



21-25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

Construção, modelagem e controle de um pêndulo invertido de baixo custo

Jessé Augusto dos Santos Paixão, jesseag.paixao@gmail.com¹

Vicente Lopes Junior, vicente@dem.feis.unesp.br¹

¹UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Brasil, 53, Centro, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil.

Resumo: O pêndulo invertido é um sistema muito estudado e abordado nos livros didáticos da área de sistemas de controle. Ele consiste basicamente de uma haste acoplada em um carro livre para se movimentar horizontalmente. O pêndulo invertido é um sistema instável e é muito utilizado para avaliar o desempenho de diferentes técnicas de controle. Este sistema tem sido muito explorado atualmente como uma plataforma didática utilizada para o ensino na área de sistemas de controle. No entanto, esta ferramenta didática ainda apresenta um alto custo, tornando inacessível para algumas instituições de ensino. Neste trabalho, o objetivo é a construção, modelagem e controle de um pêndulo invertido de baixo custo, utilizando a plataforma Arduino. Para a verificação da validade da modelagem proposta, considerando a linearização das equações de movimento ao redor da posição de equilíbrio estático na posição invertida, aplicou-se um controlador PID para o qual avaliou-se a eficiência em manter o pêndulo em sua posição de equilíbrio para pequenas perturbações.

Palavras-chave: Pêndulo invertido, PID, Arduino.

1. INTRODUÇÃO

Com o intuito de proporcionar uma formação acadêmica ampla nas principais áreas da engenharia para os futuros profissionais, as instituições de ensino superior têm buscado implementar ferramentas didáticas que permitem aos estudantes aplicar teoria e prática de forma conjunta, potencializando o aprendizado. No entanto, os custos de algumas dessas ferramentas didáticas são extremamente altos, dificultando o acesso a tais recursos.

Uma interessante plataforma didática existente no mercado atualmente para aplicação dos conceitos de sistemas de controle é o pêndulo invertido, que no entanto, apresenta um custo elevado no mercado. Considerando a importância da aplicação da teoria e prática no estudo de sistemas de controle, a dificuldade econômica para aquisição de plataformas didáticas comerciais e o interesse das instituições de ensino na utilização desses recursos, tem-se como proposta neste a apresentação do projeto desenvolvido de construção de um pêndulo invertido de baixo custo com implementação do sistema de controle utilizando a plataforma Arduino.

O pêndulo invertido é considerado um sistema instável pelo fato de que ele tende a se afastar da sua posição vertical a uma mínima perturbação, sendo necessário assim que seja aplicada uma força de controle adequada para restabelecer o equilíbrio (Ogata, 2010). Devido a sua simplicidade mecânica e a esta característica de ser dinamicamente instável, o sistema do pêndulo invertido é muito explorado para se avaliar o desempenho de diferentes técnicas de controle.

Sultan *et al.* (2003) comparam o sistema de controle da posição do pêndulo invertido a uma brincadeira realizada pelas crianças, na qual estas tentam equilibrar um cabo de vassoura na palma da mão ou no dedo.

A modelagem matemática deste sistema envolve equações diferenciais não-lineares, que, no entanto, podem ser linearizadas para a condição de uma pequena variação angular da haste. Esta abordagem linearizada do sistema é muito utilizada nas técnicas de controle clássico, como o controlador PID (Proporcional-Integrativo-Derivativo) que será abordado neste trabalho e tem se mostrado eficiente na solução do problema conforme apresentado nos trabalhos de Ribeiro (2007), Silva (2013) e Tripathy (2013).

2. CONSTRUÇÃO DO PÊNDULO INVERTIDO

O pêndulo invertido apresenta uma estrutura mecânica simples, constituído basicamente por um trilho e um carro com uma haste acoplada. A Figura 1 apresenta o pêndulo invertido construído, detalhando algum de seus componentes.

A estrutura do carro e trilho é muito semelhante a encontrada em impressoras. Sendo assim, aproveitando-se deste fato e visando uma redução de custos da plataforma com a utilização de peças acessíveis, foram reaproveitadas algumas peças de impressoras descartadas na própria instituição, entre as quais estão: o trilho do carro, o encoder linear acoplado



Figura 1: Protótipo final do pêndulo invertido

Tabela 1: Estimativa de orçamento para a construção do pêndulo invertido.

