

CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA

21-25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

ESTUDO NUMÉRICO SOBRE AS TRANSFERÊNCIAS DE LONGA DURAÇÃO ENTRE ÓRBITAS COAXIAIS NÃO-COPLANARES

CONEM_2016_0875

Resumo: Neste trabalho é apresentado um estudo numérico para as transferências de longa duração entre órbitas elípticas coaxiais não-coplanares realizadas por sistema propulsivo a baixo empuxo e potência limitada em um campo central Newtoniano. Este estudo é baseado em uma solução analítica obtida pelo método de média e por transformações canônicas. Diversas manobras de transferência são então simuladas considerando-se diferentes condições finais e duração. Curvas descrevendo o comportamento da variável de consumo como função da duração da transferência são construídas. Verifica-se que o consumo de combustível decresce com a duração da manobra, e que manobras com modificações em semieixo maior ou em inclinação do plano da órbita gastam relativamente mais combustível em comparação com manobras de modificação da excentricidade.

Palavras-chave: transferências a baixo empuxo e potência limitada, transferências de longa duração, transferências entre órbitas coaxiais não-coplanares.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos trinta anos, importantes missões espaciais têm utilizado sistemas de propulsão a baixo empuxo. As duas missões pioneiras que empregaram tais sistemas de propulsão foram a Deep Space 1 do JPL-NASA e a ESA-SMART1. Deep Space 1 foi a primeira nave espacial interplanetária a utilizar a propulsão elétrica solar. Ela foi desenvolvida pela NASA no programa novo milênio para testar novas tecnologias para futuros programas espaciais. Foi lançada em 24 de outubro de 1998. A missão da Deep Space 1 terminou em 18 de dezembro de 2001, quando seu suprimento de combustível esgotou. SMART-1 foi a primeira de uma série de missões de pesquisas avançadas em tecnologia da ESA. Foi usada para testar a propulsão elétrica solar e outras tecnologias do espaço profundo. Foi lançada em 27 de setembro de 2003. A missão da SMART-1 terminou em 3 de setembro de 2006, quando a nave espacial, em uma manobra planejada, impactou a superfície lunar. Interessantes detalhes sobre essas missões espaciais podem ser encontrados em Rayman et al (2000), Racca et al (2002) e Camino et al (2005).

Sistemas de propulsão a baixo empuxo são caracterizados por elevado impulso específico e baixo empuxo (a relação entre a máxima aceleração propulsiva e a aceleração da gravidade ao nível do mar é pequena, entre 10^{-4} e 10^{-2}) e tem seus maiores benefícios para missões interplanetárias de alta energia (Marec, 1979; Racca, 2003). Ao longo das últimas décadas, vários pesquisadores têm obtido soluções numéricas e analíticas para diversas manobras envolvendo órbitas iniciais e finais específicas e perfis de propulsão definidos (Gobet, 1964, 1965; Edelbaum, 1964, 1965, 1966; Marec e Vinh, 1977, 1980; Sukhanov, 2000; Kiforenko, 2005; Bonnard et al, 2006; da Silva Fernandes e Carvalho, 2008; Jamison e Coverstone, 2010). Na maioria dos estudos analíticos, métodos de média são aplicados e soluções das equações médias são obtidas de forma que apenas o comportamento secular das soluções ótimas é discutido.

Neste trabalho é apresentado um estudo numérico para as transferências de longa duração entre órbitas elípticas coaxiais não-coplanares realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada em um campo central Newtoniano. Este estudo é baseado em uma solução analítica obtida pelo método de média e por transformações canônicas. O problema de otimização associado às transferências entre órbitas coaxiais não-coplanares é formulado como problema de Mayer da teoria de controle ótimo com o estado definido pelo semieixo maior, pela excentricidade, pela inclinação do plano da órbita ou pela longitude do nodo ascendente, em função do tipo de manobra considerada, e pela variável de consumo. Depois de aplicar o conjunto de condições necessárias fornecidas pelo Princípio de Máximo

de Pontryagin e determinar a função Hamiltoniana máxima que descreve as trajetórias extremas, os termos de curto período são eliminados utilizando-se o conceito de média. A função Hamiltoniana máxima obtida pelo processo de média descreve as trajetórias extremas para transferências de longa duração. Um conjunto de integrais primeiras é derivado para o sistema de equações diferenciais médias e soluções analíticas em forma fechada são obtidas por meio da teoria de Hamilton-Jacobi. Uma breve discussão sobre a existência de pontos conjugados é apresentada. A precisão da solução analítica para manobras de longa duração é estabelecida comparando-a com uma solução numérica das equações completas que descrevem as trajetórias extremas considerando-se um mesmo conjunto de condições iniciais para diversas manobras. A partir desta solução analítica é descrito um algoritmo de Newton-Raphson para resolução do problema de valor de contorno que consiste em sair de uma órbita inicial e atingir uma órbita final em um tempo especificado. Diversas manobras de transferência são então simuladas considerando-se diferentes condições finais e duração. Curvas descrevendo o comportamento da variável de consumo como função da duração da transferência são construídas. Verifica-se que o consumo de combustível decresce com a duração da manobra e que manobras com modificações em semieixo maior ou em inclinação do plano da órbita são relativamente custosas em comparação com manobras de modificação da excentricidade.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Nesta seção o problema transferências de longa duração entre órbitas elípticas coaxiais não-coplanares realizadas por sistema propulsivos a baixo empuxo e potência limitada em um campo central Newtoniano é formulado como um problema de Mayer da teoria do controle ótimo.

