; Duarte, C. A. and Giessen, E. V., 2006, "A Generalized Finite Element Method for polycrystals with discontinuous grain boundaries", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 67, n. 8, p. 1122-1145.
- Soghrati, S., Aragón, A. M., Duarte, C.A. and Geubelle, P. H., 2012, "An interface-enriched generalized FEM for problems with discontinuous gradient fields", *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 89, pp. 991-1008.
- Soghrati, S. and Geubelle, P. H., 2012, "An 3D interface-enriched generalized finite element method for weakly discontinuous problems with complex internal geometries", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, n. 217-220 , pp. 46-57.

- Strouboulis, T., Babuška, I. and Copps, K., 2000. "The design and analysis of the Generalized Finite Element Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 181, n. 1–3, p. 43-69.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Zhu, J. Z., 2005, "Finite Element Methods – Its Basic and Fundamentals", 6th ed. Elsevier, Inc., ISBN 0-7506-6320-0.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAL

"Os autores Gelson de Sousa Alves, Francisco Evangelista Junior e José Fabiano Araújo Moreira são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho".

IMPLEMENTATION OF GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD WITH INTERFACE ENRICHMENT

Gelson de Sousa Alves, gelsondsalves@gmail.com¹
Francisco Evangelista Junior, fejr.unb@gmail.com¹
José Fabiano Araújo Moreira, jf_moreira1991@hotmail.com¹

¹University of Brasilia, Department of Civil and Environmental Engineering, SG – 12 Building, Darcy Ribeiro Campus, Brasília – DF, Brazil.

Abstract. *This article aims to implement non-conventional formulations of Finite Element Method (FEM) applied to structural analysis on linear elastic regime, specifically, Generalized Finite Element Method (GFEM). Enrichment functions, such as polynomial and interface functions, were implemented in order to improve the approximation of boundary value problems with smooth and discontinuous solutions due to different materials interfaces. A technique was formulated and implemented considering the interface of material on composites without the finite element mesh correspond to the contour of different materials in structural members such as laminated beams. Thus, the results were compared with analytical and FEM solutions, showing the efficiency of proposed model. The strategy has shown potential to solve problems with discontinuous gradient due to material interface.*

Keywords: *FEM, GFEM, Composite Materials, Interface*

"The authors Gelson de Sousa Alves, Francisco Evangelista Junior e José Fabiano Araújo Moreira are solely responsible for the content of this work".