Componente	Preço
Haste de alumínio	R\$ 8,60
Carro	R\$ 20,00
Potenciômetro de precisão	R\$ 95,11
Arduíno Uno	R\$ 59,90
Driver motor ponte H L298N	R\$ 26,90
Encoder óptico	R\$ 19,90
Fonte CC 15v	R\$ 39,90
Motor CC	R\$ 49,90
Trilho e base	R\$ 50,00
Total	R\$370,21

embaixo do carro, utilizado para fazer a medição da posição do carro no trilho e o motor de corrente contínua.

A haste acoplada no carro foi construída com um tubo de alumínio. Esta haste foi fixada no potenciômetro de precisão utilizado, modelo Vishay 534. A utilização do potenciômetro de precisão para medição angular da posição da haste foi uma alternativa que causou uma grande redução de custos em comparação com plataformas deste tipo comercializadas atualmente, que utilizam encoder rotativo absoluto, um sensor de alto custo. Apesar de menor precisão, o potenciômetro utilizado atendeu as necessidades do projeto de forma satisfatória com baixo nível de ruídos e precisão adequada.

Para a fabricação do carro foi utilizado um processo de impressão 3D devido a necessidade de uma geometria mais complexa. Apesar do equipamento utilizado para impressão ser de alto custo, o custo de fabricação é baixo. Foi utilizado para o processo uma Impressora 3D - Cliever CL1 presente na instituição que tem como material base o filamento plástico PLA (Poliácido Láctico).

O sistema eletrônico foi montado utilizando a plataforma Arduino, responsável pela aquisição/envio de dados e a implementação do controlador PID utilizado no pêndulo invertido.

Para o controle do motor CC, foi necessário a utilização do módulo L298N conectado ao Arduino. Este módulo é um circuito comercial pronto, de baixo custo, que permite ao Arduino controlar a velocidade e o sentido de giro do motor de corrente contínua, que é alimentado externamente por uma fonte ajustável conectada ao L298N. A alimentação utilizada para motor foi de 15 V.

O custo total estimado para a construção do pêndulo invertido é apresentado na Tab. 1, baseado nos valores dos equipamento adquiridos e estimativas de valores das peças reaproveitadas.

3. MODELAGEM DO PÊNDULO INVERTIDO

Para a modelagem do pêndulo invertido optou-se por dividi-lo em dois sistemas acoplados. O primeiro da haste com o carro e o segundo do carro com motor de corrente contínua. O modelo proposto se baseou na modelagem desenvolvida por Silva (2013). A Figura 2 ilustra o sistema do pêndulo invertido e as variáveis consideradas na modelagem do sistema:

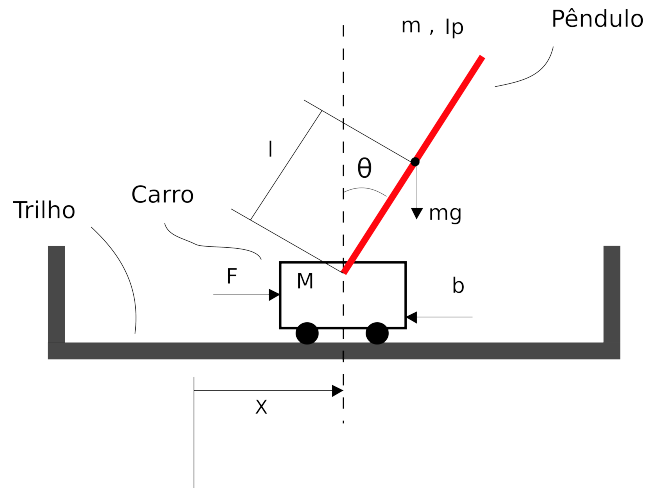


Figura 2: Esquema representativo do sistema do pêndulo invertido utilizado na modelagem.

3.1 Modelagem do sistema haste e carro

Para a modelagem do sistema composto pela haste e o carro aplicou-se a segunda lei de Newton, considerando o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. 2. O vetor posição do centro de massa da haste em relação a base inercial pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_{cm} = \begin{Bmatrix} x_p + l \sin(\theta) \\ y_p + l \cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

sendo x_p a posição horizontal do carro no trilho, y_p a posição vertical do carro no trilho e θ o ângulo da haste em relação e o eixo x.