Um sistema de propulsão a baixo empuxo e potência limitada é caracterizado por um baixo nível de aceleração e elevado impulso específico. Para este tipo de sistema, o consumo de combustível é descrito pela variável J definida por (Marec, 1979)

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \gamma^2 dt, \quad (1)$$

onde γ denota a magnitude do vetor aceleração propulsiva γ , utilizado como variável de controle. A variável de consumo J é uma função monotonicamente crescente da massa m do veículo espacial,

$$J = P_{\max} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} \right),$$

onde $P_{\max}$ é a potência máxima e m_0 é a massa inicial. A minimização do valor final da variável de consumo J_f é equivalente a maximização de m_f .

O movimento de um veículo espacial P, propulsado por um motor de potência limitada em um campo de força central Newtoniano, pode ser descrito através das equações de Gauss conhecidas da Mecânica Celeste (Battin, 1987). No entanto, de acordo com Marec e Vinh (1977, 1980), as transferências ótimas entre órbitas coaxiais são transferências coaxiais, ou seja, o argumento do pericentro não muda durante a transferência, e duas classes de manobras estão associadas às transferências entre órbitas coaxiais não-coplanares: manobra de modificação da inclinação do plano orbital e manobra de modificação da longitude do nodo ascendente. Para a primeira manobra, $\omega = 0^\circ$ (pericentros alinhados) ou $\omega = 180^\circ$ (pericentros em oposição) e $\Omega = 0^\circ$, e, para a segunda, $\omega = 90^\circ$ ou 270° e $I = 90^\circ$. Desta forma, tem-se que as equações de estado, que descrevem o problema de transferir o veículo espacial do estado inicial $(a_0, e_0, I_0$ or $\Omega_0, M_0, 0)$ no instante t_0 para o estado final $(a_f, e_f, I_f$ or $\Omega_f, M_f, J_f)$ no instante t_f , tal que a variável de consumo final seja um mínimo, são expressas por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [e \sin f R + (1+e \cos f) S], \quad (2.a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin f R + (\cos E + \cos f) S], \quad (2.b)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \cos f W, \quad (2.c)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[\left(\cos f - \frac{2e}{1+e \cos f} \right) R - \sin f \left(1 + \frac{1}{1+e \cos f} \right) S \right], \quad (2.d)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} (R^2 + S^2 + W^2), \quad (2.e)$$

onde a , e , I , Ω , ω , M são os elementos orbitais clássicos: a é o semieixo maior, e é a excentricidade, I é a inclinação do plano orbital, Ω é a longitude do nodo ascendente, ω é o argumento do pericentro, and M é a anomalia média. R , S e W são, respectivamente, componente radial, circunferencial e normal da aceleração de empuxo. E é a anomalia excêntrica, f é a anomalia verdadeira e n é o movimento médio, $n^2 a^3 = \mu$, com μ denotando o parâmetro gravitacional. A variável θ é introduzida para denotar a inclinação do plano orbital ou a longitude do nodo ascendente de acordo com a manobra considerada. O sinal superior (inferior) refere-se a manobra com a mudança na inclinação do plano orbital com pericentros alinhados (pericentros em oposição) ou manobra com mudança na longitude do nodo ascendente com $\omega = 90^\circ$ (ou 270°).

De acordo com o Princípio Máximo de Pontryagin (Pontryagin et al., 1962), as variáveis adjuntas p_a , p_e , p_θ , p_M e p_J são introduzidas e a função Hamiltoniana é formada usando o lado direito das Eqs. (2),

$$\begin{aligned} H = & np_M + \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2a \left[e \sin f R + (1+e \cos f) S \right] p_a + (1-e^2) \left[\sin f R + (\cos E + \cos f) S \right] p_e \right. \\ & + \frac{(1-e^2)^{3/2}}{e} \left[\left(\cos f - \frac{2e}{1+e \cos f} \right) R - \sin f \left(1 + \frac{1}{1+e \cos f} \right) S \right] p_M \\ & \left. + \left[\pm \left(\frac{r}{a} \right) \cos f W \right] p_\theta \right\} + \frac{1}{2} (R^2 + S^2 + W^2) p_J. \end{aligned} \quad (3)$$

