

CONEM 2016
CONGRESSO NACIONAL DE
ENGENHARIA MECÂNICA

21 - 25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS OPERACIONAIS USANDO O MÉTODO DE SUBESPAÇO

Pedro Motta Nunes, pedromottanunes@hotmail.com¹
Heraldo Nélío Cambraia, Heraldo@ufpr.br¹

¹Universidade Federal do Paraná, Av. Cel. Francisco Heráclito dos Santos, 210, CEP 81531-990, Curitiba, Paraná, Brasil

Resumo: *O A análise do comportamento dinâmico de estruturas mecânicas consiste em um ramo importante da engenharia. A análise modal experimental (AME) trata do problema da caracterização do comportamento dinâmico estrutural. Basicamente, são calculados os seguintes parâmetros modais: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração natural usando dados experimentais. Estes dados experimentais são oriundos das entradas e saídas medidas em pontos específicos sobre a estrutura. Os tipos de dados que são comumente usados em AME são do tipo função de resposta impulsiva e dados de entrada e saída. Este trabalho propõe o desenvolvimento de um algoritmo que utiliza os dados apenas de saída, pois algumas vezes a medição da excitação se torna inviável quando não impossível de ser obtida. Esta técnica é conhecida com análise modal operacional (OMA, do inglês operational modal analysis). As aplicações mais comuns dessa abordagem OMA que aparece na literatura são, por exemplo, grandes estruturas civis, guindastes, motores a combustão interna, rotores, etc. Estas estruturas possuem em comum a dificuldade de se medir os dados de entrada*

O principal objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento e implementação computacional de técnicas de identificação paramétrica no domínio do tempo, orientadas a subespaços, para dados apenas de saída.to.

Palavras-chave: *Análise modal experimental. Análise modal operacional. Identificação paramétrica. Técnicas orientadas a Subespaço.*

1. INTRODUÇÃO

A análise de sistemas dinâmicos trata com o problema de ajuste de modelos matemáticos a partir de uma quantidade de dados experimentais. O procedimento básico para a realização da identificação paramétrica de sistemas dinâmicos consiste no cumprimento das seguintes etapas, conforme Ljung (1999) e Söderström e Stoica (1989):

- i) Definição dos dados experimentais mais adequados para extrair a maior quantidade de informação possível do sistema que está sendo identificado,
- ii) Definição de um conjunto de modelos matemáticos adequados para o problema,
- iii) Escolha e aplicação do modelo mais apropriado dentro deste conjunto de modelos, e
- iv) Validação do modelo matemático escolhido.

A identificação de parâmetros modais é considerada como um processo no qual os dados experimentais são usados na determinação de modelos matemáticos representativos das características dinâmicas do sistema. O propósito da identificação de parâmetros modais consiste, portanto, na estimativa de propriedades dinâmicas do sistema tais como: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos próprios de vibração natural do sistema.

Alternativamente, há algumas décadas tem-se um grande interesse na aplicação dos métodos no domínio do tempo, ao contrário dos tradicionais métodos do domínio da frequência.

As técnicas no domínio do tempo consistem basicamente em encontrar os parâmetros de uma equação de diferenças ou da forma de estado, com aquelas apresentados, por exemplo, em Ljung (1999) e Söderström e Stoica (1989). Os parâmetros modais são posteriormente calculados usando os parâmetros desses modelos matemáticos.

A literatura mostra que os métodos do domínio do tempo tendem a fornecer melhores resultados quando uma grande quantidade de frequências ou uma alta densidade modal está presente nos dados experimentais.

Este trabalho trata, portanto, do desenvolvimento de métodos paramétricos de identificação de parâmetros modais, múltiplos graus de liberdade, não recursivos, implementados no domínio do tempo, usando dados apenas das saídas,

formulados para o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *multiple input multiple output*) usando um modelo na forma de estado puramente linear com parâmetros invariantes no tempo.

2. MÉTODO DE SUBESPAÇO

Os métodos de subespaços oferecem uma maneira numericamente versátil para ajustar um modelo matemático linear e com parâmetros invariantes no tempo na forma de estado a partir de dados experimentais. Possuem um custo computacional menor e são mais simples de serem implementados, comparados aos métodos usando otimização não linear, pois usam apenas técnicas da álgebra linear, tais como, redução de *rank* via decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *singular value decomposition*) e solução de equações algébricas lineares por mínimos quadrados.

3. MÉTODOS OPERACIONAIS

Muitas vezes as condições operacionais de estruturas complexas podem ser muito diferentes das condições ideais em que são realizados os testes modais em laboratório.