Derivando a Eq. 1, obtém-se a velocidade do centro de massa da haste:

$$\dot{\mathbf{r}}_{cm} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p + l\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \dot{y}_p - l\dot{\theta}\sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Derivando a Eq. 2, obtém-se a aceleração do centro de massa da haste:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{cm} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p + l\ddot{\theta}\cos(\theta) - l\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ -l\ddot{\theta}\sin(\theta) - l\dot{\theta}^2\cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

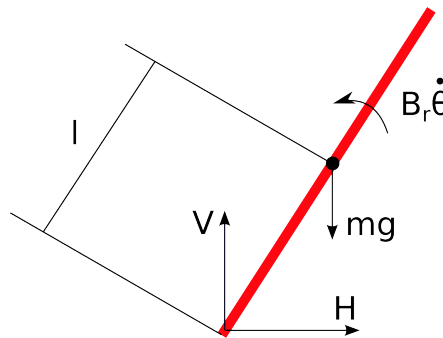


Figura 3: Diagrama de corpo livre da haste.

Do diagrama de corpo livre da Fig. 3 e aplicando-se o somatório de forças tem-se:

$$\sum \mathbf{F}_{cm} = m\ddot{\mathbf{r}}_{cm} = \begin{Bmatrix} H \\ V - mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

sendo m a massa da haste, g a aceleração da gravidade, H e V forças de reação nas direções horizontal e vertical respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\ddot{x}_p + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ -ml\ddot{\theta}\sin(\theta) - ml\dot{\theta}^2\cos(\theta) + mg \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Aplicando-se o somatório de momentos em relação ao centro de massa da haste, causados pelas forças representadas no diagrama de corpo livre da Fig. 3 obtém-se:

$$\sum \mathbf{M}_{cm} = I \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ V l \sin(\theta) - H l \cos(\theta) - B_r \dot{\theta} \end{Bmatrix} = I \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

sendo I o momento de inércia da haste e B_r a constante de amortecimento viscoso do eixo do servo-potenciômetro.

Da Equação 7 tem-se:

$$I \ddot{\theta} + B_r \dot{\theta} = V l \sin(\theta) - H l \cos(\theta) \quad (8)$$

sendo

Da Equação 5 em 8:

$$(I + m l^2) \ddot{\theta} + B_r \dot{\theta} - m g l \sin(\theta) = -m l \ddot{x}_p \cos(\theta) \quad (9)$$

Considerando a haste como um corpo rígido uniforme, o momento de inércia em relação ao centro de massa é $\frac{m l^2}{3}$. Logo, substituindo na Eq. 9 tem-se:

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} + B_r \dot{\theta} - m g l \sin(\theta) = -m l \ddot{x}_p \cos(\theta) \quad (10)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3 B_r}{4 m l^2} \dot{\theta} - \frac{3 g}{4 l} \sin(\theta) = -\frac{3}{4 l} \ddot{x}_p \cos(\theta) \quad (11)$$

Considerando a condição de que a haste será mantida na posição de equilíbrio, ou muito próxima dela para pequenas perturbação, θ será muito pequeno. Neste caso, $\sin(\theta) = \theta$ e $\cos(\theta) = 1$ e a Equação 11 pode ser linearizada, obtendo-se:

$$\ddot{\theta} + \frac{3 B_r}{4 m l^2} \dot{\theta} - \frac{3 g}{4 l} \theta = -\frac{3}{4 l} \ddot{x}_p \quad (12)$$

Portanto, obteve-se uma equação diferencial de segunda ordem, caracterizando o sistema como de segunda ordem. Sendo assim, é possível reescrever a equação em função das constantes padrões de um sistema desta ordem. Portanto, definindo-se as constantes

$$2\zeta\omega_n = \frac{3 B_r}{4 m l^2}, \omega_n^2 = \frac{3 g}{4 l}, K_p = \frac{3}{4 l} \quad (13)$$

Aplicando-se na Equação 12, obtém-se:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n \dot{\theta} - \omega_n^2 \theta = -K_p \ddot{x}_p \quad (14)$$

sendo ω_n é a frequência natural não amortecida, ζ é o coeficiente de amortecimento do sistema e K_p a constante de ganho estático do sistema.

Aplicando-se a transformada de Laplace na Eq. 14 para condições iniciais nulas, obtém-se a função transferência deste sistema:

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{-K_p s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2} \quad (15)$$

3.2 Modelagem do sistema carro e motor

A Figura 4 mostra um esquema representativo do sistema do carro com o motor de corrente contínua considerado na modelagem e será utilizado como base para o seu desenvolvimento.

