

CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA

21-25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

APROXIMAÇÃO PATCHED-CONIC LUNAR COM MANOBRA DE SWING-BY

CON-2016-0871

Resumo: Este trabalho visa formular uma manobra de swing-by com a Lua baseada na aproximação patched-conic. As manobras de swing-by permitem ao veículo espacial ganhar ou perder energia sem consumir combustível. Inicialmente, o veículo espacial encontra-se em uma órbita circular baixa ao redor da Terra (LEO). Mediante a aplicação de um impulso, o veículo é inserido em uma trajetória de transferência que cruza a esfera de influência da Lua iniciando, dessa forma, a manobra de swing-by. A formulação desta manobra é uma adaptação da abordagem clássica da aproximação patched-conic lunar. Porém, diferentemente dessa abordagem, a manobra de swing-by baseada na aproximação patched-conic refere-se somente à passagem do veículo espacial próximo à Lua. Através desta formulação, a manobra de swing-by é parametrizada pela distância r_{pM} de máxima aproximação do veículo espacial com a Lua e pelo ângulo λ_1 , que caracteriza a geometria na entrada da esfera de influência da Lua. Um problema de contorno em dois pontos é formulado e resolvido pelo método do Newton-Raphson a fim de satisfazer os requisitos de projeto da manobra. Os resultados indicam que o decréscimo da distância r_{pM} e o decréscimo do ângulo λ_1 intensificam a manobra de swing-by favorecendo a ocorrência de trajetórias que podem ser empregadas nas missões Terra-Lua envolvendo transferências exteriores na dinâmica de quatro corpos. Uma trajetória gerada por essa aproximação patched-conic é utilizada como condição inicial no problema de quatro corpos para a obtenção de uma trajetória externa com altitude de apogeu semelhante a trajetória de Belbruno-Miller, porém, com a existência de uma manobra de swing-by na primeira fase da trajetória.

Palavras-chave: aproximação patched-conic lunar, manobra de swing-by, trajetória Terra-Lua

1. INTRODUÇÃO

As manobras espaciais assistidas por gravidade ou manobras de swing-by são muito utilizadas em missões espaciais, pois permitem ao veículo espacial ganhar ou perder energia sem que haja um consumo de combustível. O ganho ou a perda de velocidade é, portanto, uma consequência natural da dinâmica da mecânica celeste quando o veículo espacial realiza uma passagem próxima a um corpo gravitacional de massa considerável. Tais manobras são muito úteis em missões interplanetárias (para Marte, por exemplo) e em missões cometárias (Broucke, 1988).

Devido ao grande número de trabalhos sobre o tema, muitos efeitos desta manobra já são conhecidos. Porém, grande parte dos trabalhos concentra-se em analisar a manobra de swing-by independente do restante da trajetória a ser desenvolvida pelo veículo espacial. Flandro (1966), por exemplo, determinou uma época favorável para enviar uma sonda espacial para planetas mais externos com uma manobra de swing-by em Júpiter. Seu trabalho ajudou na determinação das trajetórias nas missões Voyager. Entretanto, neste mesmo trabalho, apesar da geometria da manobra de swing-by ser estudada com foco em Júpiter, tal manobra é considerada instantânea no contexto da trajetória interplanetária completa. Neste caso, uma mudança repentina na velocidade e na direção do veículo espacial é observada. D'Amario; Byrnes e Stanford (1982) elaboram um procedimento para determinar trajetórias interplanetárias ótimas mediante múltiplas manobras de swing-by, que, assim como Flandro (1966), são consideradas instantâneas havendo descontinuidade no vetor velocidade do veículo espacial. Estes estudos, que focam na manobra de swing-by de forma independente do restante da trajetória, forneceram valiosas informações acerca dos efeitos produzidos por este tipo de manobra. Broucke (1988) classificou as manobras de swing-by de acordo com o tipo de cônica de aproximação, que caracteriza a trajetória imediatamente antes da manobra de swing-by, e com o tipo de cônica de escape, que caracteriza a trajetória imediatamente após a manobra de swing-by. Neste último trabalho, a melhor configuração geométrica da manobra de swing-by é determinada para que ocorra o maior ganho possível de energia do veículo

espacial. Prado (1996), utilizando a aproximação *patched-conic*, estudou a possibilidade da aplicação de um impulso intermediário durante a manobra de *swing-by*. A aproximação *patched-conic*, por ser um modelo mais simples que o problema de três corpos, possui a vantagem de fornecer uma formulação analítica em aplicações específicas, como é o caso da manobra de *swing-by*. Prado (2006) utilizou uma abordagem analítica para estudar os efeitos da manobra de *swing-by* em um corpo secundário na mudança de inclinação da órbita do veículo espacial em relação ao corpo primário. Em Prado (2007), a aproximação *patched-conic* é comparada com o problema restrito de três corpos. Entretanto, em todos esses trabalhos, a manobra de *swing-by* é projetada como uma etapa separada do restante da trajetória assumindo um caráter instantâneo quando inserida na trajetória completa. Em outras palavras, nos trabalhos citados, uma vez que o veículo espacial se aproxima do corpo, a manobra de *swing-by* é projetada a fim de se obter a necessária trajetória de escape. O projeto desta manobra envolve três parâmetros, os quais são geralmente: a distância de periapsis em relação ao corpo no qual a manobra é realizada; a velocidade hiperbólica de excesso de aproximação; e, um ângulo que caracteriza esta aproximação (Broucke, 1988). Repare que estes parâmetros estão definidos na vizinhança do corpo onde a manobra é realizada. No presente trabalho, a manobra de *swing-by* é projetada, no contexto da aproximação *patched-conic*, considerando as condições de partida do veículo espacial: inicialmente, o veículo espacial encontra-se em uma órbita circular baixa ao redor da Terra (LEO) quando um impulso é aplicado de forma a colocá-lo em uma trajetória de transferência que cruza a esfera de influência da Lua, onde uma manobra de *swing-by* é realizada. O projeto desta manobra de *swing-by* é determinada *a priori*, de forma que, quando o veículo inicia seu movimento partindo da órbita LEO, a manobra de *swing-by* já está definida. Para atender este objetivo, os parâmetros que caracterizam a manobra de *swing-by* devem ser modificados de modo a se relacionar com as condições iniciais de partida do veículo espacial. Esta abordagem permite atender possíveis requisitos de missões durante a passagem pelo corpo gravitacional onde a manobra é realizada.

