



21-25
AGOSTO DE 2016
FORTALEZA - CEARÁ

Controle Não Linear de um Pêndulo com Roda de Reação

João Francisco Silva Trentin, joaotrentin17@gmail.com¹

Gustavo Luis Chagas Manhães de Abreu, gustavo@dem.feis.unesp.br¹

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br¹

¹UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, Câmpus de Ilha Solteira, Av. Brasil, nº56, 15385-000, Ilha Solteira, SP.

Resumo: O controle de orientação usando como atuadores rodas de reação é uma das formas mais populares para estabilizar e rejeitar perturbações externas em dispositivos aeroespaciais. A partir da mudança controlada da taxa de variação do momento angular, usando por exemplo uma roda de reação, é possível controlar a taxa de oscilação e direção de corpos rígidos no espaço. Este artigo mostra a modelagem completa de um pêndulo rígido com uma roda de reação para estudar o controle e efeitos nocivos que estes podem ter com relação a saturação dos atuadores. O trabalho busca comparar três abordagens de controle de posição com o uso de modelos linearizados e não-lineares empregando controle PID, um método de controle não linear por linearização parcial da relação entrada-saída e um controlador liga-desliga. Testes são feitos com várias condições e níveis de perturbações visando analisar o desempenho, limites de saturação e efetividade de prática de cada implementação.

Palavras-chave: controle de orientação, rodas de reação, dinâmica não-linear.

1. INTRODUÇÃO

O pêndulo com roda de reação nada mais é do que um pêndulo rígido com um disco livre para girar, em um eixo paralelo ao seu eixo de rotação, na sua extremidade livre. O disco livre para girar é conhecido como roda de reação que apresenta uma quantidade substancial de inércia (da Cruz Pereira and Weber, 2011). Recentemente o controle e estabilização de mecanismos utilizando rodas de reação tem se tornado mais comum e atrativo devido a sua configuração simples e confiável para aplicações na indústria aeroespacial (Jepsen *et al.*, 2009). Assim, rodas de reação são muito utilizadas em sistemas que requerem mudança de orientação¹, como por exemplo, em robôs (Walker and Wee, 1991) e satélites (Ismail and Varatharajoo, 2010), e são dispositivos que armazenam momento angular, podendo ser usado para aumentar a estabilidade contra torques de distúrbios externos.

A utilização da roda de reação para controle de posição do pêndulo, na configuração mostrada na Fig.(1), utiliza a taxa de variação da amplitude do momento angular, tornando possível controlar a taxa de oscilação e direção de corpos rígidos no espaço pela aplicação de torques controlados na roda de reação. O princípio físico básico consiste na validade da conservação do momento angular e no equilíbrio de sua taxa de variação igualada com os torques envolvidos (Ardema, 2005; Goldstein *et al.*, 2011). Além disso, o sistema de pêndulo é caracterizado de forma não linear, o que permite explorar e demonstrar fenômenos não-lineares complexos como a instabilidade e o caos (Andrievsky, 2011).

Para sistemas que utilizam rodas de reação como atuadores existem diversos estudos e pesquisas de controle não-convencional, como controle inteligente utilizando *fuzzy* (Omar, 2007; Park, 2007) e redes neurais (Tehrani *et al.*, 2005; Li *et al.*, 2006). Porém, esses tipos de controladores ainda são deficientes em garantias de estabilidade e confiabilidade para a indústria aeroespacial. O presente trabalho irá apresentar três controladores distintos para o controle de posição do pêndulo rígido com roda de reação. Será apresentado um controlador clássico envolvendo as ações proporcional, integral e derivativa, que ainda são bastante utilizados para controle de orientação usando rodas de reação (Wang *et al.*, 2003; Bang *et al.*, 2003). Também são apresentados dois controladores não-lineares para o controle de orientação do pêndulo com roda de reação. O controle por linearização entrada-saída apresentado visa fazer transformações algébricas para tornar o sistema parcialmente ou totalmente linear para que assim seja capaz de seguir um referência (Slotine and Li, 1991). Também foi

¹A comunidade de engenharia aeroespacial usa o termo atitude, que neste trabalho será referenciada como orientação.

projetado um controlador liga-desliga que basicamente mantém o sistema dentro de uma faixa de operação trabalhando com um erro mínimo, e quando o sistema está para sair dessa faixa o sinal de atuação do controlador é ligado ou desligado. Os resultados mostram que tanto o controlador linear quanto os não lineares fazem o controle de posição do pêndulo com roda de reação de maneira eficiente. Porém, os controladores não lineares apresentam um menor gasto energético possuindo um comportamento mais flexível e portanto acompanhando uma referência com menor atuação.