A equação da armadura do motor de corrente contínua é dada por:

$$V_0 = E_a + i_a R_a \quad (16)$$

sendo V_0 a tensão de saída do amplificador, E_a a tensão na armadura de um motor, i_a a corrente na armadura do motor e R_a a resistência de armadura do motor.

As equações da tensão e corrente na armadura do motor CC são:

$$E_a = K_m \dot{\phi} \quad (17)$$

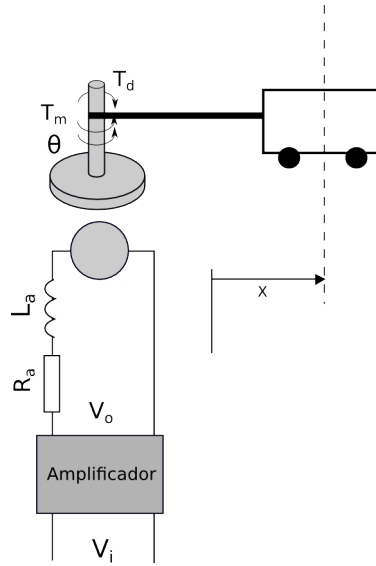


Figura 4: Esquema representativo da modelagem do sistema carro e motor.

$$i_a = \frac{1}{K_t} T_d \quad (18)$$

sendo K_m a constante de tensão induzida no motor, K_t a constante de torque do motor, $\dot{\phi}$ a velocidade angular do eixo do motor e T_d o torque requerido do motor.

Considerando a presença de um amplificador antes do motor de corrente contínua, conforme ilustrado na Fig. 4, tem-se que a equação da tensão de entrada no motor CC é:

$$V_1 = \frac{1}{K_a} V_0 \quad (19)$$

sendo V_i a tensão na entrada do amplificador e K_a o ganho constante do amplificador.

Logo, das Eqs. 16, 17, 18 e 19, obtém-se:

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} \left[\frac{K_m K_t}{R_a} \dot{\phi} r + r T_d \right] \quad (20)$$

sendo r o raio efetivo do eixo do motor

O torque total do motor (T_t) pode ser equacionado da seguinte forma:

$$T_t = I_m \ddot{\phi} + B_m \dot{\phi} + T_r \quad (21)$$

sendo B_m Constante de amortecimento viscoso do motor e I_m o momento de inércia do motor.

O torque resistente no motor (T_r) é dado por:

$$T_r = r F \quad (22)$$

A força F exercida na correia de transmissão do carro tem contribuição da força produzida para a movimentação do carro, da força de atrito entre o carro e o trilho e uma pequena parcela da componente horizontal da força desenvolvida na haste. Desprezando esta pequena parcela de força da haste, tem-se:

$$F = M \ddot{x}_p + B_c \dot{x}_p \quad (23)$$

sendo M a massa do carro e B_c a constante de amortecimento viscoso do carro.

Logo, das Eqs. 21, 22 e 23, obtém-se:

$$T_t = I_m \ddot{\phi} + B_m \dot{\phi} + r(M \ddot{x}_p + B_c \dot{x}_p) \quad (24)$$

Considerando $T_d = T_t$ e aplicando a Eq. 24 em 20, tem-se:

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} \left[\frac{K_m K_t}{R_a} \dot{\phi} r + r(I_m \ddot{\phi} + B_m \dot{\phi} + r(M \ddot{x}_p + B_c \dot{x}_p)) \right] \quad (25)$$

Aplicando-se as relações,

$$\Delta x_p = r \Delta \phi; \dot{x}_p = r \dot{\phi}; \ddot{x}_p = r \ddot{\phi} \quad (26)$$

na Equação 25 obtém-se:

$$V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} [(I_m + Mr^2)\ddot{x}_p + (\frac{K_m K_t}{R_a} + B_m + r^2 B_c)\dot{x}_p] \quad (27)$$

$$\frac{1}{\frac{R_a}{K_a K_t r} (\frac{K_m K_t}{R_a} + B_m + r^2 B_c)} V_i = \frac{R_a}{K_a K_t r} (I_m + Mr^2)\ddot{x}_p + \dot{x}_p \quad (28)$$

Definindo-se:

$$\tau = \frac{R_a}{K_a K_t r} (I_m + Mr^2) \quad (29)$$

$$K_c = \frac{1}{\frac{R_a}{K_a K_t r} (\frac{K_m K_t}{R_a} + B_m + r^2 B_c)} \quad (30)$$

e substituindo na Eq. 28, tem-se:

$$K_c V_i = \tau \ddot{x}_p + \dot{x}_p \quad (31)$$

sendo K_c a constante de ganho estático do sistema e a τ é a constante de tempo.

