

ANÁLISE DE FLUXO DE ENERGIA EM UMA VIGA TRINCADA

Claudionor Ferreira Pereira Junior, claudionor.fpj@gmail.com¹

Vilson Souza Pereira, vilson.sp@ufma.br¹

José Maria Campos Dos Santos, zema@fem.unicamp.br²

¹ Universidade Federal do Maranhão, Curso de Engenharia Mecânica, Av. dos Portugueses, 1966 - Bacanga - 65080-80, São Luís - MA.

² Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional. Rua Mendeleiev, s/n - Barão Geraldo - Caixa Postal 6122 - CEP: 13.083-970 - Campinas - SP.

Resumo: Neste artigo, estudam-se os fenômenos de propagação de ondas elásticas em vigas com trinca, com o objetivo de identificar como as vibrações se propagam através dessas estruturas em médias e altas frequências. Para isso, utilizou-se de métodos de energia originados da Análise de Fluxo de Energia (EFA) e que têm como variáveis primárias a densidade de energia e o fluxo de energia aproximada. Para a investigação dessa trinca tem sido proposto um novo método, chamado Método do Elemento Espectral de Energia. Este método consiste em uma solução analítica da equação diferencial do EFA no domínio da frequência utilizando-se técnicas matriciais similares ao método dos elementos finitos. De forma geral, avalia-se um elemento espectral de energia de viga com uma trinca em termos da propagação de sua energia aproximada. A variação da densidade e do fluxo de energia em função da profundidade da trinca e da sua posição ao longo do comprimento da viga é observada com a viga danificada e não danificada.

Palavras-chave: Fluxo de Energia, Propagação de Ondas, Elemento Espectral de Energia, Viga, Trinca, Relações de Acoplamentos.

1. INTRODUÇÃO

Uma questão crítica no campo da detecção de danos estruturais está em identificar os caminhos de transmissão da vibração. Identificando-se corretamente estes caminhos, podemos localizar e quantificar danos com maior precisão. No que diz respeito à análise dinâmica de estruturas com trincas, a avaliação do comportamento da vibração pode ser uma ferramenta para identificar esses defeitos. Sabe-se que a presença de uma trinca em uma estrutura introduz uma variação da flexibilidade local que altera a sua resposta vibracional (Dimarogonas, 1996). Sendo assim, novas pesquisas abordando descontinuidades (trincas) em estruturas, principalmente a detecção de danos, têm se concentrado em métodos que utilizam propagação de ondas em estruturas elásticas nas faixas de médias e altas frequências (Krawczuk, 2002; Krawczuk *et al* 2003).

Alguns métodos determinísticos, tais como o Método dos Elementos Finitos (FEM), tornaram-se ferramentas numéricas bem estabelecidas na previsão de vibrações para análise de baixas e médias frequências (Dimarogonas, 1996). Para uma análise em altas frequências, onde o comprimento de onda é pequeno, a previsão de vibração em estruturas torna-se mais complicada. Assim, métodos que expressam a vibração em termos de variáveis de energias como Análise Estatística de Energia (SEA), Método do Elemento Espectral de Energia (ESEM), vêm sendo investigados para prever o comportamento vibracional de estruturas em altas frequências. Porém, com relação a estruturas que apresentam trincas, ainda se faz necessários à formulação de modelos de energia que expressam os efeitos dessa descontinuidade (trinca), de forma clara e objetiva, os modelos que possuem como variáveis primárias, a densidade de energia e fluxo de energia vem demonstrando uma grande facilidade de interpretação de resultados obtidos.

Neste trabalho é apresentado o método de detecção danos em estruturas tipo viga utilizando o método dos elementos finitos, tendo com base, a inserção da trinca proposta por Krawczuk (2002), é estendido para a obtenção de uma solução em termos do fluxo de energia aproximada (EFA) em vez de deslocamento como proposto em sua formulação inicial. Visto que para altas frequências o deslocamento é relativamente pequeno, este não se apresenta como a melhor alternativa para detecção da trinca. Assim, neste trabalho realiza-se uma avaliação alternativa do método para a detecção do dano através do modelo de fluxo de energia mecânica em um elemento de viga com trinca.