2. OBJETIVOS

Este trabalho visa formular e determinar trajetórias com manobras de *swing-by* de um veículo espacial que, inicialmente, se encontra em uma órbita circular baixa ao redor da Terra (LEO). Mediante a aplicação de um impulso, o veículo é inserido em uma trajetória de transferência que cruza a esfera de influência da Lua. A formulação do problema é realizada utilizando a abordagem da aproximação *patched-conic* lunar. Entretanto, ao invés do veículo espacial circularizar seu movimento em uma órbita baixa ao redor da Lua (LMO), este realiza uma manobra de *swing-by* com a Lua em uma distância de periapsis r_{PM} pré-estabelecida.

3. FORMULAÇÃO TEÓRICA

Inicialmente, a formulação da manobra de *swing-by* baseada na aproximação *patched-conic* é apresentada exatamente da mesma maneira que a abordagem clássica da aproximação *patched-conic* lunar, no qual um problema de valor de contorno é resolvido para a transferência do veículo espacial de uma LEO para uma LMO. No entanto, o problema de valor de contorno a ser formulado pela abordagem com *swing-by* refere-se apenas à passagem próxima à Lua. Desta forma, a formulação da abordagem com *swing-by* difere da abordagem clássica a partir do momento em que o veículo espacial alcança o periselenium r_{PM} da órbita hiperbólica em relação à Lua. Neste momento, um segundo impulso não é aplicado pelo veículo espacial, de forma que seu movimento é continuado até que este atinja o limite da esfera de influência (SOI) da Lua. As hipóteses para a formulação do problema são as seguintes:

- 1) o planeta Terra é fixo no espaço;
- 2) a órbita da Lua ao redor da Terra é circular;
- 3) o voo do veículo espacial ocorre no plano orbital da Lua;
- 4) os campos gravitacional da Terra e da Lua são centrais e obedecem a lei do inverso do quadrado da distância;
- 5) a trajetória de transferência possui 3 fases distintas: a fase geocêntrica, que se inicia imediatamente após a aplicação do primeiro incremento de velocidade; a fase selenocêntrica, que se inicia no momento em que o veículo toca a esfera de influência gravitacional da Lua; e, uma segunda fase geocêntrica, que se inicia no momento em que o veículo sai da esfera de influência da Lua;
- 6) um impulso tangencial é aplicado ao veículo espacial na órbita LEO de modo a inseri-lo em uma trajetória geocêntrica de transferência, que caracteriza a primeira fase da trajetória.

A formulação a seguir é baseada no trabalho de Gagg Filho e da Silva Fernandes (2015). De fato, a formulação até o momento em que o veículo alcança a distância de periselenium r_{PM} é exatamente a mesma, e transcrita a seguir.

A manobra de *swing-by* baseada na aproximação *patched-conic* fica definida quando quatro variáveis são conhecidas, quais sejam: distância radial r_0 e velocidade v_0 do veículo no ponto de injeção da trajetória geocêntrica; ângulo da trajetória de voo φ_0 no ponto de injeção da trajetória geocêntrica; ângulo de fase λ_1 do veículo com a Terra em relação a Lua no momento em que este toca a esfera de influência da Lua. Como, por hipótese, o impulso é tangencial à órbita inicial, então $\varphi_0 = 0$.

Para um dado conjunto de variáveis $(r_0, v_0, \varphi_0, \lambda_1)$ a energia ε e o momento angular h da fase geocêntrica podem ser calculados utilizando as fórmulas das integrais primeiras do problema de dois corpos. Portanto, tem-se que

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu_E}{r_0} \quad (1)$$

$$h = r_0 v_0 \cos(\varphi_0) \quad (2)$$

onde μ_E é o parâmetro gravitacional da Terra. Pela geometria da fase geocêntrica, Fig. (1), pode-se obter

$$r_1 = \sqrt{D^2 + r_2^2 - 2Dr_2 \cos(\lambda_1)} \quad (3)$$

$$\sin(\gamma_1) = r_2 \frac{\sin(\lambda_1)}{r_1} \quad (4)$$

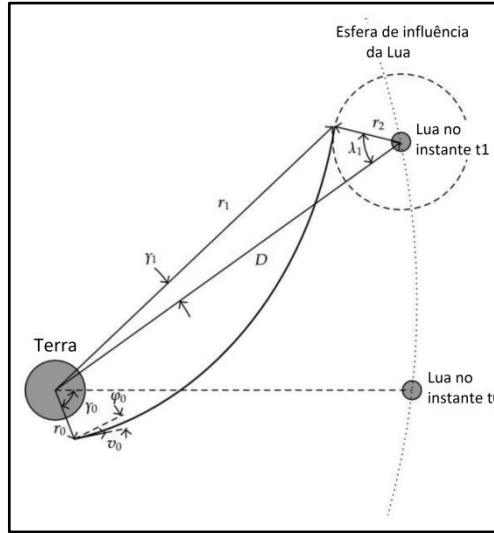


Figura 1: Aproximação patched-conic lunar. Fase geocêntrica. Fonte: adaptado de (da Silva Fernandes e Marinho, 2011)

