

CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA

21 - 25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

RESPOSTA DE UM SISTEMA AMORTECIDO A MOVIMENTO HARMÔNICO DE BASE EM UM CARRO

Sthefanny Helena Rodrigues de Brito, brito.sth@gmail.com¹
Ricardo Cardoso Soares, Eng.mec.ricardocardoso@gmail.com¹
Amaury Sousa Sá, amaurysousasa@gmail.com¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, Praça da Liberdade, 1597, 64000-040, Centro, Teresina - PI

Resumo: O sistema de suspensão de um veículo desempenha papel fundamental na isolamento das vibrações provenientes da pista e de outras fontes de excitações e tem como alguns de seus objetivos: melhoria do conforto dos passageiros, manutenção da integridade das cargas, aumento da segurança, proporcionando melhores condições de aderência pneu-piso, etc. Este trabalho refere ao sistema de massa-mola-amortecedor em um movimento harmônico de base, onde uma curva descrita por meio de uma função matemática é relacionada com aproximação direta por equações diferenciais. Procurou introduzir a história do desenvolvimento, ao mesmo tempo em que exemplifica-se algebricamente sua dedução, e ao final complementou-se a solução com o auxílio do software Matlab para fim de demonstração didática.

Palavras-chave: Matlab, Movimento Harmônico de Base, Vibrações Mecânicas.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Mucheroni (2001), um dos fundamentos da teoria da Dinâmica de Máquinas e Sistemas é o estudo das vibrações livres e forçadas em sistemas mecânicos. O estudo inicia-se através de modelos simples com um grau de liberdade, aos quais são úteis pois, estabelecem definições básicas e podem também corresponder a muitas situações reais, especialmente quando se trata de análises dinâmicas numa faixa estreita de frequências. São aplicados também nos estudos mais avançados de vibrações mecânicas através do desacoplamento modal de modelos com vários graus de liberdade. Os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento destes modelos são determinados a partir da aplicação das leis da dinâmica nos problemas de engenharia em estudo. Por isso para o estudo de vibrações mecânicas é necessário o conhecimento das leis de Newton e Euler. Para o equacionamento de modelos de sistemas mais complexos, com vários graus de liberdade, recomenda-se também o conhecimento das equações de Hamilton e de Lagrange.

Para Freitas (2006), a dinâmica vertical trata do comportamento do veículo e dos seus ocupantes quando submetidos a excitações provenientes do piso em que o veículo trafega (externas) ou provenientes do motor, roda, transmissão, etc (internas). O sistema mola-amortecimento dos veículos desempenha papel fundamental na isolamento das vibrações resultantes destas excitações e seus principais objetivos são desde a melhoria do conforto dos passageiros a uma melhor aderência no contato pneu-piso, resultando em uma maior segurança.

Este trabalho apresenta uma análise da influência de uma lombada a uma suspensão de um veículo, através da comparação dos resultados analíticos obtidos. Os resultados são comparados qualitativa e quantitativamente.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Sistema Amortecido à Força Harmônica

Vibração forçada é aquela que ocorre quando o sistema sofre a ação de forças externas durante o movimento. As forças que atuam sobre o sistema podem ser determinísticas ou aleatórias, determinando uma característica do movimento vibratório. As forças determinísticas poderão se apresentar de diversas formas. As forças harmônicas periódicas são as que representam a maioria dos fenômenos responsáveis por vibrações em sistemas físicos. A resposta de um sistema, que é a solução da equação do movimento, sob a ação de forças, terá a mesma forma funcional que a

força atuante. A solução particular da equação diferencial é responsável por representar este movimento, em regime permanente. Mas a solução geral é composta de uma solução homogênea e uma solução particular. A solução homogênea representa a parcela transitória da resposta do sistema, aquela que é produzida pelas condições iniciais do movimento. É também a solução homogênea que representa a resposta transiente que resulta da aplicação eventual de alguma força com tempo de duração finito.

Na "Figura 1" temos a representação do sistema Massa-Mola-Amortecedor que será estudado no trabalho.