Os controles devem ser selecionadas dentre as variáveis de controle admissíveis, R , S e W de forma que a função Hamiltoniana alcance o seu máximo ao longo da trajetória ótima. Assim, as componentes da aceleração ótima são:

$$R^* = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \left[(2ae \sin f) p_a + (1-e^2) \sin f p_e + \frac{(1-e^2)^{3/2}}{e} \left(\cos f - \frac{2e}{1+e \cos f} \right) p_M \right] \quad (4.a)$$

$$S^* = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \left[2a(1+e \cos f) p_a + (1-e^2)(\cos E + \cos f) p_e - \frac{(1-e^2)^{3/2}}{e} \sin f \left(1 + \frac{1}{1+e \cos f} \right) p_M \right] \quad (4.b)$$

$$W^* = \pm \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right) \cos f p_\theta. \quad (4.c)$$

Notamos que a variável adjunta p_J é uma integral primeira do sistema canônico descrito pela Hamiltoniana máxima e seu valor, obtido das condições de transversalidade, é -1 .

Desta forma, segue que a função Hamiltoniana máxima pode ser colocada na forma

$$H^* = H_0 + H_\gamma^*, \quad (5)$$

onde $H_0 = np_M$ denota a Hamiltoniana não perturbada e $H_\gamma^* = (R^{*2} + S^{*2} + W^{*2})/2$, é a parte relacionada à aceleração ótima. R^* , S^* e W^* são expressos em termos dos elementos orbitais e suas adjuntas pelas Eqs (4).

O problema de determinar uma solução analítica de primeira ordem para o sistema de equações diferenciais, descrito pela Hamiltoniana máxima H^* pode ser resolvido por meio da teoria de transformações canônicas e por métodos de perturbações, conforme descrito em da Silva Fernandes e Carvalho (2015).

3. SOLUÇÃO ANALÍTICA

A fim de obter uma solução analítica para o problema envolvendo manobras de longa duração, emprega-se o conceito de média (Marec e Vihn, 1980):

$$\bar{H}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H^* dM.$$

Desta forma, segue que

$$\bar{H}^* = \frac{a'}{2\mu} \left\{ 4a'^2 p_a'^2 + \frac{5}{2}(1-e'^2) p_e'^2 + \frac{(1+4e'^2)}{2(1-e'^2)} p_\theta'^2 \right\}. \quad (6)$$

A apóstrofe denota as variáveis médias.

Considere a transformação de Mathieu definida por:

$$a' = a'' \quad e' = \sin \varphi \quad \theta' = \theta'' \quad p_a' = p_a'' \quad p_e' = \frac{p_\varphi''}{\cos \varphi} \quad p_\theta' = p_\theta''. \quad (7)$$

As novas variáveis são denotadas pela apóstrofe dupla.

A função Hamiltoniana $\bar{H}^*$ é invariante em relação a esta transformação; logo

$$F'' = \frac{a''}{2\mu} \left\{ 4a''^2 p_a''^2 + \frac{5}{2} p_\varphi''^2 + \frac{1}{2}(1+5 \tan^2 \varphi) p_\theta''^2 \right\}. \quad (8)$$

O sistema canônico descrito pela função Hamiltoniana $\bar{H}^*$ possui as seguintes integrais primeiras:

$$\frac{a''}{2\mu} \left\{ 4a''^2 p_a''^2 + \frac{5}{2} p_\varphi''^2 + \frac{1}{2}(1+5 \tan^2 \varphi) p_\theta''^2 \right\} = E, \quad (9)$$

$$p_\varphi''^2 + p_\theta''^2 \tan^2 \varphi = C_1^2, \quad (10)$$

$$p_\theta'' = C_2, \quad (11)$$

E, $C_i, i=1,2$ são constantes.

Utilizando o conjunto de integrais primeiras definido pelas Eqs (9), (10) e (11), pode-se obter uma solução analítica em forma fechada para o sistema canônico descrito pela função Hamiltoniana $\bar{H}^*$, aplicando-se a teoria de Hamilton-Jacobi e a técnica de separação de variáveis (Lanczos, 1970), conforme discutido em da Silva Fernandes e Carvalho (2015). Esta solução é dada através das seguintes equações

$$a''(t) = \frac{a_0''}{1 + \frac{4a_0''}{\mu} \left(\frac{1}{2} E t^2 - a_0'' p_{a_0}'' t \right)}, \quad (12)$$

$$a'' \sin^2 k_0 = a_0'' \sin^2 (\sqrt{2} \psi + k_0), \quad (13)$$

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{5(C_1^2 + C_2^2)}} (\tau - \tau_0), \quad (14)$$

$$\sin \varphi = \sin k_1 \sin \tau, \quad (15)$$

$$\theta'' = k_2 + \tan^{-1} (\tan \tau / \sec k_1) - \frac{4}{5} \tau \cos k_1, \quad (16)$$