onde D é a distância média da Terra à Lua. O subscrito 0 corresponde às quantidades relacionadas ao momento imediatamente posterior à inserção do veículo espacial na primeira trajetória geocêntrica. Os subscritos 1 e 2 correspondem, respectivamente, às quantidades referentes à trajetória geocêntrica e selenocêntrica no momento do contato do veículo espacial com a esfera de influência da Lua. A variável γ representa o ângulo de fase do veículo com a Lua em relação à Terra, e a variável r representa a distância do veículo espacial ao corpo gravitacional correspondente.

A velocidade v_1 e o ângulo de trajetória de voo φ_1 podem ser obtidos das equações da energia e do momento angular:

$$v_1 = \sqrt{2 \left(\varepsilon + \frac{\mu_E}{r_1} \right)} \quad (5)$$

$$\cos(\varphi_1) = \frac{h}{r_1 v_1} \quad (6)$$

A fase selenocêntrica, definida por uma trajetória hiperbólica em relação à Lua, inicia-se no ponto em que a trajetória geocêntrica toca a esfera de influência da Lua. Como as variáveis com subscrito 2 estão relacionadas com o movimento relativo em relação à Lua então

$$r_2 = R_s \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_M \quad (8)$$

onde R_s é o raio da esfera de influência da Lua e $\mathbf{v}_M$ é o vetor velocidade da Lua em relação à Terra. Através da geometria (para mais detalhes ver (da Silva Fernandes e Marinho, 2011)) a magnitude o vetor velocidade v_2 pode ser determinada como segue:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_M^2 - 2v_1 v_M \cos(\varphi_1 - \gamma_1)} \quad (9)$$

e o ângulo de trajetória φ_2 é determinado da expressão

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 \pm \varphi_2) = -\frac{v_1 \sin(\varphi_1 - \gamma_1)}{v_M - v_1 \cos(\varphi_1 - \gamma_1)} \quad (10)$$

O sinal superior na Eq. (10) corresponde a uma passagem ao redor da Lua no sentido horário, e o sinal inferior corresponde a uma passagem no sentido anti-horário. Na Eq. (10), o ângulo φ_2 é considerado positivo, muito embora em mecânica espacial seja convencionado como negativo quando o veículo se aproxima do periapsis. A mudança na convenção deve-se ao fato de φ_2 ser calculado a partir de um triângulo de velocidades.

Note que, neste ponto da formulação, é possível determinar as características da trajetória selenocêntrica como semi-eixo maior e excentricidade através das seguintes expressões:

$$a_f = \frac{r_2}{2 - Q_2} \quad (11)$$

$$e_f = \sqrt{1 + Q_2(Q_2 - 2)\cos^2\varphi_2} \quad (12)$$

onde $Q_2 = \frac{r_2 v_2^2}{\mu_M}$ e μ_M é o parâmetro gravitacional da Lua.

O pericentro da trajetória selenocêntrica é expresso por

$$r_{pM} = a_f(1 - e_f) \quad (13)$$

onde r_{pM} é a distância do periselenium. No entanto, r_{pM} deve ser igual a distância r_f de máxima aproximação do veículo espacial com a Lua, ou distância de *swing-by*, a qual é previamente estabelecida. Dessa forma, as Eqs (1) a (13) definem um problema de valor de contorno que consiste em determinar v_0 , para um conjunto (r_0, φ_0) especificado, de forma a satisfazer a condição final $r_{pM} = r_f$ para algum λ_1 fixado. Pode-se resolver o problema de valor de contorno utilizando o algoritmo de Newton-Raphson onde, a cada iteração, a variável v_0 é atualizada de acordo com a expressão

$$v_{0n+1} = v_{0n} + \frac{r_f - r_{pMn}}{\left[\frac{dr_{pM}}{dv_0} \right]_{v=v_{0n}}} \quad (14)$$

até uma precisão pré-estabelecida. O subscrito n representa a iteração e a derivada $\left[\frac{dr_{pM}}{dv_0} \right]_{v=v_{0n}}$ pode ser obtida de forma analítica ou numérica.

Após a solução do problema de valor de contorno, podem ser determinadas as demais variáveis que caracterizam as duas primeiras fases da trajetória. Dentre essas variáveis, incluem os tempos de voo de cada fase, o ângulo de fase inicial γ_0 do veículo espacial, e a anomalia excêntrica hiperbólica F_2 (veja Gagg Filho e da Silva Fernandes (2015)). Esta última é determinada por

$$\cosh(F_2) = \frac{1}{e_f} \left(1 - \frac{r_2}{a_f} \right) \quad (15)$$

e o tempo Δt_M gasto pelo veículo espacial na fase selenocêntrica para ir do ponto de entrada da esfera de influência da Lua (ponto 2) até o periselenium é calculado por

$$\Delta t_M = \sqrt{\frac{(-a_f)^3}{\mu_M}} (e_f \sinh(F_2) - F_2) \quad (16)$$

Até este momento, caracterizou-se a trajetória do veículo espacial somente até este alcançar o pericentro da trajetória selenocêntrica. Devido a manobra de *swing-by*, o movimento do veículo espacial durante a fase selenocêntrica é continuado até este alcançar o limite da esfera de influência da Lua. A Fig. 2 destaca a simetria da trajetória selenocêntrica entre o momento em que o veículo espacial entra na esfera de influência da Lua e o momento em que o veículo sai dessa esfera de influência. Neste caso, o vetor $\mathbf{r}_{pM}$ atua como eixo de simetria. Essa característica é explorada a fim de facilitar a formulação da manobra de *swing-by*. Dessa forma