2. TEORIA BÁSICA

2.1. Elemento Espectral de Viga Trincado

A teoria da viga de Euler-Bernoulli pode ser obtida através da simplificação da teoria de Timoshenko. Para isto, é necessário desprezar a rigidez ao cisalhamento e desconsiderar a inércia de rotação da seção transversal da viga. Com base nessas considerações, a equação diferencial do movimento na sua forma espectral pode ser representada como (Doyle, 1997):

$$\frac{d^4 \hat{v}}{dx^4} - k^4 \hat{v} = \hat{F}, \quad (1)$$

onde $\hat{v}$ é o deslocamento transversal, $\hat{F}$ é a força externa aplicada e $k^2 = \sqrt{\omega^2 \rho S / EI}$ é o número de onda. Temos que, ω é a frequência angular, E é o módulo de Young, S é a área da seção transversal, ρ é a densidade do material, I é o momento de inércia.

Para um elemento de viga trincado como mostrado na Fig. (1), tendo como características uma trinca aberta que não se propaga ao longo da seção transversal (Pereira *et al.* 2009; Krawczuk, 2002). A trinca é substituída por uma mola adimensional, que proporciona uma flexibilidade local (θ). Esse coeficiente de flexibilidade local é calculado usando o teorema Castiglianos juntamente com as leis da mecânica da fratura (Tada, 1973).

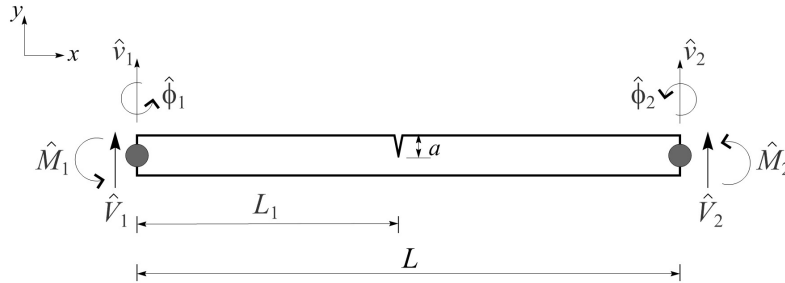


Figura 1. Esforços e deslocamentos nodais para um elemento de viga trincado.

A solução geral da Eq. (1), aplicado no elemento de viga trincado pode ser escrito por duas partes (Krawczuk, 2002):

$$\hat{v}^{(d)} = A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{-k_2 x} + C_1 e^{-ik_1(L_1-x)} + D_1 e^{-k_2(L_1-x)} \quad [0 \leq x \leq L_1], \quad (2)$$

$$\hat{v}^{(e)} = A_2 e^{-ik_1(L_1+x)} + B_2 e^{-k_2(L_1+x)} + C_2 e^{-ik_1(L-(L_1+x))} + D_2 e^{-k_2(L-(L_1+x))} \quad [0 \leq x \leq L-L_1], \quad (3)$$

onde $\hat{v}^{(d)}$ e $\hat{v}^{(e)}$ são os deslocamentos do lado direito (d) e esquerdo (e) da trinca, respectivamente. As constantes, A_1 , B_1 , C_1 , D_1 e A_2 , B_2 , C_2 , D_2 são determinadas pelas condições de contorno da viga.

Krawczuk (2002) define que as condições de compatibilidade de deslocamento na posição da trinca são representadas da seguinte forma:

$$\hat{v}^{(d)}(L_1) = \hat{v}^{(e)}(0), \quad \hat{\phi}^{(e)}(0) - \hat{\phi}^{(d)}(L_1) = \theta \frac{d^2 \hat{v}^{(e)}}{dx^2}, \quad (4)$$

onde, $\hat{\phi}^{(d)}$ e $\hat{\phi}^{(e)}$ são as rotações nodais do lado direito (d) e esquerdo (e) da trinca, respectivamente. O coeficiente de flexibilidade de acordo com a profundidade da trinca pode ser definido como $\theta = c EI / L$ temos,