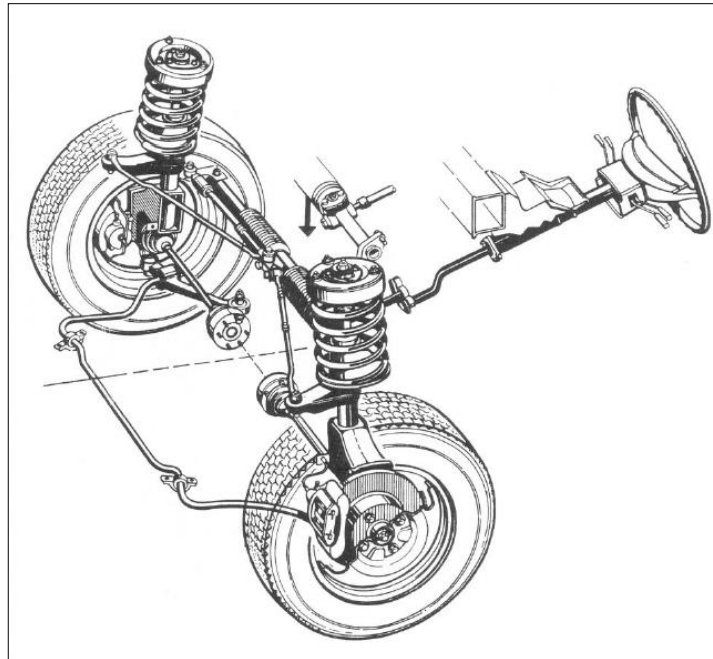


Figura 1. Sistema Massa-Mola-Amortecedor de um carro

2.2. Fundamentos da Dinâmica Vertical

Segundo Neto (2005), a dinâmica vertical estuda o comportamento do veículo e de seus ocupantes quando submetidos a excitações. Um veículo locomovendo-se a uma determinada velocidade é excitado por uma ampla gama de vibrações externas ou internas. Estas vibrações são filtradas pelo sistema de suspensão e chegam aos passageiros na forma de sensações tácteis, visuais e/ou audíveis. As vibrações, quanto às frequências, podem ser divididas em 3 faixas: até 25Hz, a sensação dos passageiros é somente tátil, em função do ouvido humano geralmente ter capacidade de ouvir somente frequências acima de 25Hz. Na faixa de 25Hz até 20.000Hz, a sensação dos ocupantes é de ruído (audível), e, entre 25 e 100Hz, a sensação é de aspereza (tátil). Para Rao (2008), os níveis aceitáveis de vibração costumam ser especificados em termos da resposta de um sistema com um grau de liberdade Não amortecido sujeito á vibração harmônica. Os limites são mostrados em um gráfico chamado Nomograma de Vibração, o qual apresenta as variações das amplitudes de deslocamento, velocidade e aceleração em relação à frequência de vibração. Os limites de vibração são recomendados pelo ISO 2631, com base na sensibilidade humana.

Segundo Gillespie (1992), a vibração é um dos mais importantes critérios, embora de natureza subjetiva, pelo qual as pessoas julgam a qualidade de construção e o do projeto de um veículo. Conforme Neto (2005), a dinâmica vertical pode ser dividida em 3 subproblemas, "Fig. 2":

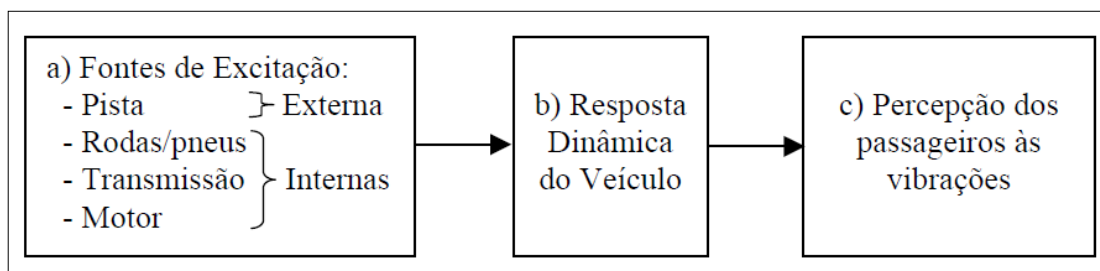


Figura 2. Subproblemas da Dinâmica Vertical segundo Neto (2005)