2. MODELAGEM DO PÊNDULO COM RODA DE REAÇÃO

Na Fig.(1) é mostrado um pêndulo rígido com massa m , comprimento ℓ e fixo no ponto O . A base móvel inercial é descrita pelos eixos (x, y, z) e pela base ortonormal $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. A base móvel descrita pelos eixos (x_1, y_1, z_1) com base ortonormal $\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1\}$ rotaciona solidária ao pêndulo com ângulo θ . A roda de reação com massa M e raio R é fixa no ponto A e a base móvel (x_2, y_2, z_2) com base ortonormal $\{\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}_2\}$ rotaciona com ângulo ψ solidário a roda de reação.

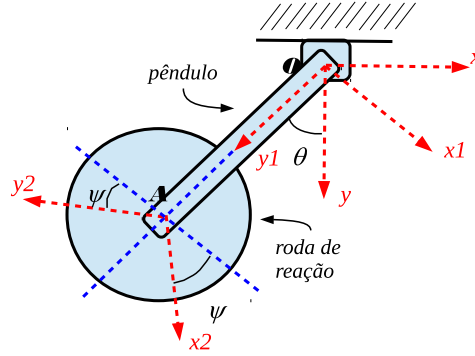


Figura 1: Pêndulo rígido com roda de reação

O momento angular do pêndulo rígido, representado na base móvel (x_1, y_1, z_1) é:

$$\mathcal{H} = I_{z_1}^O \dot{\theta} \hat{k}_1 \quad (1)$$

sendo que $I_{z_1}^O = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2$ o momento de inércia do pêndulo e da roda de reação calculado no ponto O utilizando o teorema dos eixos paralelos e $\dot{\theta}$ a velocidade angular do pêndulo. A taxa de variação do momento angular $\dot{\mathcal{H}}$ é igual a soma de torques relativos ao ponto O :

$$\dot{\mathcal{H}} \equiv I_{z_1}^O \ddot{\theta} = T - r(m + M)g \sin \theta \quad (2)$$

sendo $\ddot{\theta}$ a aceleração angular do pêndulo, r a distância do ponto O ao centro de massa do conjunto e T o torque de controle fornecido pela roda de reação:

$$T = \dot{\mathcal{H}}_{RW} \equiv I_{z_1}^A \ddot{\psi} \quad (3)$$

sendo $\mathcal{H}_{RW}$ o momento angular fornecido pela roda de reação, $I_{z_1}^A = \frac{1}{2}MR^2$ o momento de inércia da roda de reação e $\ddot{\psi}$ a aceleração angular da roda de reação. Assim, as Eqs.(2) e (3) são as equações que descrevem o movimento do pêndulo com roda de reação. Estas equações são integradas com o método de Runge-Kutta considerando $m = 0.03$ kg, $M = 0.3$ kg, $\ell = 0.3$ m, $R = 0.1$ m, $r = 0.2776$ m e uma taxa de amostragem de 1 kHz.

3. CONTROLE DO PÊNDULO COM RODA DE REAÇÃO

Para o controle do pêndulo rígido com roda de reação foram utilizados tanto controladores lineares, do tipo PID, quanto controladores não-lineares, do tipo linearização entrada-saída e liga-desliga. O presente artigo apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelos controladores, quando desejado o controle de posição utilizando uma entrada degrau ou senoidal como referência.

3.1 Controle PID

Um controlador PID é constituído por três ações: proporcional (P), integral (I) e derivativa (D), essas três parcelas correspondem aos efeitos proporcional, integrador e derivador do sinal do erro atuante (Castrucci

et al., 2011). A ação proporcional do controlador consiste de um ganho fixo que conforme o valor do ganho é aumentado, pode gerar a diminuição do erro residual. A ação integral utiliza da integral dos erros que levam o sistema a instabilização para diminuir ou até eliminar o erro causado por grandes variações angulares. A ação derivativa tem um efeito estabilizador, adicionando amortecimento ao sistema e consequentemente melhorando a estabilidade (Ogata, 2010). Os parâmetros do controlador PID são de fácil ajuste e a sua construção é robusta para o ambiente industrial e aeroespacial, e o controlador no domínio complexa s (Laplace) é :