$$\Delta t_{SEL} = 2\Delta t_M \quad (17)$$

onde Δt_{SEL} é tempo gasto pelo veículo espacial na fase selenocêntrica para ir do ponto de entrada da esfera de influência da Lua (ponto 2) até o ponto de saída dessa esfera de influência (ponto 3). Portanto, tanto o ponto 2 quanto o ponto 3

denotam quantidades referentes à trajetória selenocêntrica e dão significado para os subscritos das variáveis na formulação. A anomalia verdadeira f_2 do veículo espacial no ponto 2 pode ser calculada através da expressão abaixo.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{e_f+1}{e_f-1}} \operatorname{tgh}\left(\frac{F_2}{2}\right) \quad (18)$$

Deve-se tomar cuidado na análise do quadrante para a obtenção do valor correto de f_2 . Devido a simetria, a anomalia verdadeira f_3 no ponto 3 possui o mesmo valor em módulo que a anomalia verdadeira f_2 , entretanto esta última ocorre antes da passagem do veículo pelo periselenium, portanto

$$f_3 = -f_2 \quad (19)$$

O ângulo Δ indicado na Fig. 2 é calculado pela seguinte expressão:

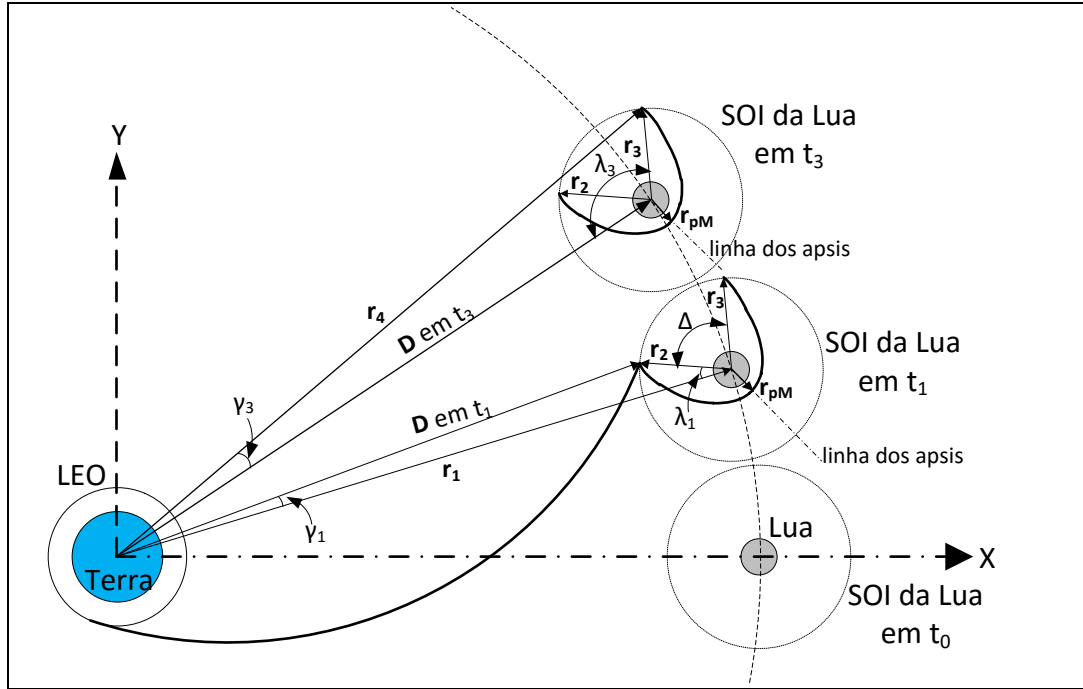


Figura 2: Geometria da manobra de swing-by baseada na aproximação *patched-conic*.

$$\Delta = 360^\circ - (f_3 - f_2) \quad (20)$$

Definindo o ângulo λ_3 por

$$\lambda_3 = \lambda_1 + \Delta + \omega_M \Delta t_{SEL} \quad (21)$$

onde ω_M é a velocidade angular da Lua ao redor da Terra, e, dado que o módulo do vetor $\mathbf{r}_3$ (indicado na Fig. 2) é igual ao raio da esfera de influência da Lua R_S , ou seja,

$$|\mathbf{r}_3| = r_3 = R_S \quad (22)$$

então, é possível calcular a magnitude do vetor $\mathbf{r}_4$ pela lei dos cossenos, ou seja,

$$|\mathbf{r}_4| = r_4 = \sqrt{D^2 + r_3^2 - 2Dr_3 \cos \lambda_3} \quad (23)$$

onde $\mathbf{r}_4$ representa o vetor posição do veículo espacial em relação a Terra quando este sai da esfera de influência da Lua. O subscrito 4 indica, portanto, que as grandezas físicas são referenciadas em relação à Terra e, assim como o ponto 3, indica o ponto em que o veículo espacial sai da esfera de influência da Lua. O ângulo de fase γ_3 do veículo espacial com a Lua em relação à Terra no ponto 3 pode ser obtido utilizando a lei dos senos, ou seja,

$$\operatorname{sen} \gamma_3 = r_3 \frac{\operatorname{sen} \lambda_3}{r_4} \quad (24)$$

Utilizando novamente a simetria da fase selenocêntrica, a magnitude do vetor velocidade v_3 do veículo espacial e seu ângulo de trajetória de voo φ_3 no ponto 3 são obtidas pelas expressões abaixo:

$$v_3 = v_2 \quad (25)$$

$$|\varphi_3| = |\varphi_2| \quad (26)$$

Por serem baseados na geometria do problema, os ângulos destacados na formulação não apresentam convenções de sinais. Por este motivo, a Eq. (26) é apresentada em módulo. Conforme anteriormente mencionado, para a correta caracterização dos ângulos de trajetória de voo φ_3 e φ_2 deve-se observar se o veículo encontra-se em uma trajetória de aproximação ou de escape em relação ao periselenium. No ponto 2, o veículo está aproximando do periselenium, então φ_2 possui valor negativo. Já no ponto 3, o veículo está em uma trajetória de escape, portanto φ_3 é positivo.