- a) Modelagem e caracterização das fontes de excitação
- b) Resposta dinâmica do veículo

c) Tolerância e percepção às vibrações dos passageiros

2.3. Resposta Dinâmica do Veículo

O modelo simplificado do veículo é considerado nesse trabalho, "Fig. 3", consiste de uma massa suspensa "M" (M = massa da carroceria completa) suportada por uma suspensão primária. Esta suspensão primária possui rigidez (Ks) e amortecimento (Cs) como propriedades básicas. O pneu é representado na maior parte das vezes por uma mola simples (Kt).

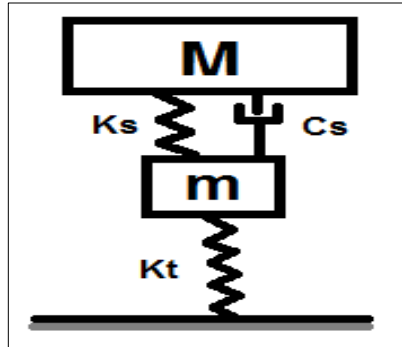


Figura 3. Modelo simplificado de 1/4 de veículo

Onde:

Ks = Rigidez da mola principal da suspensão

Cs = Coeficiente de amortecimento da suspensão

Kt = Rigidez do pneu

Trata-se de um sistema com um grau de liberdade, sendo que, se o sistema for linear, a primeira frequência natural, Não amortecida (ω_n) e também a amortecida (ω_d) da massa suspensa "M" são dadas pelas "Eq. (1) e (2)", apresentadas abaixo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} \quad (1)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2)$$

Segundo Gillespie (1992), para um bom nível de conforto, a relação de amortecimento, ζ geralmente fica entre 0,2 e 0,4. Também HROVAT, em 1988, conclui que fatores de amortecimento entre 0,2 e 0,4, para o modo de vibrar com movimento predominante de massa suspensa, proporcionam os melhores resultados para os dois critérios, conforto e contato pneu solo. Com estes valores da relação de amortecimento observa-se nas expressões acima que a frequência natural e a frequência amortecida ficam muito próximas e, por este motivo, somente a frequência natural Não-amortecida (ω_n) é comumente utilizada para caracterização do veículo.

Baixas frequências naturais requerem maiores cursos de suspensão para que as acelerações da pista sejam absorvidas sem atingir o batente ou o fim de curso da suspensão. O curso da suspensão depende do espaço disponível sendo que normalmente veículos maiores comportam maiores cursos de suspensão do que veículos menores e, portanto, tem condições de serem mais confortáveis.

2.4 Influência do Amortecimento da Suspensão

Como já afirmado anteriormente, o valor da frequência natural amortecida é praticamente a mesma da não-amortecida para valores de amortecimentos ζ entre 0,2 e 0,4, porém o valor máximo da relação de amplitude no pico (na frequência de ressonância) é muito sensível ao nível de amortecimento e pode variar de 1,5 a 3,0 em veículos de passageiros.

Segundo Gillespie (1992), a relação de amortecimento da suspensão ζ apresenta um valor ótimo por volta de 40% para a maior parte dos veículos. Valores menores ou maiores deterioram o desempenho do sistema aumentando a sua transmissibilidade como pode ser visto no gráfico da "Fig. 4":