A análise modal operacional (OMA, *operational modal analysis*), como pode ser visto nos artigos do Mevel, Basseville e Goursat (2002), Lardies (2009) e Lardies e Minh-NgũTa (2010), utiliza apenas os dados das saídas do sistema para identificar seus parâmetros. São testes modais cuja entrada ou excitação é desconhecida e, portanto, não pode ser medida. Este tipo de entrada é muitas vezes referida como excitação ambiente, como ocorre, por exemplo, quando o vento excita uma estrutura civil. Entretanto, esse tipo de entrada é, muitas vezes, assumida ser do tipo Gaussiana branca, possuindo uma grande quantidade de componentes espectrais na faixa de frequências a ser analisada.

4. MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA NO DOMÍNIO DO TEMPO

4.1. Identificação paramétrica usando o modelo de estado (Algoritmo 1)

Para representar um sistema vibratório linear com parâmetros invariantes no tempo, válido para dados apenas de saída, consiste no uso do modelo estocástico na forma de estado para tempo discreto, como (LARDIES, 2010):

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (1)$$

onde, $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estado de dimensão $n \times 1$, $\mathbf{A}$ é a matriz de estado do sistema de dimensão $n \times n$, $\mathbf{u}(k)$ é o vetor de incertezas do vetor de estado do sistema e de dimensão $n \times 1$, $\mathbf{y}(k)$ o vetor das l saídas observadas do sistema de dimensão $l \times 1$, $\mathbf{C}$ é a matriz de influência da saída de dimensão onde $l \times n$ e $\mathbf{v}(k)$ é o vetor de incerteza das observações $\mathbf{y}(k)$, de dimensão $l \times 1$.

Os processos $\{u(k)\}$ e $\{v(k)\}$ são assumidos serem do tipo Gaussiano branco, com média zero. Além disso, assume-se que os processos $\{u(k)\}$ e $\{v(k)\}$ sejam independentes do processo definido pelo vetor de estado do sistema $\{\mathbf{x}(k)\}$.

Define-se agora a seguinte matriz de auto-covariância $\mathbf{R}_i$ dos dados de saída, de dimensão $l \times l$, como:

$$\mathbf{R}_i = E[\mathbf{y}(k+i)\mathbf{y}^T(k)] = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} \quad (2)$$

sendo $\mathbf{G} = E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k)]$, a matriz de covariância cruzada entre os processos $\{\mathbf{x}(k)\}$ e $\{\mathbf{y}(k)\}$, de dimensão $n \times l$.

Para identificação do sistema dinâmico usando dados apenas de saída, define-se agora uma matriz $\mathbf{H}$ de estrutura Hankel blocos formada por $i+j-1$ matrizes de auto covariância $\mathbf{R}_i$ dos dados de saída como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_{i+1} & \cdots & \mathbf{R}_{i+j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^j\mathbf{G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{i+j-2}\mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A Equação (3) acima mostra que a matriz $\mathbf{H}$ é o produto da matriz de observabilidade do sistema $\mathbf{\Gamma}_i$, de dimensão $li \times n$, por outra matriz $\mathbf{\Lambda}$, de dimensão $n \times lj$, que depende também da matriz de estado do sistema $\mathbf{A}$ e $\mathbf{G}$, tal que:

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{A} \quad (4)$$

Para a estimativa da matriz de estado $\mathbf{A}$ e da matriz de influência da saída $\mathbf{C}$, usa-se a propriedade de invariância ao deslocamento da matriz de observabilidade $\mathbf{\Gamma}_i$, definindo-se como:

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_i^{(1)} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{\Gamma}_i^{(2)} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{\Gamma}_i^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_i^{(1)} \mathbf{A} \quad (5)$$

Assumindo o sistema como de ordem mínima igual a n , a matriz de estado $\mathbf{A}$ pode então ser calculada utilizando a pseudo-inversa de Moore-Penrose, de modo que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}_i^{(1)+} \mathbf{\Gamma}_i^{(2)} \quad (6)$$

A matriz $\mathbf{C}$ pode ser calculada tomando-se o primeiro bloco de linhas da matriz de observabilidade $\mathbf{\Gamma}_i$.

Para o caso ideal onde os dados de saída são livres de ruído, ambas a matriz $\mathbf{\Gamma}_i$ e $\mathbf{A}$ possuem *rank* igual a n , que também é a ordem do sistema dinâmico a ser identificado.

Entretanto, para casos reais, ou seja, onde os dados de saída estão contaminados com ruído, a matriz de covariância $\mathbf{H}$, de dimensão $li \times lj$, possui *rank* completo maior que n . A estimativa da matriz de observabilidade $\mathbf{\Gamma}_i$, neste caso, é obtida adotando-se um procedimento de redução de *rank* sobre a matriz de covariância de dados $\mathbf{H}$ usando SVD, a saber:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_s & \hat{\mathbf{Q}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_s^T \\ \hat{\mathbf{V}}_n^T \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^T + \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{S}}_n \hat{\mathbf{V}}_n^T \quad (7)$$

onde as matrizes $\hat{\mathbf{Q}}_s$, $\hat{\mathbf{S}}_s$ e $\hat{\mathbf{V}}_s$ possuem dimensão, respectivamente, $li \times n$, $n \times n$ e $n \times lj$.