$$C(s) = k_p + k_d s + \frac{k_i}{s} \quad (4)$$

sendo k_p a constante proporcional, k_d a constante derivativa e k_i a constante integral. Para fazer o projeto do controlador PID, que utiliza de equações lineares, fez-se a linearização das equações de movimento do pêndulo rígido com roda de reação em torno do ponto de equilíbrio estável para a obtenção do modelo linear. Desse modo, aplicando a transformada de Laplace nas equações linearizadas e fazendo manipulações algébricas foi obtida a função de transferência $G(s)$ que relaciona o ângulo $\Theta(s)$ desejado com a velocidade angular da roda de reação $\psi_v(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{\Psi_v(s)} = \frac{I_{z_1}^A s}{I_{z_1}^O s^2 + r_{CM} mg} \quad (5)$$

O diagrama de blocos na Fig.(2) indica a comparação entre uma entrada desejada para ângulo θ e o valor medido. A partir deste valor, um resíduo é usado como entrada para o controlador $C(s)$, que funciona como um compensador. Este controlador produz uma velocidade angular $\Psi_v(s)$ que funciona como uma entrada para a planta $G(s)$ que irá produzir uma saída mais próxima possível da entrada de referência desejada.

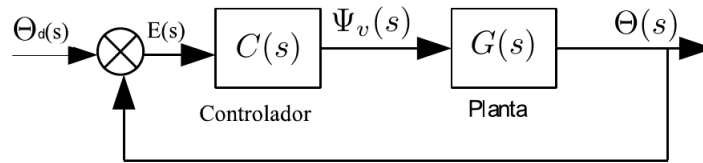


Figura 2: Diagrama de blocos do sistema

Para fazer o controle de posição do pêndulo rígido com roda de reação deve-se encontrar os valores dos ganhos do controlador. Assim, a partir do critério de estabilidade de Routh definiu-se a faixa de valores dentro dos quais seria possível controlar a posição do pêndulo, para a linearização feita em torno do ponto de equilíbrio estável. Desse modo, projetou-se um controlador que para uma dada entrada de referência, seja ela um degrau ou uma referência senoidal, o ângulo obtido fosse o mais próximo do ângulo desejado. A Fig.(3) mostra o controle de posição Fig.(3 a), para um entrada degrau, assim como o sinal de controle Fig.(3 b), ou seja, a velocidade angular da roda de reação, para um controlador PID.

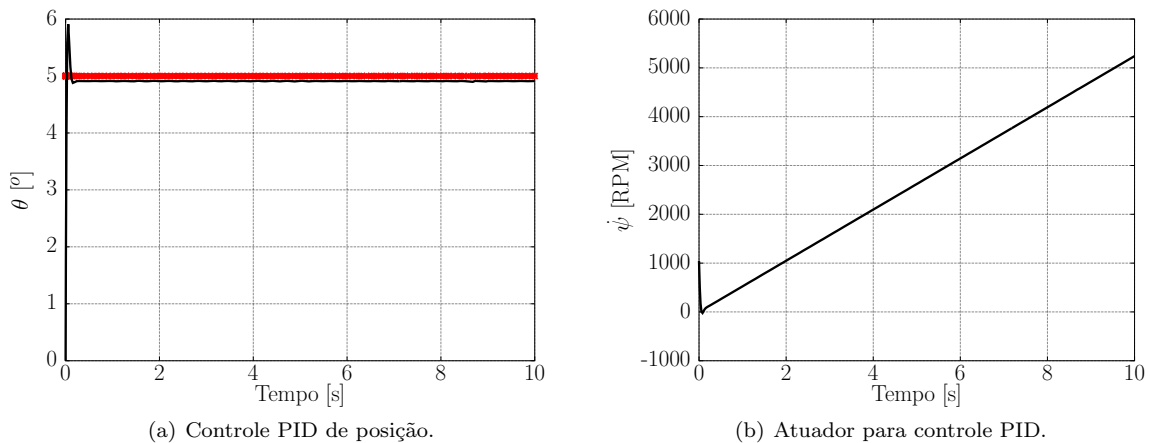


Figura 3: Controle PID de posição do pêndulo e sinal de controle para uma entrada degrau como referência. Linha — indica a posição e o sinal de controle para a posição $\theta = 5^\circ$ e * referência.