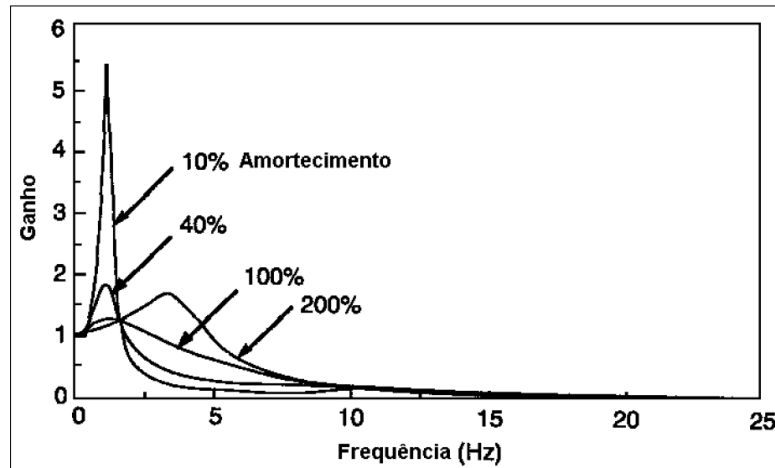


Figura 4. Efeito do amortecimento na capacidade de isolamento da suspensão

A característica de amortecimento para se atingir uma ótima performance é bastante complexa nos veículos modernos e são moldadas objetivando-se não só conforto como também segurança e dirigibilidade na medida em que é determinante na manutenção do contato pneu-solo. Também é importante ressaltar que a característica de amortecimento não é linear como assumida acima.

3. MODELAGEM E METODOLOGIA

3.1 Resposta de um Sistema Amortecido sob Movimento Harmônico da Base

O sistema da "Fig. 5.a", tem seu movimento provocado pelo movimento de sua base $y(t)$. O diagrama de corpo livre, mostrado na "Fig. 5.b", apresenta as forças atuantes na massa m .

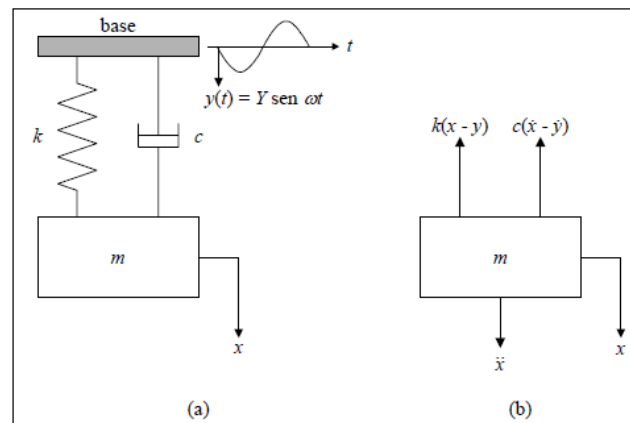


Figura 5. Sistema Amortecido sob Movimento Harmônico da Base

A Segunda Lei de Newton é aplicada para determinar a equação do movimento que se torna:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (3)$$

Se $y = Y \sin \omega t$ então $\dot{y} = \omega Y \cos \omega t$ e a "Eq. (3)" se torna

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \sin \omega t + c\omega Y \cos \omega t \quad (4)$$

Cuja solução particular é

$$x_p(t) = \frac{kY \sin(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} + \frac{c\omega Y \cos(\omega t - \phi_1)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (5)$$

Considerando $\cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) = \cos \phi_2 \cos(\omega t - \phi_1) + \sin \phi_2 \sin(\omega t - \phi_1)$, "Eq. (5)" pode ser escrita na forma

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) = Y \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \quad (6)$$

com relação de amplitudes dado por

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2r\zeta)^2}{(1 - r^2)^2 + (2r\zeta^2)}} \quad (7)$$

e os ângulos de fase são

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2r\zeta}{1 - r^2}\right) \quad (8)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{k}{c\omega}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2r\zeta}\right) \quad (9)$$

A equação $\frac{X}{Y}$ expressa o que se chama de *transmissibilidade* entre a base e o sistema. Na forma complexa, sendo $y(t) = \text{Re}[Y e^{i\omega t}]$, a solução particular é dada por,

$$x_p(t) = \text{Re}\left[\left(\frac{1 + i2r\zeta}{1 - r^2 + i2r\zeta}\right) Y e^{i\omega t}\right] \quad (10)$$

e a transmissibilidade é dada por

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{1 + (2r\zeta)^2} |H(i\omega)| \quad (11)$$

A "Figura 6" mostra um modelo simples de um veículo que pode vibrar na direção vertical quando trafega por uma estrada irregular. O veículo tem uma massa de 1500 kg. O sistema de suspensão tem uma constante de rigidez ,suspensão mais o pneu, de 32 kN/m, constante de amortecimento (c) de 3 kNs/m, sendo o fator de amortecimento de 0,43 aproximadamente. Considerou-se a velocidade do veículo de 30 m/s. A superfície da lombada varia senoidalmente com uma amplitude de 0,025 m e um comprimento de 6 m. A amplitude foi levada em consideração o anexo II da RESOLUÇÃO Nº 39/98, conforme o CONTRAN.