$$p_a''^2 = \left(\frac{a_0''}{a''} \right)^3 p_{a_0}''^2 + \frac{1}{8} p_{\theta_0}''^2 (5 \sec^2 k_1 - 4) \left(\frac{a_0''}{a''^3} - \frac{1}{a''^2} \right), \quad (17)$$

$$p_\varphi''^2 = p_{\theta_0}''^2 (\sec^2 k_1 - \sec^2 \varphi), \quad (18)$$

$$p''_{\theta} = p''_{\theta_0}, \quad (19)$$

com as constantes auxiliares k_0 , k_1 e k_2 definidas como funções do valor inicial das variáveis adjuntas por

$$\csc^2 k_0 = \frac{8(a''_0 p''_{a_0})^2 + p''_{\theta_0}{}^2 (5 \sec^2 k_1 - 4)}{p''_{\theta_0}{}^2 (5 \sec^2 k_1 - 4)}, \quad (20)$$

$$\sec^2 k_1 = \frac{p''_{\theta_0}{}^2 + p''_{\theta_0}{}^2 \sec^2 \varphi_0}{p''_{\theta_0}{}^2}, \quad (21)$$

$$k_2 = \theta''_0 - \tan^{-1}(\tan \tau_0 / \sec k_1) + \frac{4}{5} \tau_0 \cos k_1. \quad (22)$$

As constantes C , C_1 , C_2 e E também podem ser escritas como funções do valor inicial das variáveis adjuntas:

$$C^2 = \frac{1}{5} p''_{\theta_0}{}^2 (5 \sec^2 k_1 - 4)$$

$$C_2 = p''_{\theta_0}$$

$$C_1^2 = p''_{\theta_0}{}^2 + p''_{\theta_0}{}^2 \tan^2 \varphi_0$$

$$4\mu E = a''_0 \left(8(a''_0 p''_{a_0})^2 + p''_{\theta_0}{}^2 (5 \sec^2 k_1 - 4) \right).$$

As condições iniciais nas equações acima são definidas por $a''(0) = a''_0$, $e''(0) = \sin \varphi_0$ e $\theta''(0) = \theta''_0$, e, τ_0 é obtido da Eq. (12); isto é, $\sin \varphi_0 = \sin k_1 \sin \tau_0$.

O consumo de combustível ao longo de uma trajetória extremal é dado por

$$J = E(t - t_0).$$

As trajetórias extremas determinadas da aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin são candidatas a trajetórias ótimas. A fim de assegurar a otimalidade local dessas trajetórias, é necessário investigar a existência de pontos conjugados. De acordo com Marec e Vinh (1980) e da Silva Fernandes e Carvalho (2015), os pontos conjugados são dados pelas raízes da seguinte equação

$$(1 + 4 \sin^2 k_1) \sin(\tau - \tau_0) + 4(\tau - \tau_0) \sin^2 k_1 \cos \tau \cos \tau_0 = 0.$$

Se um ponto conjugado τ^* existe, ou, equivalentemente, φ^* (veja Eqn. (15)), então o extremal não fornece um mínimo local.

Os passos de um algoritmo iterativo para resolver o problema de valor de contorno em dois pontos, que consiste em transferir o veículo espacial de uma órbita inicial $O_0 : (a_0, e_0, \theta_0)$ para uma órbita final $O_f : (a_f, e_f, \theta_f)$ com um tempo de voo fixado, podem ser descritos como:

1. Para um determinado conjunto de condições iniciais (a_0, e_0) e condições finais (a_f, e_f) , calcule $\alpha_f = a_f / a_0$, $\varphi_0 = \sin^{-1} e_0$ e $\varphi_f = \sin^{-1} e_f$;
2. Escolha um valor inicial para k_1 ;
3. Calcule τ_0 e τ_f da Eq. (15);

4. Determine $\theta''(t_f)$ a partir das Eqs. (16) e (22);
5. Se $\theta''(t_f) \neq \theta_f''$, ajuste o valor de k_1 (através de um algoritmo de Newton-Raphson) e repita as etapas 2 e 3 até $|\theta''(t_f) - \theta_f''| < \delta$, onde δ é uma pequena quantidade prescrita;
6. Calcule $\psi_f = \frac{1}{5} \sqrt{1 + 4 \sin^2 k_1} (\tau - \tau_0)$;
7. Calcule $\left(\frac{u_f}{v_0} \right) = \sqrt{1 - 2 \sqrt{\frac{a_0''}{a_f''}} \cos(\sqrt{2} \psi_f) + \left(\frac{a_0''}{a_f''} \right)}$;
8. Compute $\tan k_0 = \frac{\sin(\sqrt{2} \psi_f)}{\sqrt{a_f''} - \cos(\sqrt{2} \psi_f)}$;
9. Calcule sucessivamente p_{a_0}'' , p_{θ_0}'' e p_{ϕ_0}'' .