Como as variáveis com subscrito 3 estão relacionadas com o movimento relativo em relação à Lua, então

$$v_4 = v_3 + v_M \quad (27)$$

onde v_4 é o vetor velocidade do veículo no ponto 3 em relação a Terra. Através da geometria, a magnitude do vetor velocidade v_4 e o ângulo de trajetória de voo φ_4 do veículo espacial em relação à Terra na saída da esfera de influência da Lua são determinados como segue:

$$v_4 = \sqrt{v_3^2 + v_M^2 - 2v_3v_M \cos(\lambda_3 + \varphi_3)} \quad (28)$$

$$\text{tg}(\varphi_4 - \gamma_3) = \frac{-v_3 \sin(\lambda_3 + \varphi_3)}{v_M - v_3 \cos(\lambda_3 + \varphi_3)} \quad (29)$$

Uma vez determinado o conjunto de variáveis (r_4, v_4, φ_4) , uma segunda trajetória geocêntrica, definida após a saída da esfera de influência da Lua, fica caracterizada. A princípio, não é possível determinar se tal trajetória é hiperbólica ou elíptica, constituindo um dos focos de estudo deste trabalho. É importante destacar que o problema de contorno baseado na abordagem clássica do *patched-conic* lunar deve ser resolvido *a priori* para que, posteriormente, seja possível aplicar a formulação estendida com *swing-by*. Neste caso, a especificação do raio do periselenium r_{pM} é um parâmetro de projeto que indica o ponto de maior aproximação do veículo espacial com a Lua durante a manobra de *swing-by*. Deve-se considerar, no problema de valor de contorno, uma passagem próxima à Lua no sentido anti-horário para que ocorra ganho de energia pelo veículo espacial durante a manobra de *swing-by*.

Considerando a órbita LEO especificada, destaca-se que a trajetória formulada neste trabalho, que inclui o projeto da manobra de *swing-by*, depende de três parâmetros (v_0, λ_1, r_{pM}) . A velocidade v_0 é a variável de iteração do algoritmo que resolve o problema de valor de contorno fixado o par (λ_1, r_{pM}) . Na seção a seguir, um estudo é realizado sobre os efeitos da manobra de *swing-by* considerando a parametrização da manobra de *swing-by* pelo par (λ_1, r_{pM}) .

4. RESULTADOS

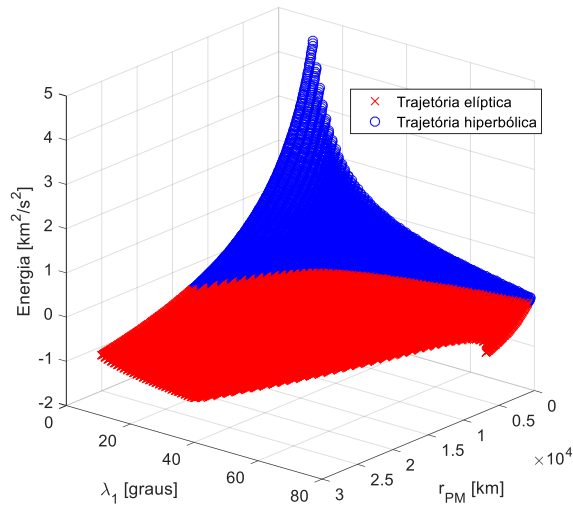
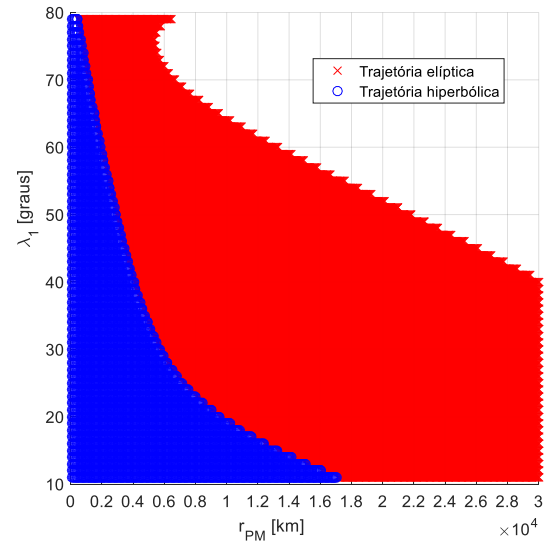
Os principais resultados são conduzidos de forma a estudar a segunda fase geocêntrica, que ocorre após a manobra de *swing-by*. Dependendo da energia ganha pelo veículo espacial durante a manobra, esta segunda fase geocêntrica pode ser caracterizada por uma trajetória elíptica ou hiperbólica. Caso seja elíptica, então existe a possibilidade do veículo espacial cruzar novamente a esfera de influência da Lua. Se a energia ganha pelo veículo for suficientemente grande, a elipse da segunda fase geocêntrica pode, inclusive, ultrapassar a esfera de influência da Terra caracterizando, dessa forma, uma trajetória externa. Na Fig. 5a, por exemplo, o veículo espacial, após a realização da manobra de *swing-by* com a Lua, descreve uma trajetória geocêntrica elíptica, cujo apogeu encontra-se fora da esfera de influência da Terra. Após a passagem pelo apogeu, o veículo passa a descrever uma trajetória de aproximação da Terra cruzando novamente a órbita da Lua. Cada momento de intersecção da trajetória geocêntrica elíptica com a órbita da Lua possibilita, eventualmente, uma nova captura do veículo espacial pela esfera de influência da Lua.