O modelo adotado é de um sistema de um grau de liberdade com excitação pela base.

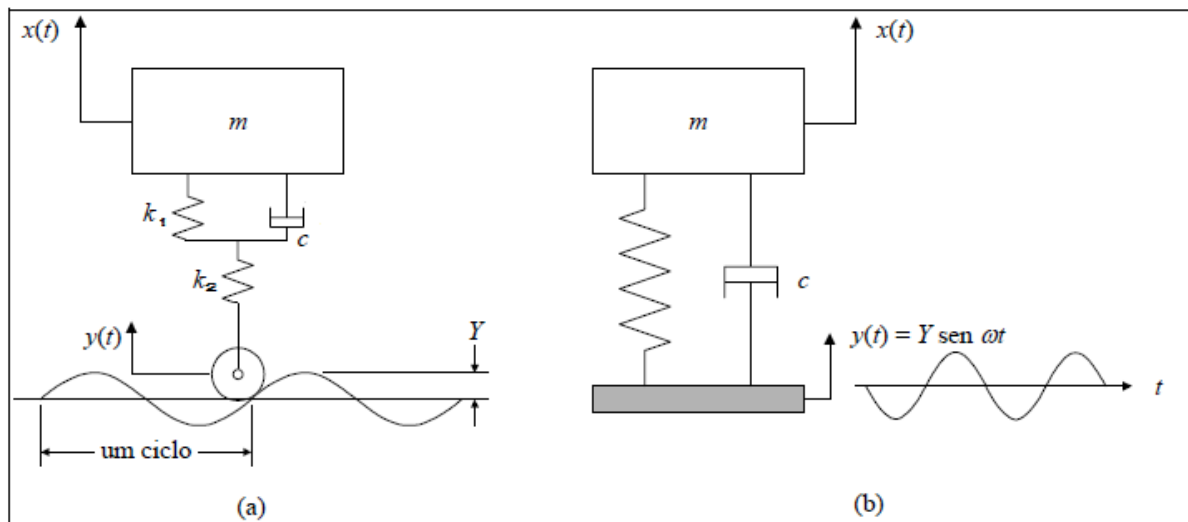


Figura 6. Sistema de um grau de liberdade com excitação pela base

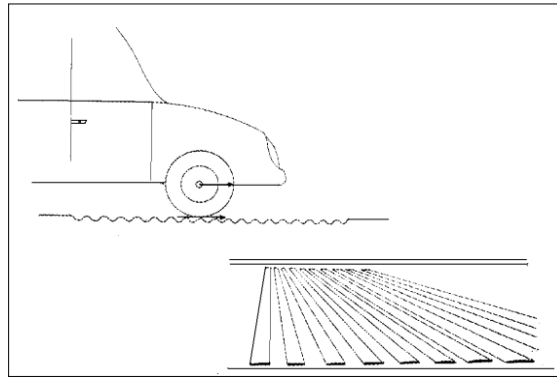


Figura 7. Veículo em movimento em um piso irregular

A frequência excitadora é dada por

$$f = \frac{v}{l} = \frac{30}{6} \quad (12)$$

com a frequência angular sendo

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 5 = 31.416 \text{ rad/s} \quad (13)$$

A frequência natural é dada pela equação (1). A relação de frequências é obtida por

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{31.416}{9.24} = 3.4 \quad (14)$$

A amplitude é, então obtida utilizando a equação (7)

$$\frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2r\zeta)^2}{(1 - r^2)^2 + (2r\zeta^2)}} = 0,282$$

consequentemente

$$X = 0,282 \cdot 0,025 = 0,00795 \text{ m}$$

A constante de Rigidez do carro, foi obtida primeiramente através da análise de 1/4 do mesmo, com a relação Suspensão-Pneu, temos uma interação em série, ao qual foi gerada um Keq (Constante de Rigidez equivalente). Os estudos foram analisados para o carro todo, considerando as outras relações das constantes em Paralelos, obtendo um K_{final} e um C_{final} .