A ordem n do sistema dinâmico pode ser estimada através do número de valores singulares mais significativos da matriz $\mathbf{H}$. Assim, uma estimativa da matriz de observabilidade estendida, denotado por $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$, pode ser obtida da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_s \quad \text{ou} \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s^{1/2} \quad (8)$$

O algoritmo para identificação de parâmetros modais baseado no presente método de subespaços pode ser resumido como:

- i) Estimativa da ordem mínima n do modelo do sistema dinâmico através da inspeção dos valores singulares mais significativos da matriz $\mathbf{H}$,
- ii) Estimativa da matriz de observabilidade estendida $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$ usando as Eqs. (7) e (8) e o cálculo da matriz de estado $\mathbf{A}$ usando a propriedade de invariância ao deslocamento de $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$,
- iii) Estimativa dos autovalores z_j e autovetores $\mathbf{\Psi}_j$ da matriz de estado $\mathbf{A}$ modelado em tempo discreto, para $j = 1, \dots, n$,
- iv) Cálculo dos n autovalores $\lambda_j = \log(z_j) / \Delta t$ do sistema válido para modelagem em tempo contínuo, onde Δt denota intervalo de discretização. As frequências naturais e os fatores de amortecimento são identificados pelas equações $\omega_j = |\lambda_j|$ e $\xi_j = -\text{Real}(\lambda_j) / |\lambda_j|$,
- v) Determinação da matriz $\mathbf{C}$, obtida através do primeiro bloco de linhas da matriz $\hat{\mathbf{\Gamma}}_i$, e os modos de vibrar $\mathbf{\Phi}_j$ são estimados pela equação $\mathbf{\Phi}_j = \mathbf{C} \mathbf{\Psi}_j$.

4.2. Identificação paramétrica usando o modelo de estado (Algoritmo 2)

Seja o modelo estocástico na forma de estado para tempo discreto descrito pela Equação (1), qual seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{w}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C} \mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k] \end{aligned} \quad (9)$$

Os processos de ruído $\mathbf{w}[k]$ e $\mathbf{v}[k]$ são ambos assumidos como um processo gaussiano branco e estacionário de média zero com as matrizes de covariância definidas como:

$$E\left[\begin{Bmatrix} \mathbf{w}[k] \\ \mathbf{v}[k] \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{w}^T[j] & \mathbf{v}^T[j] \end{Bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \delta[k-j] \quad (10)$$

Onde $E[\cdot]$ denota a média estatística e $\delta[k-j]$ a função delta de Dirac.

Para simplificar o desenvolvimento na formulação do presente algoritmo de identificação, seguem então algumas definições (Peeters e Roek, 1999). O vetor de estado do sistema é assumido como um processo estocástico $\{\mathbf{x}[k]\}$ com uma matriz de auto covariância do vetor de estado Σ de dimensão $n \times n$, definida como:

$$E[\mathbf{x}[k] \cdot \mathbf{x}^T[k]] = \Sigma \quad (11)$$

Assumido $\{\mathbf{w}[k]\}$ e $\{\mathbf{v}[k]\}$, como processos independentes e pós-multiplicando a primeira linha da equação (9) por $\mathbf{x}^T[k+1]$ e tomando a média dos valores conduz a seguinte equação:

$$\Sigma = E\left[\left(\mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{w}[k]\right) \cdot \left(\mathbf{x}^T[k]\mathbf{A}^T + \mathbf{w}^T[k]\right)\right] = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (12)$$

Agora, as matrizes de covariância cruzada e autocovariância dos processos de saídas $\mathbf{y}[k]$ são definidas como:

$$\mathbf{G} = E[\mathbf{x}[k+1] \cdot \mathbf{y}^T[k]] = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{S} \quad (13)$$

e

$$\mathbf{R}_i = E[\mathbf{y}[k+i] \cdot \mathbf{y}^T[k]] \quad (14)$$

Com uma manipulação algébrica na matriz $\mathbf{R}_i$, da equação (14), como feito na seção anterior, para uma quantidade de lags $i \geq 1$, usando as equações (11)-(14), permite mostrar que a matriz $\mathbf{R}_i$ assume a seguinte forma:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad (15)$$

A equação (15) fornece a relação entre as matrizes do sistema $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$, com as matrizes de autocovariância $\mathbf{R}_i$.