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, são considerados dois tipos de problemas: um problema direto que corresponde a gerar trajetórias extremas para um determinado conjunto de condições iniciais definidas para as variáveis de estado e adjuntas, e, um problema indireto que envolve a resolução do problema de valor de contorno em dois pontos, que consiste em ir de uma órbita inicial $O_0 : (a_0, e_0, \theta_0)$ no instante inicial $t_0 = 0$ para uma órbita final $O_f : (a_f, e_f, \theta_f)$ no instante final fixado $t_f = T$. Na análise do problema direto, é apresentada uma comparação entre a solução analítica secular e uma solução numérica obtida pela integração das equações diferenciais descritas pela função Hamiltoniana máxima, definida a partir das Eqs (4) e (5), e, a precisão da solução analítica é estabelecida. Um algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg de 4 e 5 ordens, com controle de passo, tolerância de erro relativo de 10^{-11} e tolerância de erro absoluto de 10^{-12} (Forsythe et al, 1977), tem sido utilizado nas integrações numéricas.

As Figuras 1 e 2 mostram os resultados da comparação entre a solução analítica secular e a solução numérica. Dois conjuntos de condições iniciais (variáveis de estado e adjuntas) e duração de transferência, definidos na Tabela 1, são utilizados na comparação. Nessa tabela e em todas as figuras apresentadas ao longo do texto, as variáveis de estado são expressas em unidades canônicas (normalizadas), exceto a inclinação do plano orbital que é dada em graus. Note a excelente concordância entre a solução analítica secular e a solução numérica: as amplitudes dos termos de curto período são pequenas. A diferença entre a solução numérica e a solução analítica secular diminui com o aumento da duração da transferência. Estes resultados sugerem que a solução analítica secular pode ser usada na resolução do problema de valor contorno em dois pontos que caracteriza o problema de transferir um veículo espacial de uma órbita inicial para uma órbita final.

Tabela 1. Conjunto de condições iniciais e duração da transferência.

	MANOBRA 1	MANOBRA 2
a_0	1.00	1.00
e_0	0.10	0.20
I_0 (graus)	10.0	18.0
p_{a_0}	5.9×10^{-4}	3.687×10^{-4}
p_{e_0}	5.9×10^{-4}	3.687×10^{-4}
p_{I_0}	2.0×10^{-4}	1.250×10^{-4}
$t_f - t_0$	200	500

Tabela 2: Conjunto de condições finais.

ÓRBITAS FINAIS	MANOBRAS							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a_f	2.5	2.5	1.5	1.5	2.5	2.5	1.5	1.5
e_f	0.15	0.15	0.15	0.15	0.25	0.25	0.4	0.4
I_f (graus)	15	20	15	20	15	20	15	20

Conforme mencionado no parágrafo anterior, a solução analítica secular fornece uma solução suficientemente precisa para as trajetórias extremas relativas às transferências de longa duração. Com base na solução analítica, é desenvolvido um estudo sobre o consumo de combustível como função da duração da manobra. Um conjunto de oito manobras distintas, descritas na Tabela 2, é considerado. A órbita inicial O_0 é a mesma para todas as manobras, sendo definida pelo seguinte conjunto de elementos orbitais: $a_0 = 1.0$ unidade canônica, $e_0 = 0.1$ e $I_0 = 10.0$ graus. O valor final da variável de consumo J é expresso em unidades canônicas. Curvas da variável de consumo J como função da duração da manobra são apresentadas na Figura 3.

Comparando, por exemplo, os pares de manobras 1-2, 1-3 e 3-4, verifica-se que as manobras com modificação em inclinação consomem mais combustível que as manobras com modificação em semieixo maior (note que estes pares de manobras envolvem a mesma variação em excentricidade). De forma semelhante, comparando, por exemplo, os pares de manobras 1-3, 1-5 e 1-7, verifica-se que as manobras com modificação em semieixo maior consomem mais combustível que as manobras com modificação em excentricidade (note que estes pares de manobras envolvem a mesma variação em inclinação). De forma geral, o consumo de combustível decresce com a duração da manobra e que manobras com modificações em semieixo maior ou em inclinação do plano da órbita são relativamente custosas em comparação com manobras de modificação da excentricidade, dependendo naturalmente da amplitude da manobra.