$$c = \frac{72 \pi}{E b h^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} f^2(\alpha/h) d\bar{\alpha}, \quad (5)$$

onde, c é a variação da flexibilidade da viga de acordo com a profundidade da trinca (a), $\bar{a} = a/h$ e $\bar{\alpha} = \alpha/h$ são variáveis normalizadas, E é o módulo de Elasticidade, h e b são as dimensões da seção transversal, α é a variação da profundidade e $f(a/h)$ é a função correção expressa por,

$$f(\alpha/h) = \sqrt{\frac{\tan(\pi\alpha/2h)}{\pi\alpha/2h}} \frac{0.752 + 2.02(\alpha/h) + 0.37[1 - \sin(\pi\alpha/2h)]^3}{\cos(\pi\alpha/2h)}. \quad (6)$$

Aplicando as condições de deslocamento e o equilíbrio de força e momento no elemento espectral de comprimento L , obtém-se a seguinte expressão (Pereira *et al.* 2009),

$$\begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{EI}{L^3} [\hat{K}_c]}_{\Omega_c} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

onde, Ω_c é a matriz de rigidez dinâmica de uma viga trincada.

Para excitações harmônicas a média temporal da densidade de energia e do fluxo de energia são dadas pelas seguintes equações, respectivamente,

$$\langle e \rangle = \frac{1}{4} EI \left\{ \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \frac{d^2 \hat{v}^*}{dx^2} \right\} + \frac{1}{4} \omega^2 \rho S \{ \hat{v} \hat{v}^* \}, \quad (8)$$

e

$$\langle q \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ EI \frac{d^3 \hat{v}}{dx^3} \hat{v}^* \right\} + \frac{1}{2} \Re \left\{ -i \omega EI \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} \frac{d \hat{v}^*}{dx} \right\}. \quad (9)$$

2.2. Análise do Fluxo de Energia

Analisar problemas em termos de energia e fluxo de energia tem como motivação o fato desses conceitos serem simples e facilmente interpretados fisicamente. Através das equações do fluxo de energia em estruturas é possível identificar os caminhos da propagação de energia e assim fazer mudanças apropriadas nos projetos para minimizar o nível de energia vibracional (Noiseux, 1970).

Segundo Cho (1993) a equação diferencial de energia que descreve a propagação de ondas de flexão em uma viga Bernoulli-Euler vibrando transversalmente é dada por

$$\frac{d^2 \langle \bar{e} \rangle}{dx^2} - \Psi^2 \langle \bar{e} \rangle = 0, \quad (10)$$

sendo que, $\Psi = \eta \omega / c_g$, onde $\bar{\cdot}$ e $\langle \cdot \rangle$ representa a média espacial e temporal, respectivamente. ω é a frequência de excitação, η é o fator de perda estrutural e c_g é a velocidade de grupo dado por $c_g = 2\sqrt{\omega^2 EI / \rho S}$. A média temporal do fluxo de energia (q) é relacionada com a densidade de energia(e) da seguinte forma,

$$\langle \bar{q} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta \omega} \frac{d \langle \bar{e} \rangle}{dx}, \quad (11)$$

A solução geral da Eq. (10) é:

$$\langle \bar{e} \rangle = H e^{\Psi x} + G e^{-\Psi x}, \quad (12)$$

onde as constantes H e G são obtidas através das condições de contorno de densidade de energia e fluxo de energia.

2.3. Elemento Espectral de Energia para Viga

A metodologia do Método Elemento Espectral de Energia (ESEM) é a mesma utilizada pelo Método Elemento Espectral (SEM) (Doyle, 1997), as matrizes dinâmicas são obtidas através das funções de forma, estabelecidas pela solução exata da equação diferencial de energia, Eq. (12), as quais são utilizadas para determinar as energias em quaisquer posições ao longo da estrutura. A Fig. (2) mostra um elemento de viga elástico de dois nós, com seção transversal uniforme sujeito a uma densidade e fluxo de energia em ambas extremidades.