Para a realização do sistema, neste tipo de identificação, define-se uma coordenada de referência para calcular os modos de vibrar do sistema. Então, o vetor de saída $\mathbf{y}[k]$, com dimensão $l \times 1$, é definido como:

$$\mathbf{y}[k] = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_r[k] \\ \mathbf{y}_s[k] \end{Bmatrix} \quad (16)$$

onde $\mathbf{y}_r(k)$ é um vetor de dimensão $r \times 1$ contendo r saídas de referências enquanto $\mathbf{y}_s[k]$ representa um vetor de dimensão $(l-r) \times 1$ como um vetor que representa o restante da quantidade de informação do vetor de saída $\mathbf{y}[k]$.

A relação entre $\mathbf{y}_r[k]$ e $\mathbf{y}[k]$ é definida pela seguinte relação

$$\mathbf{y}_r[k] = \mathbf{L}\mathbf{y}[k] \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (l-r)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times (l-r)} \end{bmatrix}$ é uma matriz de dimensão $r \times l$, sendo $\mathbf{I}_r$ uma matriz de identificação $r \times r$.

A matriz de covariância entre o vetor de referência $\mathbf{y}_r[k]$, o vetor de estado $\mathbf{x}[k]$ e os processos de saída $\{\mathbf{y}[k]\}$ são definidos, respectivamente, como:

$$\mathbf{G}^r = E[\mathbf{x}[k+1] \cdot \mathbf{y}_r^T[k]] = \mathbf{G}\mathbf{L}^T \quad (19)$$

e

$$\mathbf{R}_i^r = E[\mathbf{y}[k+i]\mathbf{y}_r^T[k]] = \mathbf{R}_i \mathbf{L}^T \quad (20)$$

As matrizes $\mathbf{R}_i^r$ e $\mathbf{G}^r$, com dimensões, respectivamente, iguais a $l \times r$ e $n \times r$, são relacionadas analogamente a equação (15) como:

$$\mathbf{R}_i^r = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}^r \quad (21)$$

Para uma quantidade de $2i+j-2$ amostras, onde i e j são as quantidades de linhas e colunas dos blocos dos dados de saída, como mostrado abaixo, são os que definem as matrizes de bloco-Hankel $\mathbf{Y}_r$ e $\mathbf{Y}$, com dimensões respectivamente de, $ir \times j$ e $il \times j$, como:

$$\mathbf{Y}_r = \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_r[0] & \mathbf{y}_r[1] & \cdots & \mathbf{y}_r[j-1] \\ \mathbf{y}_r[1] & \mathbf{y}_r[2] & \cdots & \mathbf{y}_r[j] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_r[i-1] & \mathbf{y}_r[i] & \cdots & \mathbf{y}_r[i+j-2] \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{Y} = \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}[i] & \mathbf{y}[i+1] & \cdots & \mathbf{y}[i+j-1] \\ \mathbf{y}[i+1] & \mathbf{y}[i+2] & \cdots & \mathbf{y}[i+j] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}[2i-1] & \mathbf{y}[2i] & \cdots & \mathbf{y}[2i+j-2] \end{bmatrix} \quad (23)$$

A matriz de covariância de bloco-Toeplitz defasada, de dimensão $il \times ir$, formada pelas matrizes $\mathbf{R}_i^r$, da seguinte forma:

$$\mathbf{T}^r = \mathbf{Y} \mathbf{Y}_r^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^r & \mathbf{R}_{i-1}^r & \cdots & \mathbf{R}_1^r \\ \mathbf{R}_{i+1}^r & \mathbf{R}_i^r & \cdots & \mathbf{R}_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{2i-1}^r & \mathbf{R}_{2i-2}^r & \cdots & \mathbf{R}_i^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}^r & \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{G}^r & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{G}^r & \mathbf{G}^r \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_i \tilde{\mathbf{R}}_i^r \quad (24)$$

onde $\tilde{\mathbf{R}}_i^r$ é uma matriz de dimensão $n \times ir$ e $\mathbf{\Gamma}_i$ é a matriz de observabilidade, de dimensão $il \times n$, formada pela matriz de estado $\mathbf{A}$ e também pela matriz de influência das saídas $\mathbf{C}$.

Com a matriz de observabilidade definida, o procedimento para extrair os parâmetros é análogo ao da seção anterior (4.1).

5. SIMULAÇÃO DE DADOS DE SAÍDA PARA O SISTEMA ESTRUTURAL

Um sistema estrutural, do tipo massa-mola-amortecedor com seis graus de liberdade, como mostra a Figura (1), é usado para a validação dos métodos de identificação paramétrica para dados apenas de saída descritos neste trabalho.