Aplicando a transformada de Laplace na Equação 31 para condições iniciais nulas, pode-se obter a função transferência da posição do carro pela tensão aplicada no motor CC, que fica:

$$\frac{X_p(s)}{V_i(s)} = \frac{K_c}{s(\tau s + 1)} \quad (32)$$

Aplicando uma mudança de variáveis na Eq. 31, adotando-se $dx_p = \dot{x}_p$ e $\dot{dx}_p = \ddot{x}_p$, obtém-se:

$$K_c V_i = \tau \dot{dx}_p + dx_p \quad (33)$$

Aplicando novamente a transformada de Laplace, agora na Eq. 33 para condições iniciais nulas, obtém-se a função transferência da velocidade do carro (DX_p) pela tensão aplicada no motor CC.

$$\frac{DX_p(s)}{V_i(s)} = \frac{K_c}{\tau s + 1} \quad (34)$$

Esse artifício de mudança de variáveis foi utilizado para realização do ensaio de obtenção dos parâmetros do modelo do conjunto carro e motor.

3.3 Modelagem do pêndulo convencional

Ribeiro (2007) apresenta em seu trabalho um procedimento na modelagem para estimação dos parâmetros do sistema da haste com o carro. Ao invés de trabalhar com a modelagem do pêndulo invertido ele propõe a utilização da modelagem do pêndulo convencional, no qual a haste é posicionada para baixo. Desta forma, o sistema pode ser ensaiado como um pêndulo simples e os parâmetros obtidos podem ser utilizados para o modelo do pêndulo invertido, já que o sistema é o mesmo, pois muda-se apenas a posição da haste.

A modelagem do pêndulo convencional foi suprimida neste trabalho, mas pode ser encontrada de forma detalhada em trabalhos como o de Silva (2013) e Ribeiro (2007), entre outros já citados neste artigo.

$$\ddot{\theta} + \frac{B_r}{(I + ml^2)} \dot{\theta} + \frac{mgl}{(I + ml^2)} \theta = 0 \quad (35)$$

A Equação 37 caracteriza um sistema de segunda ordem e pode ser escrito em sua forma-padrão considerando as seguintes constantes:

$$2\zeta\omega_n = \frac{B_r}{(I + ml^2)}, \omega_n^2 = \frac{mgl}{(I + ml^2)} \quad (36)$$

Obtendo-se:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n \dot{\theta} - \omega_n^2 \theta = 0 \quad (37)$$

As raízes da Eq. 37 são:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (38)$$

Como frequência natural amortecida do sistema ω_d de um sistema de segunda ordem pode ser escrita como $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, a solução da Eq. 37 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\theta(t) = K e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d(t) + a) \quad (39)$$

Analisando a Equação 39, nota-se que ela possui uma resposta senoidal amortecida pelo termo $e^{-\zeta\omega_n t}$. Sendo assim, baseado neste comportamento esta equação pode ser utilizada como base para a obtenção experimental dos parâmetros do haste.

4. ENSAIOS PARA IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

4.1 Ensaio para obtenção dos parâmetros da haste

Para a estimação dos parâmetros do modelo da haste, foi realizado um teste baseado na modelagem do pêndulo convencional apresentada na seção anterior. Para realização deste ensaio, o carro do pêndulo foi fixado em uma posição do trilho e a haste foi colocada em uma posição de 90° em relação a posição de equilíbrio do pêndulo convencional, conforme pode ser observado na Fig. 5. Em seguida, a haste foi solta, realizando um movimento oscilatório livre, característico de um pêndulo.

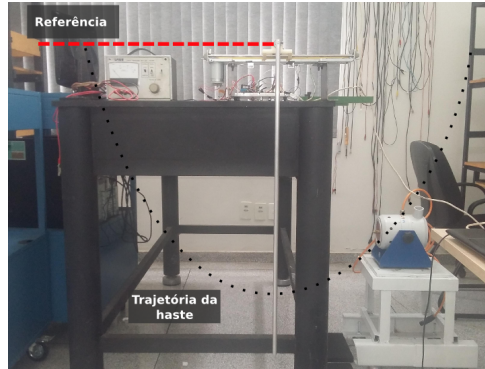


Figura 5: Ensaio para a estimação dos parâmetros do modelo da haste.