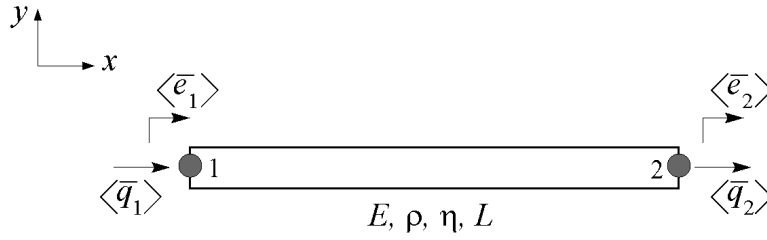


Figura 2. Densidade de energia e fluxo de energia nodal para um elemento de viga de energia.

Aplicando as condições de contorno de densidade de energia e fluxo de energia no elemento mostrado na Fig. (2), obtemos uma relação dinâmica entre o fluxo de energia e densidade de energia dada da seguinte forma (Santos *et al.* 2008)

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle \end{Bmatrix} = \underbrace{c_g \begin{bmatrix} \cot gh(L\eta\omega/c_g) & -\csc h(L\eta\omega/c_g) \\ -\csc h(L\eta\omega/c_g) & \cot gh(L\eta\omega/c_g) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_E} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle \\ \langle \bar{e}_2 \rangle \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

onde $\mathbf{K}_E$ é a matriz dinâmica de fluxo de energia para uma elemento de viga.

2.4. Matriz de Conexão

A matriz de conexão serve para quantificar todas as ondas que são refletidas e transmitidas em ambos os lados da trinca, devido a uma onda incidente. Para isso, são utilizados coeficientes que quantificam essa troca de energia na trinca, chamados de coeficiente de reflexão (r) e transmissão (t).

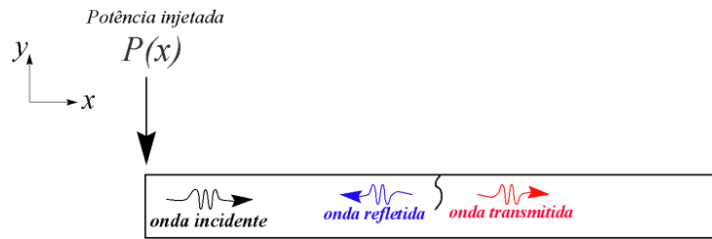


Figura 3. Relação entre a onda incidente e as ondas transmissão e reflexão na trinca (modelo ideal).

A matriz de equações de conexão do elemento (C^e) para propagação de ondas de flexão em vigas é representada por

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{tc_g}{2r} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{C^e} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle \\ \langle \bar{e}_2 \rangle \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

onde

$$t = \frac{\text{onda transmitida}}{\text{onda incidente}} = \frac{\langle \bar{q}_2 \rangle_{tran}}{\langle \bar{q}_1 \rangle_{inc}}, \quad r = \frac{\text{onda refletida}}{\text{onda incidente}} = \frac{\langle \bar{q}_2 \rangle_{ref}}{\langle \bar{q}_1 \rangle_{inc}}, \quad (15)$$

somando a matriz de conexão do elemento Eq.(12) à Eq.(1), obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle \end{Bmatrix} = (\mathbf{K}_E + C^e) \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle \\ \langle \bar{e}_2 \rangle \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o intuito de observar o comportamento da energia vibracional para uma viga trincada e sem trinca, foram realizados alguns testes numéricos com uma viga sujeita as condições de contorno engastada-livre. A viga é de alumínio ($E = 71,0$ GPa, $\rho = 2700,0$ kg/m³ e $\eta = 0,01$) com comprimento $L = 3,0$ m e seção transversal retangular ($b = 0,002$ m e $h = 0,02$ m). A viga foi excitada na extremidade direita por uma força impulsiva de amplitude de 1000 N, representado por um delta de Dirac constituído por uma frequência central (f_c) de 40 kHz.