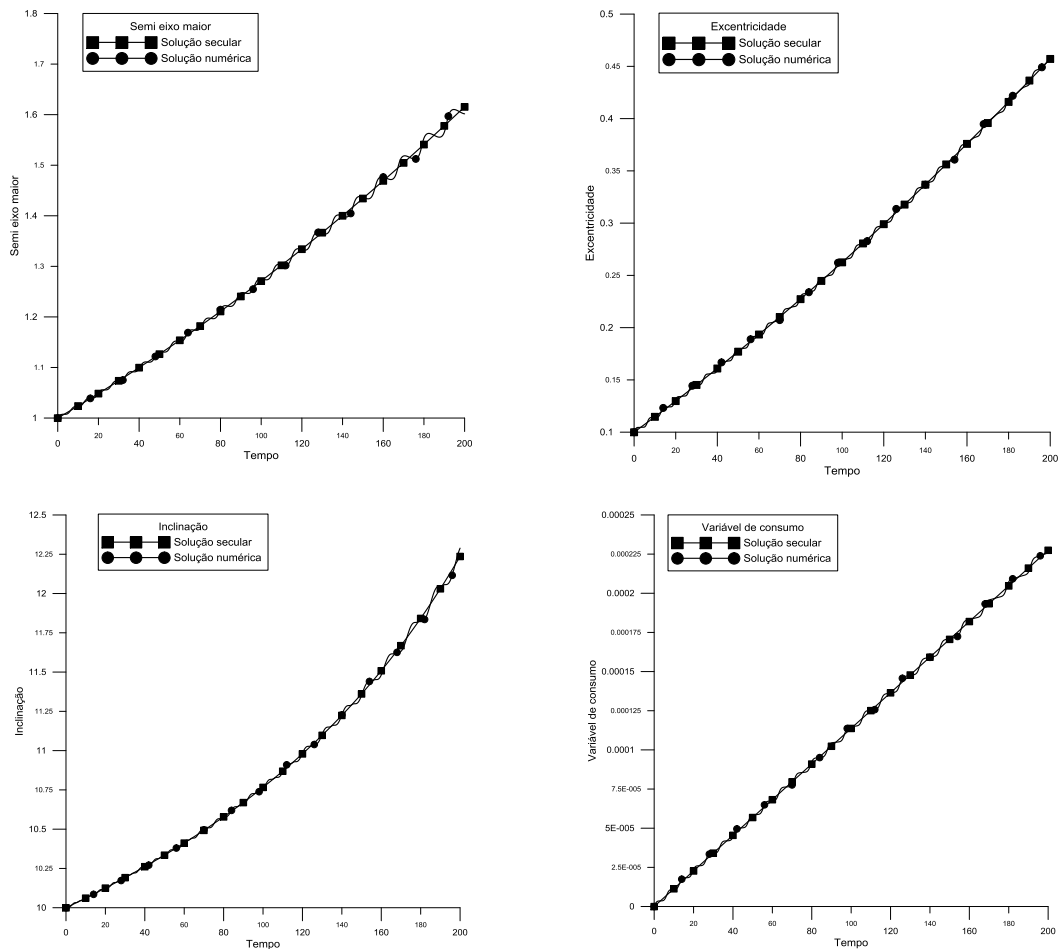


Figura 1 – Comparação entre a solução secular e a numérica para a manobra 1 com $t_f - t_0 = 200.0$.