A aquisição de dados da posição angular da haste foi feita através da plataforma Arduino, responsável por enviar a leitura angular do potenciômetro ao computador. A Figura 6 mostra a curva obtida para o movimento oscilatório livre do pêndulo.

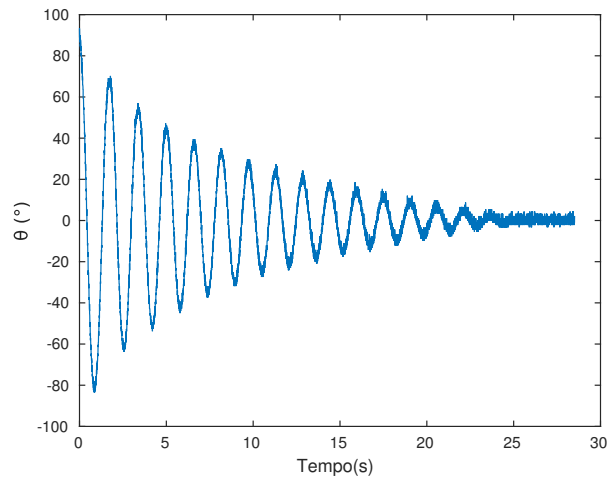


Figura 6: Curva experimental do ensaio para estimação dos parâmetros da haste.

Aplicando o método de decremento logarítmico foi possível obter o valor de ζ e ω_n :

$$\zeta = 0,047 \quad (40)$$

$$\omega_n = 3,72 \quad (41)$$

O comprimento do ponto de rotação da haste ao seu centro de massa, é metade do comprimento total da haste, que é de $L = 0,9m$, ou seja, $l = 0,45m$. Assim, a partir da Equação 13, obteve-se K_p e B_r :

$$K_p = 1,667 \quad (42)$$

$$B_r = 0,0125 \quad (43)$$

Portanto, aplicando todos os parâmetros obtidos na Equação 15 obteve-se a função transferência para a haste:

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{-1,667s^2}{s^2 + 0,3030s - 13,8454} \quad (44)$$

4.2 Ensaio do conjunto carro e motor

Para a obtenção dos parâmetros do modelo do sistema carro e motor foi realizado um ensaio baseado na resposta da velocidade do sistema para uma entrada degrau. De acordo com a Eq. 14 a função transferência é de primeira ordem, sendo assim, algumas das características para a entrada degrau são conhecidas. Seja uma entrada degrau de amplitude A aplicada no motor, a resposta tende ao valor de $A K_c$ a medida que o tempo aumenta e no momento em que $t=\tau$, a saída alcança o valor de $0.632AK$. Logo, é possível através dessas características determinar τ e K_c .

O resultado obtido para este ensaio pode ser visualizado na Fig. 7. A resposta experimental apresentou um elevado nível de ruído, devido ao atrito presente no trilho, que causa variações na velocidade durante o deslocamento do carro, sendo assim, aplicou-se uma suavização da curva para facilitar a determinação dos parâmetros da curva de resposta. Para este ensaio utilizou-se dez amostras, a partir das quais foi possível estimar os parâmetros médios de τ e K_c .

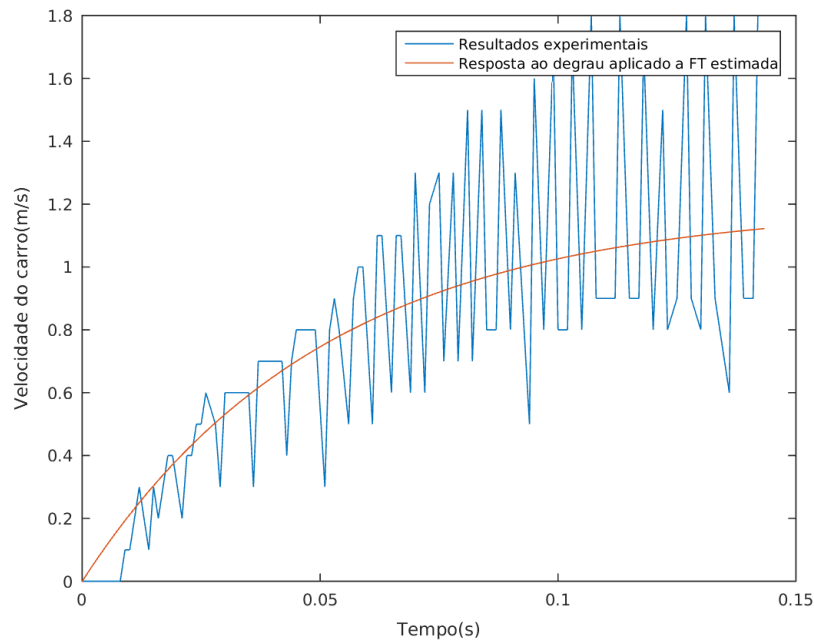


Figura 7: Resposta do modelo do sistema carro e motor a entrada degrau comparada com os dados experimentais.