A Figura 4 exibe os gráficos do comportamento das variáveis de energia e fluxo de energia tanto para o método do elemento especial (SEM) quanto para o ESEM. Observa-se que o comportamento oscilatório do modelo SEM não é mostrado no ESEM. Isso se deve ao fato de que as variáveis de energia calculadas pelo SEM são derivadas do deslocamento (teoria de viga Bernoulli-Euler), que é uma variável oscilatória. Os valores das densidades de energia e fluxo de energia gerada pelo ESEM são valores médios quando comparados com o SEM. O decréscimo na densidade e no fluxo de energia deve-se ao amortecimento interno da estrutura, considerado no modelo.

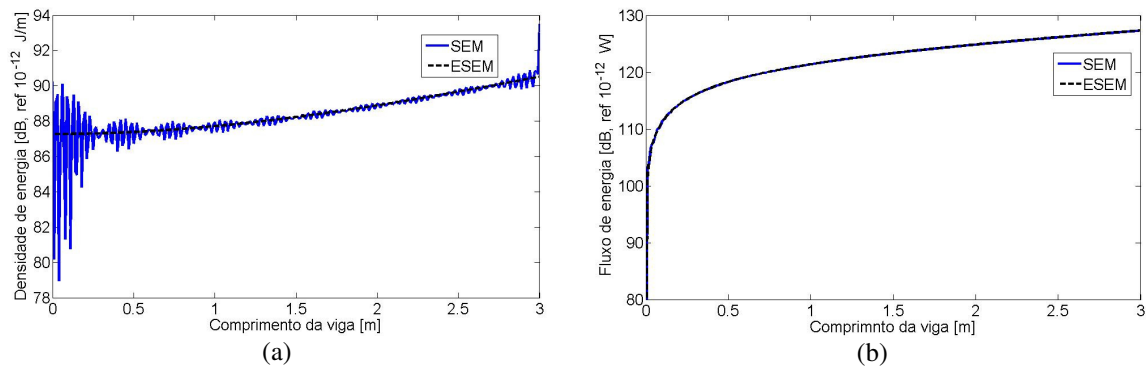


Figura 4. (a) Densidade de energia e (b) fluxo de energia para uma viga sem trinca.

A Figura 5 mostra o comportamento das médias temporais das densidades de energia e dos fluxos de energia, para uma viga trincada na posição $x = 1,2$ m e profundidade adimensional da trinca $a/h = 0,1$. Neste exemplo a análise é realizada com um elemento espectral de viga com trinca de dois nós para o SEMt e para ESEMt, dois elementos são utilizados, ligados pela matriz de conexão, os valores de densidade e fluxo de energia são interpolados no espaço com um incremento de 0,01 m. Os resultados obtidos mostram que a densidade e o fluxo de energia, decrescem ao longo do comprimento da viga devido ao amortecimento interno do material. Além disso, apresentam uma indicação clara da posição e da intensidade da trinca, para ambos os métodos.

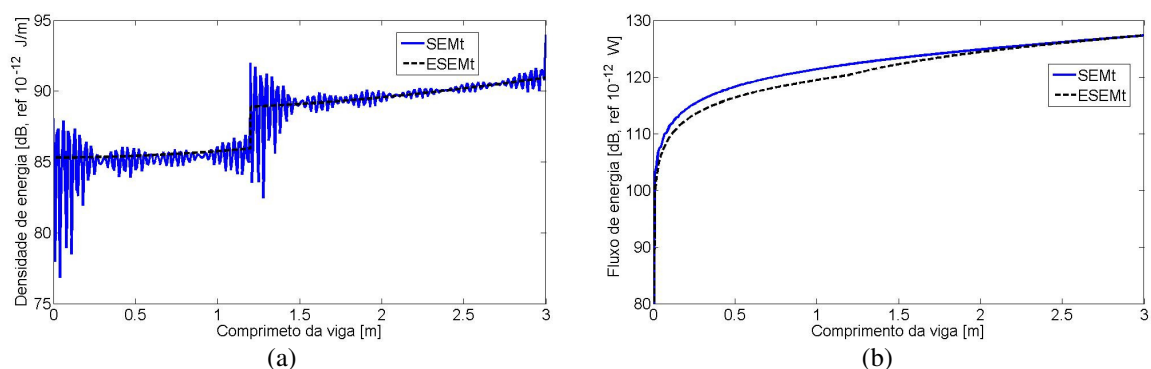


Figura 5. (a) Densidade de energia e (b) fluxo de energia para uma viga com trinca.