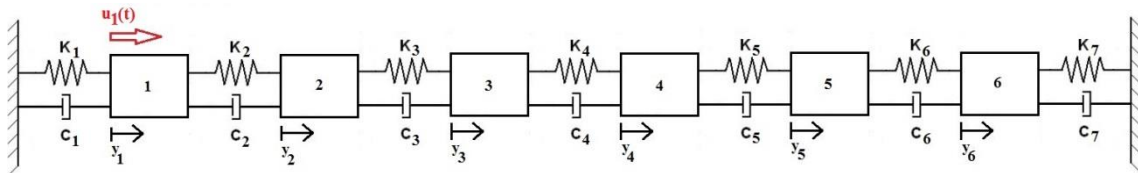
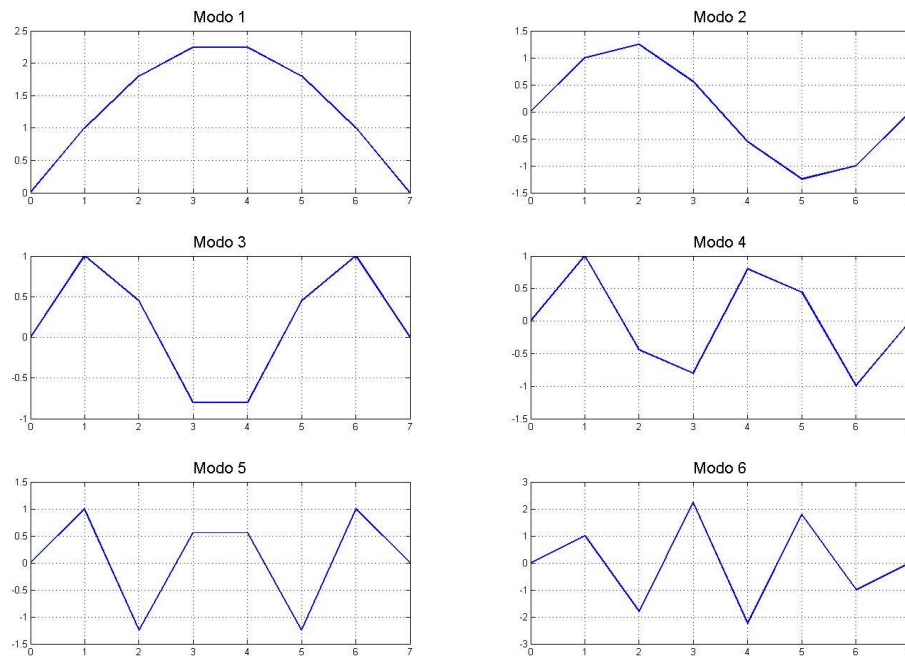


Figura 1. Sistema com 6 graus de liberdade

Adotando apropriadamente as massas, rigidezes e constantes de amortecimento, implica que as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento para este sistema estrutural são os mostrados na Tabela (1). Os coeficientes de amortecimento viscoso usados foram do tipo proporcional. Os modos de vibração naturais normalizados para o caso sem amortecimento são apresentados Figura (2).

Tabela 1. Frequências exatas do sistema mecânico com 6 graus de liberdade

Modos	Frequências naturais exatas (Hz)	Fatores de amortecimento exatos (ξ)
1	3,5415	0,0012
2	6,9055	0,0023
3	9,9231	0,0034
4	12,443	0,0042
5	14,339	0,0049
6	15,516	0,0053

**Figura 2. Modos de vibrar exatos do sistema mecânico com 6 graus de liberdade**

Para uma quantidade de N_p dados de entrada $u_1(k)$ do tipo ruído Gaussiano branco de média zero aplicada no bloco 1, como mostra a Figura (1), as saídas observáveis $y_i(k)$ da estrutura são calculadas através da seguinte soma de convolução:

$$y_i(k) = \sum_{\tau=0}^{N_p-1} h_{i1}(\tau) u_1(k-\tau) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (25)$$

onde, $h_{i1}(k)$ são as funções de respostas impulsiva para entrada no bloco 1 e saídas nos blocos 1-6 no instante discreto $k\Delta t$.

6. RESULTADOS

6.1. Identificação dos parâmetros modais para o caso sem amortecimento usando o algoritmo 1

Neste teste se usou uma quantidade de $N_p = 400$ de entrada e saídas usando um intervalo de discretização constante de $\Delta t = 0,03$ s., o que resulta na frequência máxima de Nyquist igual a $f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2(0,03)} = 16,66$ Hz. Adotando-se $i = 20$ blocos de linhas e $j = 156$ blocos de colunas e usando a matriz de auto covariância R_i , da Equação (2), de dimensão 6×6 , tem-se que a matriz $\mathbf{H}$ de estrutura Hankel, da equação (3) possui dimensão de 120×936 .

Com base nos valores singulares mais significativos da matriz $\mathbf{H}$ apresentados na Figura (3), a ordem mínima do modelo é identificada com $n=20$.