Para a determinação das trajetórias é utilizada uma altitude da órbita LEO igual a 167 km. Tabela 1 ilustra uma lista com os valores das demais variáveis necessárias para a especificação do problema, onde R_E e R_M são os raios da Terra e da Lua, respectivamente.

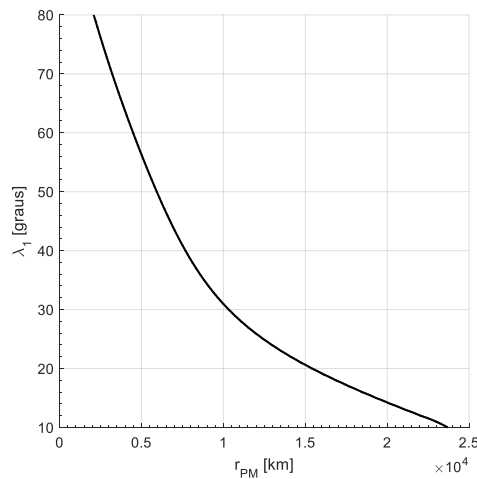
Como visto na seção anterior, o projeto da manobra de *swing-by* baseada na aproximação *patched-conic*, pode ser parametrizado em relação a duas variáveis: λ_1 e r_{pM} . Portanto, é conveniente verificar como essas duas variáveis influenciam a trajetória do veículo espacial. A Fig. 3 ilustra uma superfície que representa a energia de Kepler da trajetória da segunda fase geocêntrica, que se inicia quando o veículo espacial sai da esfera de influência da Lua, como função das variáveis λ_1 e r_{pM} .

Tabela 1: Especificação das variáveis do problema

ω_M	$2,649 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$
v_M	1,018 km/s
R_E	6378,2 km
R_M	1738 km
μ_E	$398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$
μ_M	$4902,83 \text{ km}^3/\text{s}^2$
D	384400 km
R_s	66300 km

Figura 3a: Energia da 2ª fase geocêntrica como função de (r_{PM}, λ_1) .Figura 3b: Projeção no plano $r_{PM} \times \lambda_1$.

Observa-se pela Fig. 3 que uma baixa altitude da manobra de *swing-by* implica em um ganho mais acentuado de energia pelo veículo espacial, que entra em uma trajetória geocêntrica de escape (trajetória hiperbólica). Para que o veículo espacial possa, eventualmente, cruzar novamente a esfera de influência da Lua, deve-se aumentar a distância r_{PM} da manobra de *swing-by* para que uma trajetória elíptica na segunda fase geocêntrica seja obtida. A configuração do ângulo λ_1 pode auxiliar no projeto da manobra uma vez que, baixos valores de λ_1 implicam em uma manobra de *swing-by* mais acentuada favorecendo a ocorrência de uma trajetória hiperbólica na segunda fase geocêntrica. Para efeito de comparação, a manobra do tipo Belbruno-Miller (da Silva Fernandes e Marinho, 2012) alcança, aproximadamente, um apogeu mínimo de $r_a = 1070695,6$ km. A Fig. 4 ilustra uma curva interpolada cujas coordenadas (λ_1, r_{PM}) resultam no raio de apogeu $r_a = 1070695,6$ km.

Figura 4: Curva de Intersecção em $r_a = 1070695,6$ km.

Portanto, cada ponto da curva mostrada na Fig. 4 representa um par de valores (λ_1, r_{PM}) que origina uma trajetória elíptica na segunda fase geocêntrica com $r_a = 1070695,6$ km. Assim, para $\lambda_1 = 60^\circ$, tem-se $r_{PM} \cong 4486$ km. As Fig. 5 e 6 a seguir mostram a forma da trajetória descrita pelo veículo espacial considerando essa última configuração de (λ_1, r_{PM}) .

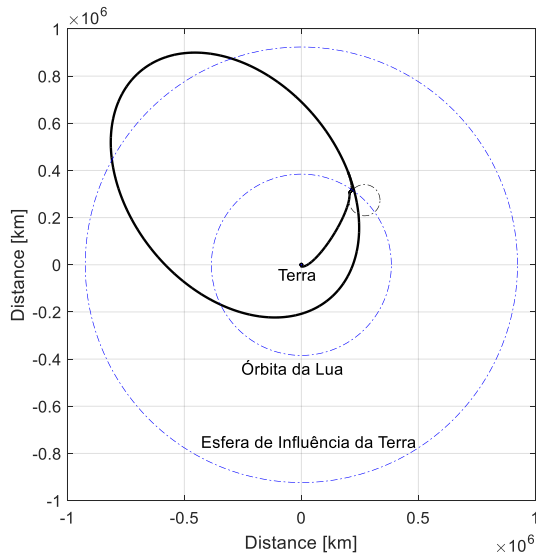


Figura 5a: Trajetória no sistema inercial: $\lambda_1 = 60^\circ$ e $r_{PM} = 4486$ km.