Neste estudo também consideramos inexistente o atrito entre pneu e solo, hipótese esta, aceitável considerando o que tem sido adotada por autores, como o Gillespie (1992). Com o uso do software Matlab, foi empregado o código de implementação através da *ode 45* que se encontra em anexo no "Tópico 8".

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O sistema massa-mola-amortecedor sofre movimento harmônico, como mostrado na "Fig 6 e 7". Os dados de entrada foram tabulados de forma a obter a máxima similaridade possível entre o modelo do veículo. O código desenvolvido no Matlab, foi com o uso da *ode45* como mostrado no tópico acima. A "Figura 8 e 9", apresentam os gráficos de Deslocamento-Velocidade.

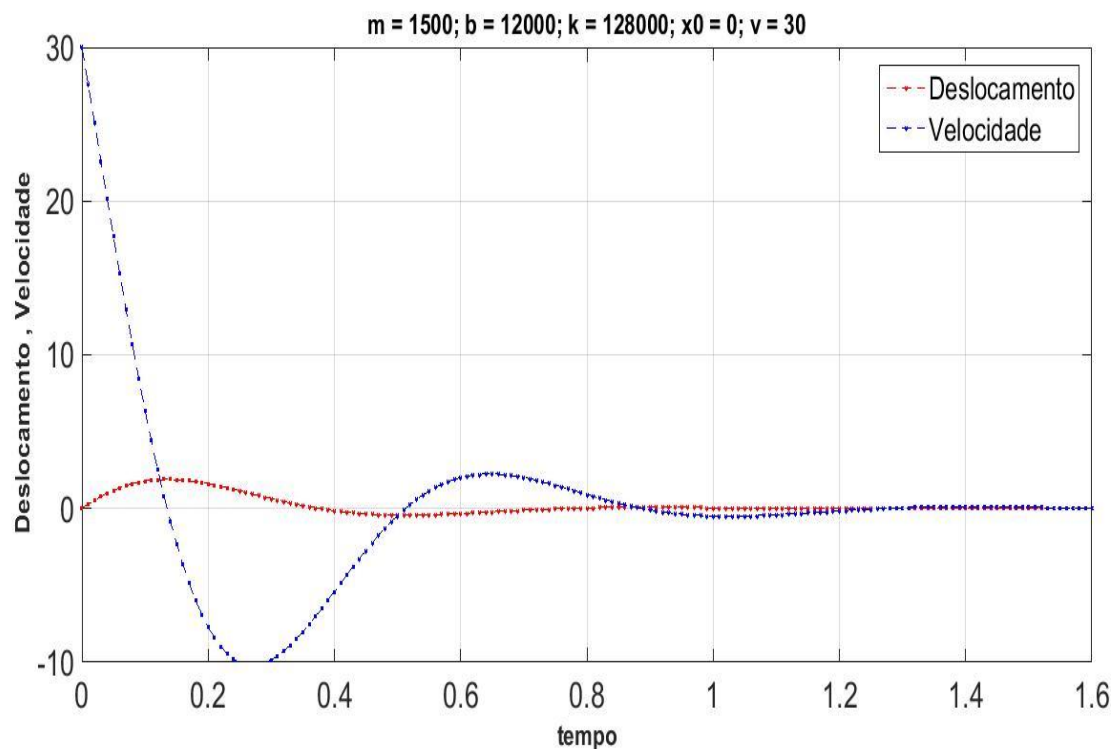


Figura 8. Gráfico Deslocamento-Velocidade (30 m/s)

A velocidade utilizada inicialmente foi de 30 m/s, como mostra a "Fig. 8". O resultado obtido analiticamente mostra a amplitude de vibração do automóvel diminuída de um fator de 0,282.