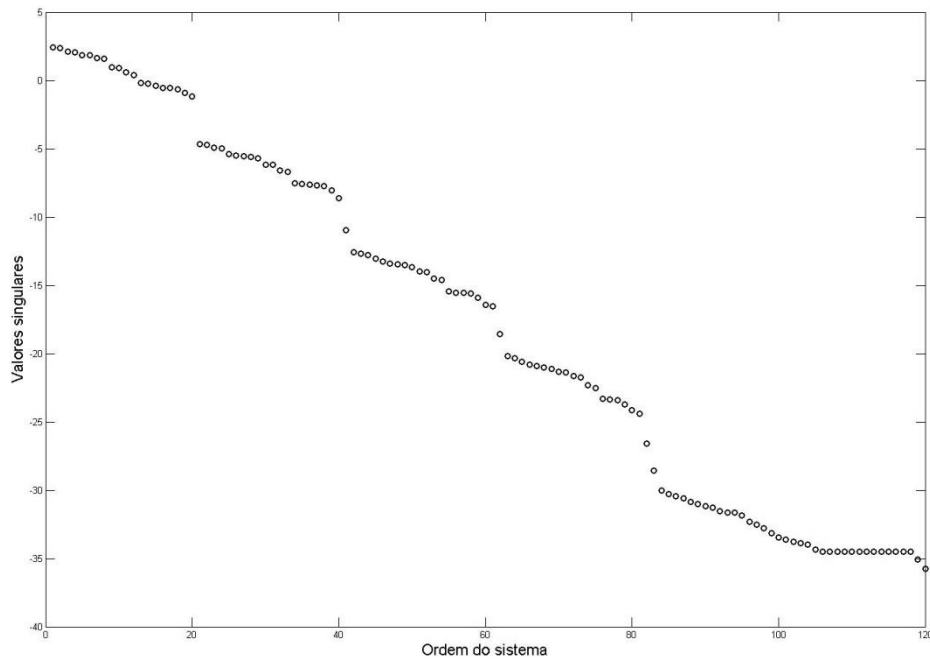


Figura 3. Valores singulares da matriz $\mathbf{H}$

Com base no algoritmo de identificação dos parâmetros modais apresentado na seção 4, verifica-se que para esta simulação de teste modal, usando dados obtidos de um sistema massa mola sem amortecimento, o resultado dos parâmetros modais identificados são os apresentados na Tabela (2), para diferentes ordens n 's do sistema. Os parâmetros identificados estão representados em negrito e os demais parâmetros são os relacionados com modos puramente computacionais.

Tabela 2. Frequências naturais exatas e identificadas

Modos	Frequências naturais Exatas (Hz)	Frequências naturais identificadas			
		n=24	n=20	n=16	n=12
-		0,9227			
-		3,436	1,0757	2,7085	
1	3,5415	3,626	3,5613	3,556	3,5426
-		6,0561	4,3199		
2	6,9055	6,8524	6,8615	6,8946	6,921
-		7,0473	8,7316	7,3721	
-			8,7643		
3	9,9231	9,4762	9,946	9,9074	9,9319
-		10,057			
4	12,443	12,458	12,458	12,411	12,467
-		13,107			
5	14,339	14,374	14,338	14,317	14,006
6	15,516	15,549	15,558	15,521	15,494

Nota-se que o uso deste algoritmo produz bons resultados na identificação das frequências naturais. Entretanto, a identificação dos modos de vibração naturais já não apresenta boa qualidade e portanto não foram apresentados nesta seção.

6.2. Identificação dos parâmetros modais para o sistema com amortecimento usando o algoritmo 2

Agora apresenta-se os resultados da aplicação do método de identificação para dados de saídas, considerando amortecimento do tipo viscoso e proporcional. Adotando-se $i = 191$ blocos de linhas e $j = 20$ blocos de colunas, as matrizes de estrutura bloco-Hankel $\mathbf{Y}_r$ e $\mathbf{Y}$ e a matriz de covariância $\mathbf{T}^r$ possuem dimensão 1140×191 . Os valores singulares de $\mathbf{T}^r$ estão apresentados na Figura (7), e a ordem mínima do modelo é identificada como $n=20$.

Para diferentes valores de ordens mínimas do modelo em torno de $n=20$, são identificadas as frequências naturais e os fatores de amortecimento (para $n=12$), apresentadas na Tabela (4).