O controle de posição é mostrado na Fig.(4a) para uma entrada senoidal e o sinal de atuação é visto na Fig.(4b). Com isso, o controlador PID consegue fazer o controle de orientação do pêndulo rígido com roda

de reação, contudo a linearização das equações de movimento faz com que o sinal de atuação para ambas as referências utilizadas empregue velocidades angulares com alto nível de amplitude. Além disso, quando a referência é um degrau, o sinal de atuação deve ser uma rampa, o que satura o atuador e limita o uso da roda de reação.

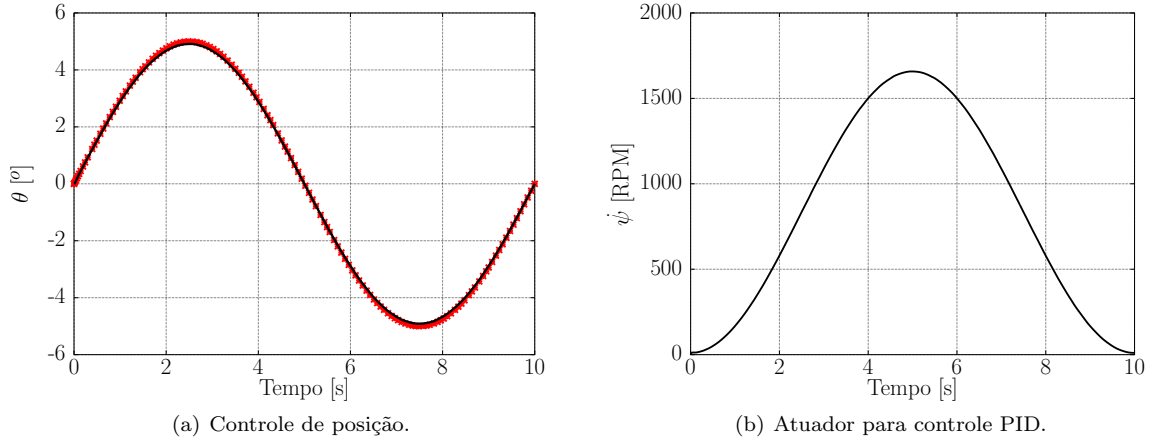


Figura 4: **Controle PID de posição do pêndulo e sinal de controle para uma entrada senoidal como referência. Linha — indica a posição e o sinal de controle para a posição $\theta = 5^\circ$ e * referência.**

3.2 Controle não-linear

O controle não-linear da posição do pêndulo rígido com roda de reação foi feito utilizando dois métodos de controle, a linearização entrada-saída e o liga-desliga. O projeto de controladores por linearização entrada-saída visa realizar transformações algébricas em um sistema dinâmico não-linear para que este se torne parcialmente ou totalmente linear. A diferença da linearização deste método está, quando comparada as linearizações tradicionais, no fato de serem feitas transformações de estado e de realimentação em vez de aproximações lineares da dinâmica do problema (Slotine and Li, 1991). O método busca transformar os sistemas dinâmicos originais em modelos equivalentes mais simplificados resultando em controladores não-lineares robustos e adaptativos.

O controle por linearização entrada-saída tem como objetivo fazer com que a saída do sistema acompanhe uma trajetória (entrada) desejada mantendo o estado sempre dentro de um limite de operação, sendo que a entrada desejada e o seu tempo são derivados a uma ordem suficientemente alta e são assumidas como conhecidas e delimitadas. A dificuldade desse método está no fato de que a saída do sistema está imediatamente relacionada com a entrada, através de uma variável de estado e equações não lineares. Além disso, a dificuldade do projeto do controlador não-linear que consiga acompanhar com grande desempenho a trajetória desejada pode ser diminuída quando se consegue uma relação simples e direta entre a saída e a entrada desejada (Slotine and Li, 1991).

Para o pêndulo rígido com roda de reação, a partir das equações de movimento é possível obter uma relação direta entre a entrada e a saída dada por:

$$I_{z1}^O \ddot{\theta} = I_{z1}^A \ddot{\psi} - r(m+M)g \sin \theta \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_{z1}^A}{I_{z1}^O} \ddot{\psi} - r(m+M)g \sin \theta \quad (7)$$

e para simplificar a manipulação $f = \frac{I_{z1}^A}{I_{z1}^O}$ e $g = r(m+M)g \sin \theta$, obtendo:

$$\ddot{\theta} = g\ddot{\psi} - f \quad (8)$$

Como o atuador é a roda de reação é necessário isolar a aceleração angular na Eq.(8).