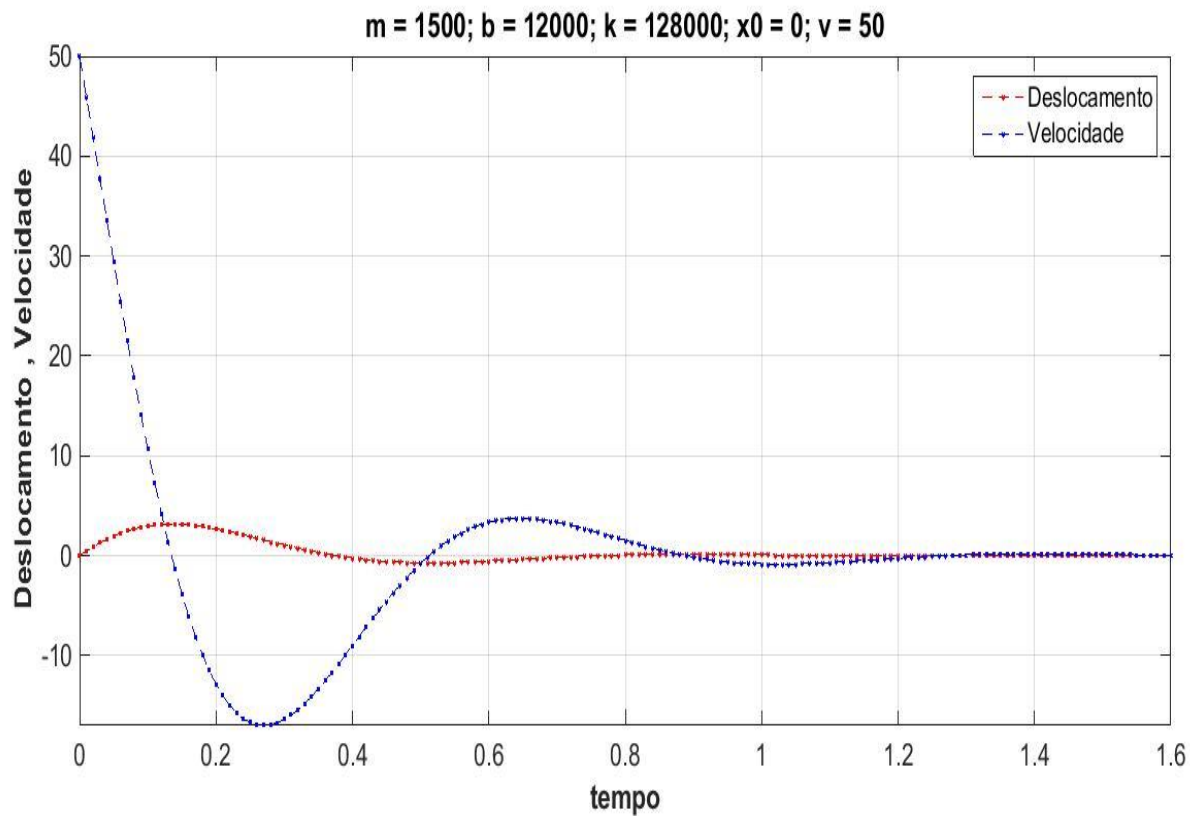


Figura 9. Gráfico Deslocamento-Velocidade (50 m/s)

A variação com a variável velocidade, resulta num aumento da amplitude do Deslocamento. Para um fator de amortecimento dentro dos padrões da zona de conforto, a velocidade influencia nas vibrações exercidas. Com a velocidade em 50 m/s, o gráfico da "Fig. 9", exemplifica o aumento da amplitude de deslocamento.