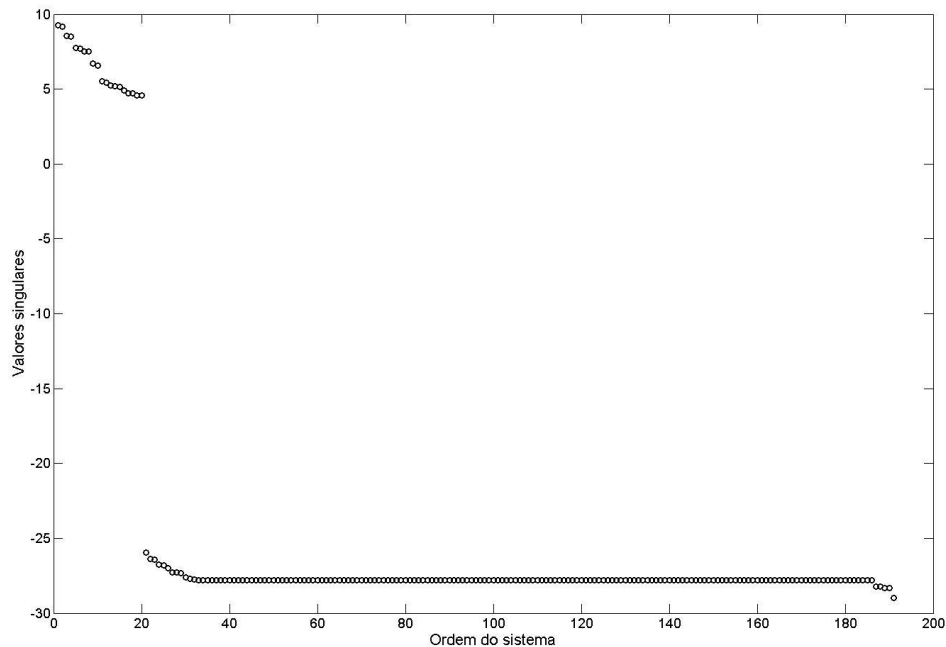


Figura 7. Valores singulares de $\mathbf{T}^r$

Tabela 4. Frequências naturais e Fatores de amortecimento identificados para ordem $n=12$

Modos	Frequências exatas (Hz)	Frequências Identificadas (Hz)				Fatores de amortecimento exatos (ξ)	Fatores de amortecimento identificados (ξ)
		n=24	n=20	n=16	n=12		
-		1,2673	0,5295				
-		3,4778	2,9226				
1	3,5415	3,5495	3,54	3,5436	3,5389	0,0012	0,0022
-			4,9181				
-		6,6347	5,805				
2	6,9055	6,9044	6,8575	6,9156	6,8987	0,0023	0,005
-		9,7724	9,2689	7,3474			
-				9,4939			
3	9,9231	9,9262	9,9005	9,8879	9,9127	0,0034	0,0023
4	12,443	12,441	12,469	12,427	12,459	0,0042	0,0006
-		13,957					
5	14,339	14,318	14,334	14,358	14,37	0,0049	0,0001
6	15,516	15,524	15,512	15,616	15,442	0,0053	0,2787
-		17,038					

Os modos de vibração naturais normalizados, para a ordem mínima $n=12$, são mostrados na Figura (8).

Nota-se novamente a boa qualidade na identificação das frequências naturais e fatores de amortecimento. Além disso, esse algoritmo 2 permite identificar de maneira bastante satisfatória os modos de vibração natural como mostra a Figura (8).

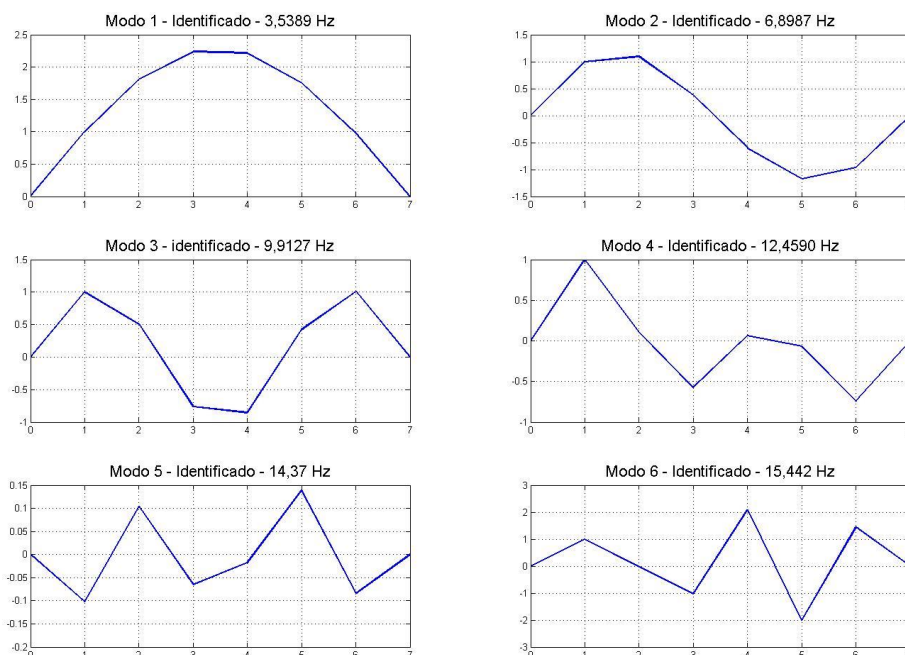


Figura 8. Modos de vibrar identificados do sistema

Os erros de identificação paramétrica obtidos em cada algoritmo são mostrados nas tabelas abaixo. Nota-se que, para esse teste com dados simulados numericamente, os erros são bastante pequenos para um algoritmo de identificação que conta com dados apenas de saída.