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{g} (\ddot{\theta} + f) \quad (9)$$

Para o controle por realimentação entrada-saída a Eq.(10) deve ser respeitada.

$$\ddot{\theta} = r_{ef} - k_1 \dot{e} - k_2 e \quad (10)$$

sendo que r_{ef} é a derivada segunda do sinal de referência utilizado, k_1 e k_2 constantes do controlador, $\dot{e}$ é a derivada do sinal do erro atuante e que é a diferença entre o ângulo θ obtido e a referência estabelecida. Para

verificar o erro atuante no sistema devem ser feitas algumas manipulações, começando por substituir a Eq.(10) na Eq.(9), obtendo:

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{g} (r_{ef} - k_1 \dot{e} - k_2 e - f) \quad (11)$$

e substituindo a Eq.(11) na Eq.(8) tem-se:

$$\ddot{\theta} = r_{ef} - k_1 \dot{e} - k_2 e - f + f \quad (12)$$

$$\ddot{\theta} - r_{ef} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0 \quad (13)$$

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0 \quad (14)$$

sendo $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$. Desse modo, Eq.(14) representa o erro atuante no sistema em malha fechada, apresentando uma dinâmica do erro exponencialmente estável. Assim, utilizando as equações apresentadas foi projetado o controlador não linear por realimentação entrada-saída e fez-se o controle de posição utilizando como referência as entradas degrau e senoidal. Os resultados obtidos para o controle de posição e o sinal de controle são mostrados nas Figs. (5) e (6).

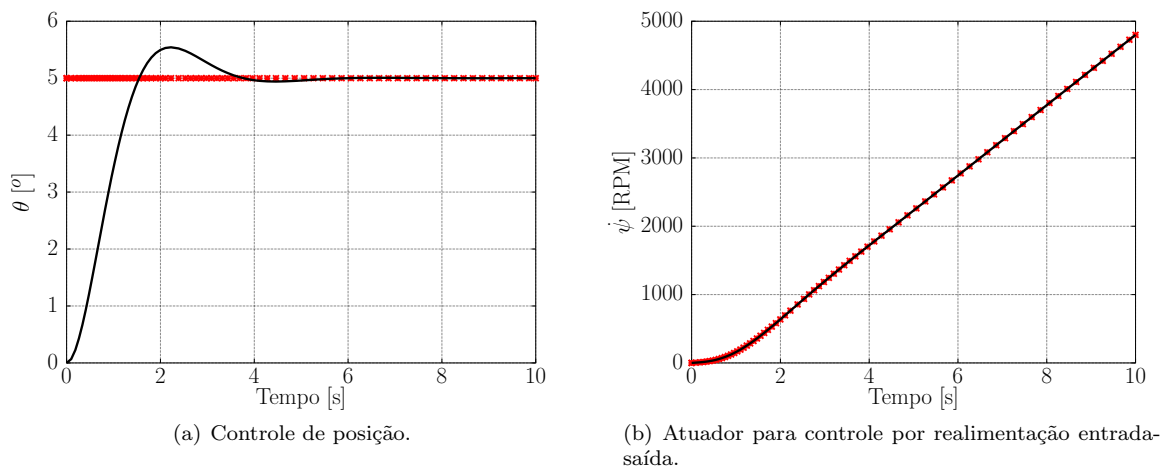


Figura 5: Controle não linear por realimentação entrada-saída de posição do pêndulo e sinal de controle para uma entrada degrau como referência. Linha — indica a posição e o sinal de controle para a posição $\theta = 5^\circ$ e * referência.