A amplitude do degrau aplicado foi de $A = 15V$. Os parâmetros obtidos foram:

$$K_c = 0,0796 \quad (45)$$

$$\tau = 0,051 \quad (46)$$

Portanto, a função de transferência do sistema do carro com motor obtida foi:

$$\frac{X_p(s)}{V_i(s)} = \frac{1,194}{s(0,051 + 1)} \quad (47)$$

5. CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO

5.1 Identificação da planta

Acoplando as duas funções transferências obtidas para os dois sistemas analisados separadamente obteve-se a função transferência do sistema do pêndulo invertido. Esse processo é ilustrado no diagrama de blocos apresentado na Fig. 8.

5.2 Implementação do controlador PID

Após a obtenção da função transferência completa do sistema do pêndulo invertido foi possível a projetar o controlador PID. O controlador PID é muito utilizado em sistemas de controle devido a sua simplicidade de projeto, pois é necessário determinar apenas 3 parâmetros (K_p , K_i e K_d).

Foram definidas inicialmente algumas especificações para o projeto de controle da resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID, sendo estas: máximo pico (M_p) menor ou igual a 0.05 rad e tempo de acomodação (t_s) em torno de 2 segundos.

A partir das plantas identificadas, a obtenção dos parâmetros do controlador PID necessários para atender as especificações de projeto tornou-se muito simples, pois com a função transferência é possível simular computacionalmente

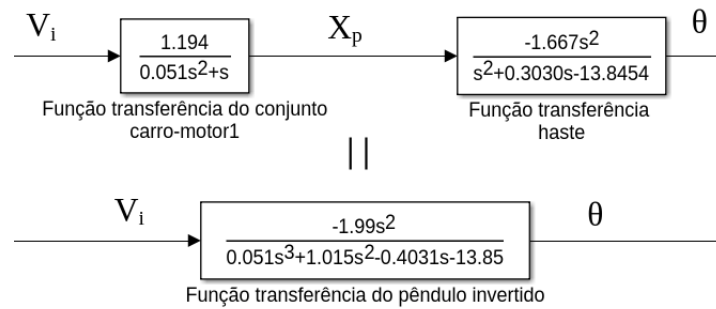


Figura 8: Modelo da planta do pêndulo invertido com haste simples.

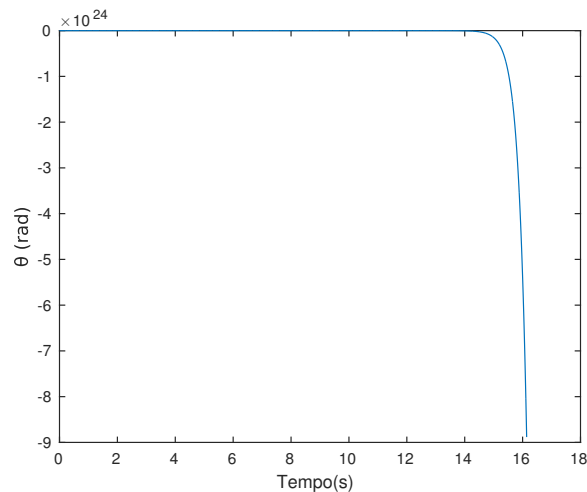


Figura 9: Resposta ao impulso unitário sem o controlador PID.

a resposta do sistema para diferentes entradas. A resposta do sistema a um impulso unitário sem controlador pode ser visualizada na Fig. 9, que conforme, o esperado para o pêndulo invertido apresenta instabilidade.