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, o método de detecção falhas em estrutura do tipo viga, utilizando o método do elemento espectral de energia foi complementado para a obtenção de uma solução em termos da densidade e do fluxo de energia em vez de deslocamento. Um elemento de viga com trinca foi implementado computacionalmente e as análises em termos da propagação de sua energia mecânica ao longo do comprimento do elemento foram avaliadas. A variação da densidade e do fluxo de energia mecânica em função da profundidade da trinca e da sua posição ao longo do comprimento da viga, até o momento, não foi avaliada. Os resultados simulados de densidade e fluxo de energia em relação à profundidade da

trinca demonstram que o modelo apresenta uma boa sensibilidade para valores de 10% da altura da seção transversal da estrutura. Entretanto, desde que a profundidade da trinca seja superior a estes valores, a variação da densidade e do fluxo de energia em função da posição da trinca ao longo da estrutura sempre localizará a trinca. Os resultados apresentados através da densidade e fluxo de energia é uma forma alternativa de se analisar e interpretar problemas com descontinuidades estruturais do tipo trinca.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores estão agradecidos à FAPEMA, CAPES e CNPq pelo apoio financeiro e à Universidade Federal do Maranhão – UFMA pela infraestrutura, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

6. REFERÊNCIAS

- Dimarogonas A., Vibration of cracked structures: A state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5):831-857, 1996.
- Krawczuk M., Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38:537-548, 2002.
- Krawczuk M., Palacz M., and Ostachowicz W., The dynamic analysis of a cracked timoshenko beam by spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 264:1139-1153, 2003.
- Doyle J.F., “Wave Propagation in Structures”, New York, Springer-Verlag, 1997.
- Pereira, V.S., Pereira, F.N. and Dos Santos, J.M.C., 2009, “Energy flow in a cracked beam spectral element”, *Proceedings of the 20th International Congress of Mechanical Engineering*, Vol. 1, Gramado, Brazil.
- Tada H., Paris, P.C. and Irwin, G.R., 2000, “The stress analysis of cracks handbook”, New York, Cambridge university press.
- Noiseux D., Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, pages 238-247, 1970.
- Cho P. and Bernhard R., Energy flow analysis of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):593-605, 1998.
- Santos, E.R.O., Arruda, J.R.F. and Dos Santos, J.M.C., 2008. “Modeling of Coupled Structural Systems by an Energy Spectral Element Method”, *Journal of Sound and Vibration*, v.316, pp 1 – 24.

7. RESPONSABILIDADE AUTURAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

ANALYSIS OF ENERGY FLOW IN A BEAM CRACKED

Claudionor Ferreira Pereira Junior, claudionor.fpj@gmail.com¹

Vilson Souza Pereira, vilson.sp@ufma.br¹

José Maria Campos Dos Santos, zema@fem.unicamp.br²

¹ Universidade Federal do Maranhão, Curso de Engenharia Mecânica, Av.dos Portugueses, 1966 - Bacanga - 65080-80, São Luís - MA.

² Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional. Rua Mendeleiev, s/n - Barão Geraldo - Caixa Postal 6122 - CEP: 13.083-970 - Campinas – SP.

Abstract. *In this article, we study the phenomena of propagation of elastic waves in beams with crack, in order to identify how the vibrations propagate through these structures in medium and high frequencies. For this, used is derived from the energy methods Energy Flow Analysis (EFA) and having as primary variables the energy density and the approximate energy flow. For the investigation of this crack it has been proposed a new method, called Element Method Power Spectral. This method consists of an analytical solution of the EFA differential equation in the frequency domain using matrix techniques similar to the finite element method. In general, evaluates a spectral energy beam element with crack propagation in terms of their approximate energy. The variation of density and flow of energy to the depth of the crack and its position along the length of the beam is observed with damaged and undamaged beam.*

Keywords: *Energy flow, Wave propagation, Energy spectral element, Beam, Crack, Couplings relations.*