Algoritmo 1							
f_k	Frequências naturais exatas (Hz)	n=24	n=20	n=16	n=12	Média	Erro (%)
1	3,5415	3,626	3,5613	3,556	3,5426	3,55865	-0,484258083
2	6,9055	6,8524	6,8615	6,8946	6,921	6,87805	0,397509232
3	9,9231	9,4762	9,946	9,9074	9,9319	9,91965	0,034767361
4	12,443	12,458	12,458	12,411	12,467	12,458	-0,120549707
5	14,339	14,374	14,338	14,317	14,006	14,3275	0,080200851
6	15,516	15,549	15,558	15,521	15,494	15,535	-0,122454241

Algoritmo 2							
f_k	Frequências naturais exatas (Hz)	n=24	n=20	n=16	n=12	Média	Erro (%)
1	3,5415	3,5495	3,54	3,5436	3,5389	3,5418	-0,008471
2	6,9055	6,9044	6,8575	6,9156	6,8987	6,90155	0,0572008
3	9,9231	9,9262	9,9005	9,8879	9,9127	9,9066	0,1662787
4	12,443	12,441	12,469	12,427	12,459	12,45	-0,0562565
5	14,339	14,318	14,334	14,358	14,37	14,346	-0,0488179
6	15,516	15,524	15,512	15,616	15,442	15,518	-0,0128899

7. CONCLUSÕES

Este trabalho trata do desenvolvimento de algoritmos de identificação de parâmetros modais usando dados somente de saída baseado no método de subespaços. Os parâmetros modais identificados neste trabalho são: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos naturais de vibração normalizados. Já os dados usados para validar a

qualidade da identificação dos parâmetros foram obtidos via simulação numérica de um sistema massa mola amortecedor.

Com base nos resultados obtidos nos testes realizados, conclui-se o seguinte: 1) Os algoritmos possuem um custo computacional bem baixo, pois usam apenas ferramentas da álgebra linear, e 2) O algoritmo (2) produz melhores resultados que o algoritmo (1). Acredita-se que o motivo para esse melhor desempenho se deva ao uso de valores de um vetor de saída de referência, usado no algoritmo 2. A explicação para o uso dessa saída de referência vem do fato que métodos baseados em entrada e saída possuem a entrada como referência. Os métodos baseados em respostas impulsivas possuem as entradas impulsivas como referência. Assim, o presente método que conta com apenas os dados de saída, necessita de uma saída como referência.

8. REFERÊNCIAS

- Söderström, T. e Stoica, P., System Identification, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
Mevel L., Bassevillenn M., Goursat M. Stochastic subspace-bases structural identification and damage detection application to the steel-quake benchmark, Elsevier, 2002.
Lardies J., Minh-Ngi Ta. Modal parameter identification of stay cables from output-only measurements, 2010, Elsevier, 2010.
Lardies J., Modal parameter identification based on ARMAV and state-space approaches, 2010.
Peeters B., DE Roeck G., Hermans L., Wauters T., Kramer C., Smet C.A.M, Comparison of system identification methods using operational.

9. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Pedro Motta Nunes, pedromottanunes@hotmail.com¹
Heraldo Nélío Cambraia, herald@ufpr.br²

¹Universidade Federal do Paraná, Av. Cel. Francisco Heráclito dos Santos, 210, CEP 81531-990, Curitiba, Paraná, Brasil

Abstract. *The analysis of the dynamic behavior of mechanical structures is an important branch of engineering. The experimental modal analysis (AME) addresses the problem of characterizing the structural dynamics. Basically, the modal parameters calculated are: natural frequency, damping factor and natural vibration modes using experimental data. These experimental data comes from inputs and outputs measures at specific points on the structure. Data types that are commonly used in AME are of the impulse response function and input and output data. This paper proposes the development of an algorithm that uses input and output data, as well as an algorithm that uses only output data, since sometimes the excitement measurement becomes impractical if not impossible to obtain. This technique is known as operational modal analysis (OMA). The most common applications of OMA approach are, for example, civil structures such as bridges, buildings, cranes, internal combustion engines, rotors, etc. These structures have in common the difficulty of measuring the input data. The main objective of this work is the development and computational implementation of techniques of parametric identification in time domain, oriented to subspaces, for input and output data as well as for output data only.*

Keywords: experimental modal analysis, operational modal analysis, parametric Identification, oriented Subspace techniques