A partir da análise da resposta da função de transferência do sistema em malha fechada com o controlador PID para uma entrada de impulso unitário para diferentes valores dos parâmetros do controlador foi possível ajustar os parâmetros para atenderem as especificações iniciais de projeto, baseado na característica de influência no comportamento do sistema de cada parâmetro do controlador. Após algumas tentativas, obteve-se os seguintes valores:

$$\begin{cases} Kp = 300 \\ Ki = 700 \\ Kd = 20 \end{cases} \quad (48)$$

A resposta do pêndulo invertido a um impulso unitário com o controlador projetado pode ser visualizada na Fig. 10, que conforme observa-se no comportamento, atende de forma satisfatória as especificações de projeto definidas inicialmente.

Com os parâmetros do controlador PID definidos implementou-se no Arduino o programa com o controlador, que apresentou resultados satisfatórios para pequenas perturbações. No link <https://goo.gl/HPN1Eg> pode-se visualizar um vídeo com os resultados obtidos para a implementação do controlador PID projetado para o pêndulo invertido.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo buscou apresentar os resultados obtidos para o projeto desenvolvido de construção de uma plataforma didática de um pêndulo invertido com um baixo custo, envolvendo desde o processo de modelagem até o projeto e implementação de um controlador PID.

A redução de custo atingida com o projeto apresentado foram expressivas com um custo final em torno de R\$400,00 e além de tudo, utilizando materiais muito acessíveis, tornando-a uma ferramenta didática que pode ser replicável em outras instituições e por pessoas interessadas em estudar sistemas de controle. Essa redução de custos foi possível principalmente devido a aplicação de sensores de baixo custo, como o potenciômetro de precisão, e a utilização da placa Arduino para aquisição dos dados e implementação do controlador.

O modelo obtido para o pêndulo invertido pode ser ainda utilizado para avaliar diferentes outras técnicas de controle. Sendo assim, pretende-se em trabalhos futuros explorar uma técnica de controle moderno, a de realimentação no espaço de estados, para comparação dos resultados com o controlador PID.

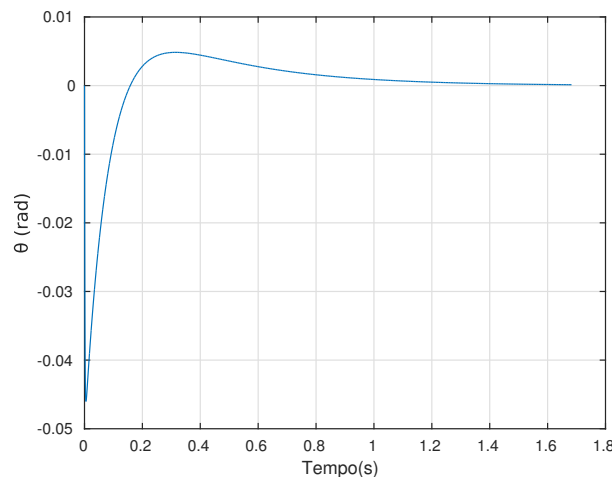


Figura 10: Resposta ao impulso unitário com o controlador PID.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro neste projeto de iniciação científica.

8. REFERÊNCIAS

- Ogata, K., 2010. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 4th edition. 60-61.
- Ribeiro, R., 2007. *IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO*. Master's thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ.
- Silva, E.A.d., 2013. *Construção, modelagem e controle de um pêndulo invertido com CLP e software scada*. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.
- Sultan *et al.*, 2003. "Inverted pendulum, analysis, design and implementation". *IEEE Visionaries*.
- Tripathy, P.K., 2013. "Self-balancing bot using concept of inverted pendulum". Technical report, National Institute of Technology Rourkela.

9. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

O autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

CONSTRUCTION, MODELING AND CONTROL OF A LOW-COST INVERTED PENDULUM

Jessé Augusto dos Santos Paixão, jesseag.paixao@gmail.com¹

Vicente Lopes Junior, vicente@dem.feis.unesp.br¹

¹UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Brasil, 53, Centro, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil.

Abstract: *Inverted pendulum is a system frequently studied in control books. It basically consists of a rod attached to a free car to move horizontally. The inverted pendulum is considered an unstable system and is widely used to evaluate the performance of different control techniques. This system has been very currently exploited as an educational platform used for teaching in the control systems area. However, this tool still has a high cost, making it inaccessible to some educational institutions. In this paper, the goal is the construction, modeling and control of a low-cost inverted pendulum using the Arduino platform. To check the validity of the proposed model, considering the linearization of the equations of motion around the static equilibrium position in the inverted position, applied to a PID controller to which evaluated the efficiency in maintaining the pendulum in its equilibrium position to small perturbations.*

Keywords: *Inverted pendulum, PID, Arduino.*