5. CONCLUSÃO

O sistema massa-mola-amortecedor foi analisado no software Matlab, usando a *ode45*, e também analisado matematicamente, seguindo as equações mostradas acima. Para uma superfície que varie senoidalmente, o carro ao atingir velocidades maiores, obtém deslocamentos maiores. O sistema considerado foi de apenas um grau de liberdade, o que limita os resultados obtidos. Mas levando em conta os métodos utilizados, pode-se obter um pressuposto do sistema real, ao qual deve ser considerado. O trabalho foi importante para verificar na prática o comportamento do veículo ao qual foi modelado. O estudo tende valorizar também o conforto e segurança do passageiro. É sugerido em trabalhos posteriores, as análises com mais graus de liberdade, afim de expandir a semelhança do sistema virtual e o real.

6. AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus, por iluminar o desenvolvimento deste trabalho, aos colaboradores que ajudaram no encaminhamento do mesmo. E ao CONEM, pela oportunidade de expor o trabalho desenvolvido.

7. REFERÊNCIAS

- Gillespie, T. D., 1992, Fundamentals of Vehicle Dynamics, Society of Automotive Engineers.
 Milliken, W. F., 1995, Race Car Vehicle Dynamics, Society of Automotive Engineers.
 Rowell, H. S., 1922/1923, Principles of vehicle suspension, Proceedings of the Institution of Automobile Engineers, vol. 17.
 Freitas Jr, L. M. P., 2006, Estudo da Dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo Macpherson [dissertação], Escola de Engenharia de São Carlos; São Carlos.
 Rao, Singiresu., 2008, Vibrações mecânicas, Pearson Education.
 Mucheroni, M.F., 2001, Vibrações mecânicas, EESC-USP, São Carlos, BR.
 Neto, Á. Costa., 2005, Dinâmica Veicular, Universidade de São Paulo, São Carlos, BR.

8. ANEXO

```
function Movimentoharmonicobase(Massa, Amortecimento, Rigidez, Posicao,
Velocidade, Amplitude, w0)
if nargin < 1
Massa = 1500;
Amortecimento = 12000;
Rigidez = 128000;
Posicao = 0;
Velocidade = 30;
Amplitude = 0.025;
w0 = ((Rigidez/Massa).^1/2);
end
tspan = [0:0.01: 2];
u0 = [Posicao; Velocidade];
[t,u] = ode45(@f,tspan,u0);
figure;
plot(t,u(:,1),'r*--', t, u(:,2), 'b*--', 'MarkerSize', 2, 'LineWidth', 0.5 );
title(['m = ' num2str(Massa), '; b = ' num2str(Amortecimento), '; k = '
num2str(Rigidez), ...
'; x0 = ' num2str(Posicao), '; v = ' num2str(Velocidade)]);
xlabel('tempo');
ylabel('Deslocamento , Velocidade'); grid on;
axis tight;
axis([tspan(1) tspan(end) -5, 5]);
hold on;
legend('Deslocamento', 'Velocidade');
hold off;
function dudt = f(t,u)
dudt = [ u(2); - (Amortecimento/Massa)*u(2) - (Rigidez/Massa)*u(1) +
(Amplitude/Massa)*cos(w0*t) ];
```

end
end

9. RESPONSABILIDADE AUTORAL

“Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho”.

RESPONSE OF A DAMPED SYSTEM FOR A BASE HARMONIC MOVEMENT IN A CAR

Sthefanny Helena Rodrigues de Brito, brito.sth@gmail.com¹
Ricardo Cardoso Soares, Eng.mec.ricardocardoso@gmail.com¹
Amaury Sousa Sá, amaurysousasa@gmail.com¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, Praça da Liberdade, 1597, 64000-040, Centro, Teresina -PI

Abstract. *The suspension system of a vehicle plays a key role in the insulation of vibrations from the track and other sources of excitations and has as one of its objectives: improvement of passenger comfort, maintaining the integrity of the loads, increasing security, providing better conditions floor-tire grip, etc. This paper refers to the mass-spring-damper system in a harmonic motion base, where a curve described by a mathematical function approximation is related directly by differential equations. Sought to introduce the history of the development, while exemplifying is algebraically your deductible, and the final solution to be added with the help of Matlab software to teaching demonstration.*

Keywords: *Matlab, Harmonic Motion Base, Mechanical Vibrations.*