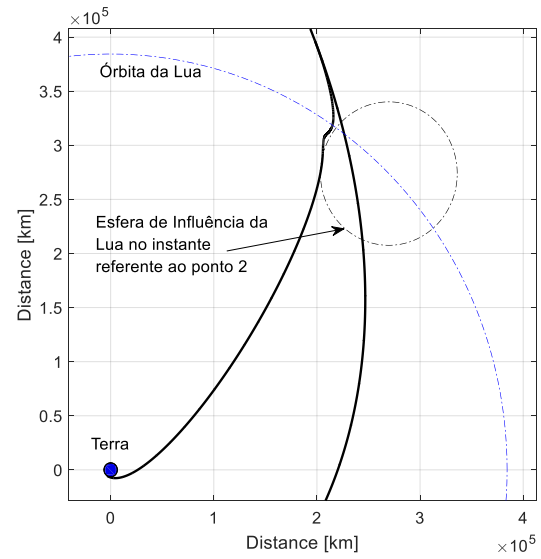


Figura 5b: Trajetória no sistema inercial: $\lambda_1 = 60^\circ$ e $r_{PM} = 4486$ km. Zoom na primeira fase geocêntrica.

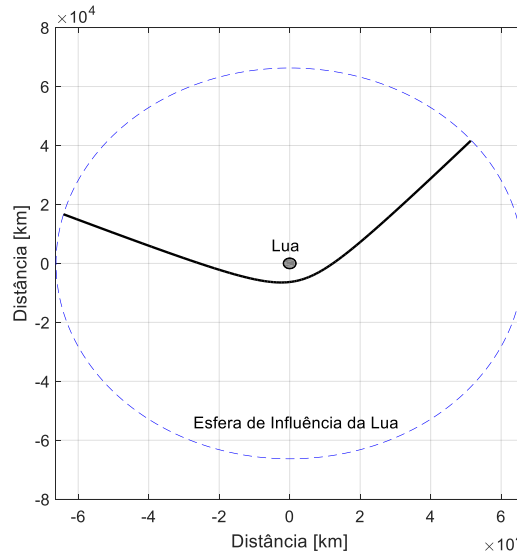


Figura 6: Movimento relativo na fase selenocêntrica. $\lambda_1 = 60^\circ$ e $r_{PM} = 4486$ km.

Na Fig. 6, o prolongamento da trajetória hiperbólica da fase selenocêntrica, que constitui a manobra de *swing-by*, é claramente observado. Ressalta-se que a formulação dessa aproximação *patched-conic* lunar resolve somente um problema de contorno, que está relacionado com o projeto da manobra de *swing-by*. Um segundo problema de contorno, que determina uma solução de recaptura do veículo espacial pela esfera de influência da Lua, não é tratado neste trabalho, e, por enquanto, fica como trabalho futuro. No entanto, tais estudos auxiliam na intuição da manobra de *swing-by* e servem de estimativas para trajetórias no contexto do modelo de quatro corpos. A título de comparação, os resultados obtidos da manobra de *swing-by* baseada na aproximação *patched-conic* são utilizados como condição inicial no problema planar bi-circular restrito de quatro corpos (PBR4BP), onde se resolve um problema de valor de contorno para a circularização do movimento do veículo espacial em uma órbita circular baixa ao redor da Lua (LMO) com uma manobra de *swing-by* intermediária. A Fig.7 compara a trajetória determinada pela aproximação *patched-conic* para projetar uma manobra de *swing-by* com a trajetória obtida pelo problema de quatro corpos. As variáveis $\theta_s(0)$ e $\theta_s(T)$ indicam a posição inicial e final do Sol, respectivamente, no problema de quatro corpos.

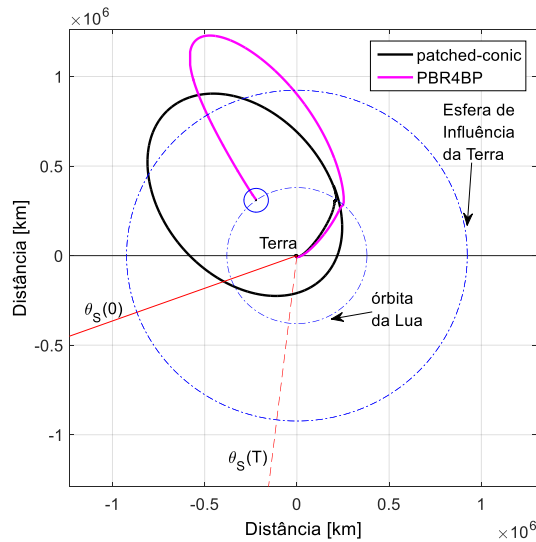


Figura 7a: Sistema Inercial. Distância de *swing-by*
 $r_{PM} \cong 4486 \text{ km}$.