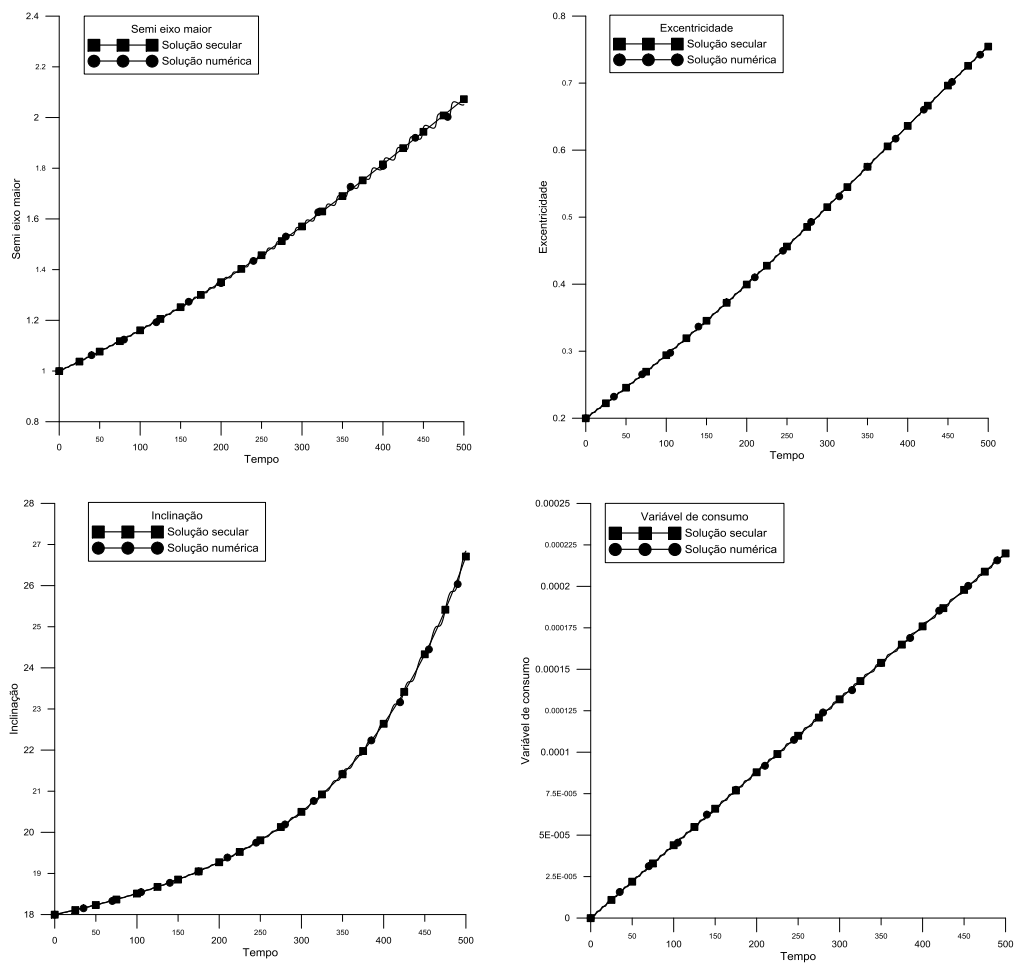


Figura 2 – Comparação entre a solução secular e a numérica para a manobra 2 com $t_f - t_0 = 500.0$.

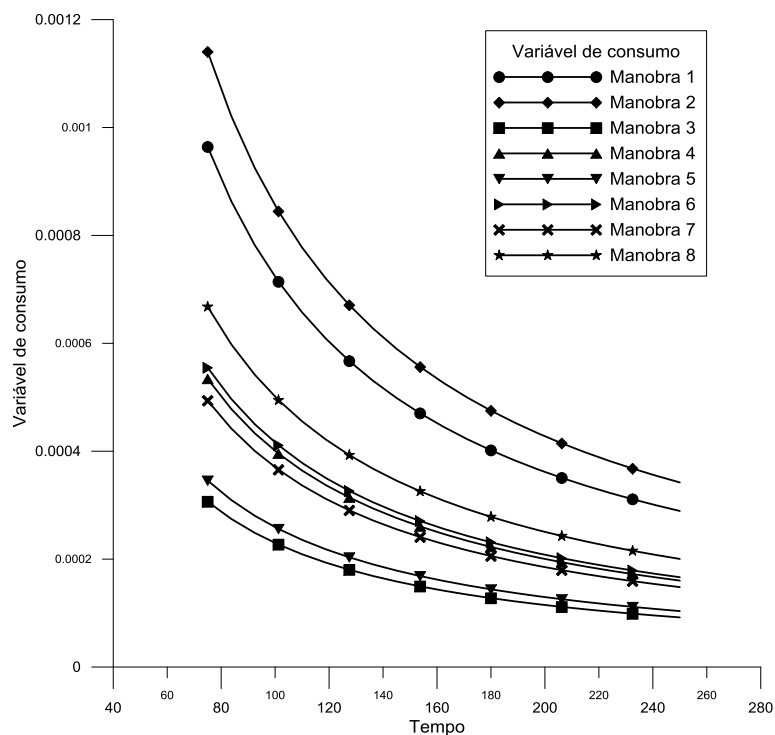


Figura 3 – Variável de consumo final como função da duração da manobra.

5. CONCLUSÕES

Uma solução analítica em forma fechada é apresentada para o problema de transferências ótimas de longa duração realizadas por sistema de propulsão a baixo e potência limitada (no rendezvous) entre órbitas elípticas não-coplanares coaxiais em um campo de força central Newtoniano. Esta solução analítica é determinada através do conceito de média e da teoria de transformações canônicas (teoria de Hamilton-Jacobi). As curvas que descrevem o comportamento da variável de consumo em função da duração da transferência são construídas para algumas manobras envolvendo modificações em semieixo maior, excentricidade e inclinação. Verifica-se que o consumo de combustível decresce com a duração da manobra e que manobras com modificações em semieixo maior ou em inclinação do plano da órbita são relativamente custosas em comparação com manobras de modificação da excentricidade, dependendo naturalmente da amplitude da manobra.

6. AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa foi apoiada pelo CNPq sob contrato 304913/2013-8 e FAPESP sob contrato 21023/2012-6.