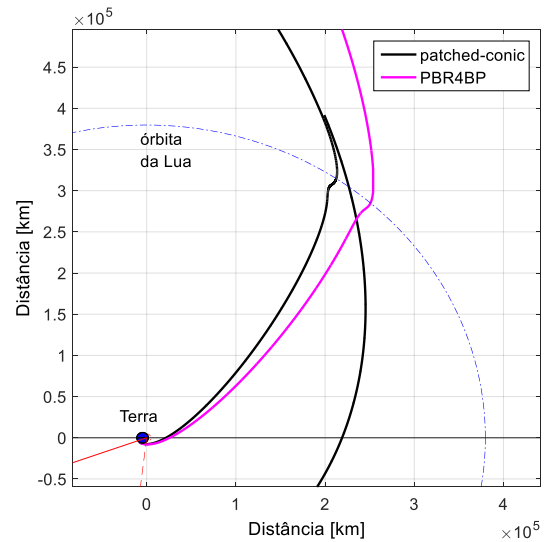


Figura 7b: Sistema Inercial. Distância de *swing-by*
 $r_{PM} \cong 4486 \text{ km}$. Zoom na primeira fase geocêntrica.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta a formulação de uma manobra de *swing-by* baseada na aproximação *patched-conic*, em que a distância de *swing-by* é previamente especificada. A formulação deste problema consiste em uma extensão da abordagem clássica da aproximação *patched-conic* lunar, na qual um problema de valor de contorno é resolvido para a transferência do veículo espacial de uma LEO para uma LMO. Diferentemente da manobra de transferência, a manobra de *swing-by* refere-se somente à passagem do veículo espacial próximo à Lua. A fim de satisfazer o requisito de projeto da manobra de *swing-by*, um problema de valor de contorno em dois pontos é enunciado. Para a determinação da solução do problema de contorno, e, consequentemente, da trajetória a ser descrita pelo veículo, a manobra de *swing-by* é parametrizada através do par de variáveis (λ_1, r_{PM}) . Os resultados indicam que baixos valores de r_{PM} e de λ_1 implicam em uma manobra de *swing-by* mais acentuada. O ganho de energia pelo veículo espacial durante a manobra pode levá-lo a assumir uma trajetória hiperbólica de escape, ou, uma trajetória geocêntrica elíptica que cruza a esfera de influência da Terra, caracterizando uma trajetória externa. Seguindo este raciocínio, determinam-se valores de pares (λ_1, r_{PM}) que caracterizam uma trajetória externa após o *swing-by* de distância de apogeu semelhante a da manobra de Belbruno-Miller. Por fim, os resultados fornecidos pela aproximação *patched-conic* são utilizados como condição inicial no problema de quatro corpos, onde uma trajetória externa é obtida, incluindo a circularização do veículo espacial em uma órbita LMO.

6. AGRADECIMENTOS

Este trabalho é apoiado pela FAPESP sob contratos 2012/25308-5 e 2012/21023-6, e pelo CNPq sob contrato 304913/2013-8.

7. REFERÊNCIAS

- Broucke, R., 1988. "The celestial mechanics of gravity assist, 1988 [C]". In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference. Minneapolis: American Institute of Aeronautics and Astronautics. **Proceedings.**, p. 69-78.
- D'Amario, L. A.; Byrnes, D. V.; Stanford, R. H., 1982. "Interplanetary trajectory optimization with application to Galileo". *Journal of guidance, control, and dynamics*, v. 5, n. 5, p. 465-471.
- da Silva Fernandes, S.; Marinho, C. M. P., 2011. "Optimal two-impulse trajectories with moderate flight time for earth-moon missions". *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2012, n., p.
- da Silva Fernandes, S.; Marinho, C. M. P., 2012. "Sun influence on two-impulsive Earth-to-Moon transfers". In: *Proceedings of the 22nd International Symposium on Space Flight Dynamics*, Sao José dos Campos, Brazil. **Proceedings.**
- Flandro, G., 1966. "Fast Reconnaissance Missions to the Outer Solar System Utilizing Energy Derived from the Gravitational Field of Jupiter1". *Acta Astronautica*, v. 12, n. 4, p.
- Gagg Filho, L. A.; da Silva Fernandes, S., 2015. "Optimal round trip lunar missions based on the patched-conic approximation". *Computational and Applied Mathematics*, v., n., p. 1-35.

- Prado, A. F. B. d. A., 1996. "Powered swingby". Journal of guidance, control, and dynamics, v. 19, n. 5, p. 1142-1147.
- Prado, A. F. B. d. A., 2006. "Orbital control of a satellite using the gravity of the moon". Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 28, n. 1, p. 105-110.
- Prado, A. F. B. d. A., 2007. "A comparison of the "patched-conics approach" and the restricted problem for swing-bys". Advances in Space Research, v. 40, n. 1, p. 113-117.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

"Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho".

LUNAR PATCHED-CONIC APPROXIMATION WITH SWING-BY MANEUVER

COM-2016-0871

Abstract. *The main goal of this work is to formulate a swing-by maneuver with the Moon based on the patched-conic approximation. The swing-by maneuvers allow to the space vehicle gain or lose energy without fuel consumption. Initially, the space vehicle is at a low Earth's orbit. By means of an impulse application, the space vehicle is inserted in a transfer trajectory that crosses the sphere of influence of the Moon, where the swing-by maneuver is performed. The formulation of this maneuver is an adaptation of the classic approach of the lunar patched-conic approximation. However, differently of this approach, the swing-by maneuver based on the patched-conic approximation refers only to the transit of the space vehicle close to the Moon. In this formulation, such maneuver is parameterized by the distance r_{pM} of close approach of the vehicle to the Moon and by the angle λ_1 , which characterizes the entrance geometry in the sphere of influence of the Moon. A two point boundary value problem is formulated and solved by means of the Newton-Raphson algorithm to satisfy the project requirements of the swing-by maneuver. The results indicate that the decrease of the swing-by distance r_{pM} and the decrease of the λ_1 angle intensify the swing-by maneuver favoring the occurrence of trajectories that can be utilized in exterior Earth-Moon transfers considering the four-body model. A generated trajectory by this patched-conic approximation is utilized as initial condition in the four-body problem in order to obtain an exterior trajectory with apogee altitude close to that one of the Belbruno-Miller trajectory, however, with the occurrence of a swing-by maneuver in the first phase of the trajectory.*

Keywords: lunar patched-conic approximation, swing-by maneuver, Earth-Moon trajectory