7. REFERÊNCIAS

- Battin, R. H., 1987. "An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics", American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, 796 p.
- Bonnard, B., Caillau, J. B., and Dujol, R. 2006. "Averaging and Optimal Control of Elliptic Keplerian Orbits with Low Propulsion". *Systems & Control Letters*, 55 (9), 755-760.
- Camino, O., Alonso, M., Blake, R. et al. 2005. "SMART-1: Europe's lunar mission paving the way for new cost effective ground operations (RCSGSO)". In: *Proceedings of the 6th International Symposium on Reducing the Costs of Spacecraft Ground Systems and Operations (RCSGSO)*, 14–17 June 2005, ESA/ESOC, Darmstadt, Germany.
- da Silva Fernandes, S. e Carvalho, F. C. 2015. "Optimal Low-Thrust Transfers between Elliptic Coaxial Non-Coplanar Orbits". In: *Proceedings of 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2015*, 6 - 11 December 2015, Rio de Janeiro.
- da Silva Fernandes, S. and Carvalho, F. C., 2008. "A First Order Analytical Theory for Optimal Low-Thrust Limited-Power Transfers between Arbitrary Elliptical Coplanar Orbits". *Mathematical Problems in Engineering*, Vol 2008, Article Id 525930, doi: 10.1155/2008/525930.
- Edelbaum, T. N. 1964. "Optimum Low-Thrust Rendezvous and Station Keeping". *AIAA Journal*, 2(7), 1196-1201.
- Edelbaum, T. N. 1965. "Optimum Power-Limited Orbit Transfer in Strong Gravity Fields". *AIAA J* 3(5): 921–925.
- Edelbaum, T. N. 1966. "An Asymptotic Solution For Optimum Power Limited Orbit Transfer". *AIAA J* 4(8): 1491–1494.
- Forsythe, G. E., Malcolm, M. A., Moler, C. B. 1977. "Computer Methods for Mathematical Computations". Englewood Cliffs, New Jersey 07632. Prentice Hall, Inc., XI, 259 S.
- Gobet, F. W. 1964. "Optimal Variable-Thrust Transfer of a Power-Limited Rocket Between Neighboring Circular Orbits". *AIAA Journal*, 2(2), 339-343.
- Gobet, F. W. 1965. "A Linear Theory of Optimum Low-Thrust Rendezvous Trajectories". *Journal of the Astronautical Sciences*, 12, 69.
- Jamison, B. R., e Coverstone, V. 2010. "Analytical Study of the Primer Vector and Orbit Transfer Switching Function". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(1), 235-245.
- Kiforenko, B. N. 2005. "Optimal Low-Thrust Orbital Transfers in a Central Gravity Field. *International Applied Mechanics*, 41(11), 1211-1238.
- Lanczos, C. 1970. "The Variational Principles of Mechanics", 4th edition, University of Toronto Press, Toronto.
- Marec, J. P., Vinh, N. X. 1980. "Étude Generale des Transferts Optimaux a Poussee Faible et Puissance Limitee Entre Orbites Elliptiques Quelconques". ONERA Publication 1980–1982.
- Marec, J. P., e Vinh, N. X. 1977. "Optimal Low-Thrust, Limited Power Transfers Between Arbitrary Elliptical Orbits". *Acta Astronautica*, 4(5-6), 511-540.
- Marec, J. P., 1979, *Optimal Space Trajectories*, Elsevier, New York, 329p.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. e Mishchenko, E. F. 1962, "The Mathematical Theory of Optimal Control Processes", John Wiley & Sons, New York, 357 p.
- Racca, G. D., Marini, A., Stagnaro, L. et al. 2002. "SMART-1 "Mission Description and Developments Status". *Planetary and Space Science* 50: 1323–1336.
- Racca, G. D., 2003, "New Challenges to Trajectory Design by the Use of Electric Propulsion and Other New Means of Wandering in the Solar System", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol 85, pp. 1 – 24.
- Rayman, M. D, Varghese, P., Lehman, D. H. et al. 2000. "Results From the Deep Space 1 Technology Validation Mission". *Acta Astronautica* 47(2–9):475–487.
- Sukhanov, A. A. 2000. "Optimization of Low-Thrust Interplanetary Transfers". *Cosmic Research*, 38(6), 584-587.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo impresso incluídos neste artigo.

NUMERICAL STUDY FOR LONG DURATION TRANSFERS BETWEEN COAXIAL NONCOPLANAR ELLIPTICAL ORBITS

CONEM_2016_0875

Abstract: *This paper presents a numerical study for long duration transfers between coaxial elliptical noncoplanar orbits performed by low-thrust and limited-power propulsive system in a Newtonian central field. This study is based on an analytical solution obtained by the averaging method and canonical transformations. Several transfer maneuvers are then simulated considering different end conditions and duration. Curves describing the behavior of consumption variable as a function of the duration of the transfer are built. It is noted that the consumption decreases with the duration of the maneuver and maneuvers with modification in semi-major axis or in the inclination of the orbital plane spend more fuel in comparison with maneuvers with modification in eccentricity.*

Keywords: *low-thrust limited-power transfers, long duration transfers, transfers between coaxial non-coplanar orbits.*