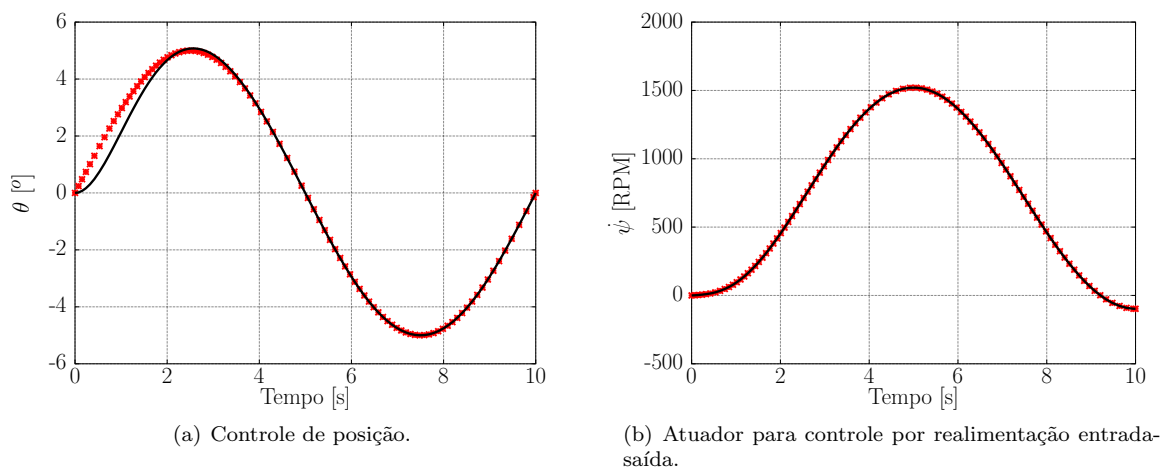


Figura 6: Controle não linear por realimentação entrada-saída de posição do pêndulo e sinal de controle para uma entrada senoidal como referência. Linha — indica a posição e o sinal de controle para a posição $\theta = 5^\circ$ e * referência.

Já, o controlador liga-desliga é um sistema de controle de duas posições, no qual o elemento atuante tem duas posições fixas, ligado ou desligado (Ogata, 2010). É um tipo de controlador simples e barato, muito utilizado em sistemas de controle industriais e domésticos.

Deste modo, o controle de orientação irá atuar de forma que a variável controlada, no caso o ângulo θ , tenha seu valor máximo quando o erro é positivo e seu valor mínimo quando o erro é negativo. O parâmetro que deve ser ajustado para esse controlador são as ações de mínimo e de máximo do sinal de controle. O controle liga-desliga consegue manter a variável controlada o mais próxima possível da referência especificada, tendo como principal desvantagem a variação da saída controlada em torno do sinal de referência. Assim, nas Figs. (7) e (8) é mostrado o controle de posição e o sinal de controle utilizando um controlador liga-desliga para ambas as referências utilizadas.

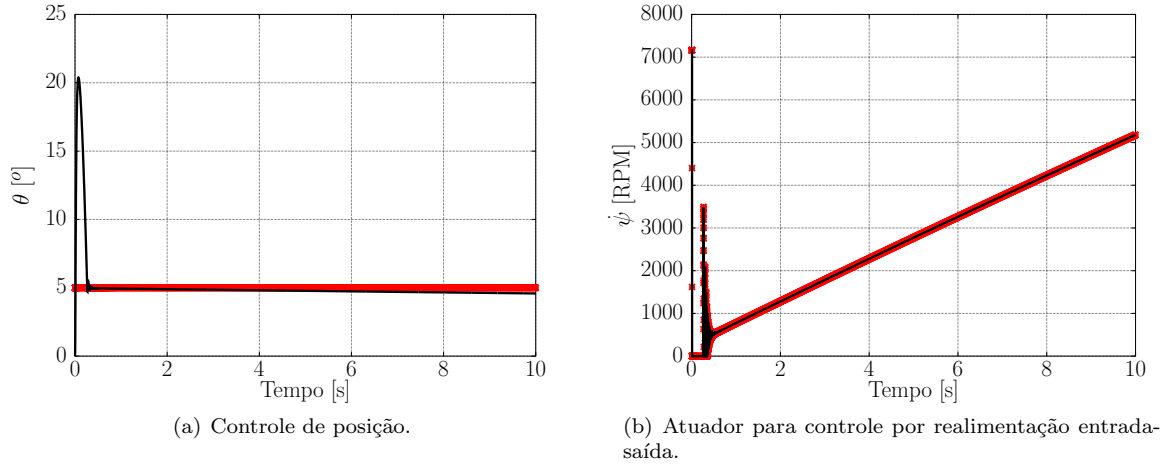


Figura 7: Controle não linear liga-desliga de posição do pênculo e sinal de controle para uma entrada degrau como referência. Linha — indica a posição e o sinal de controle para a posição $\theta = 5^\circ$ e * referência.

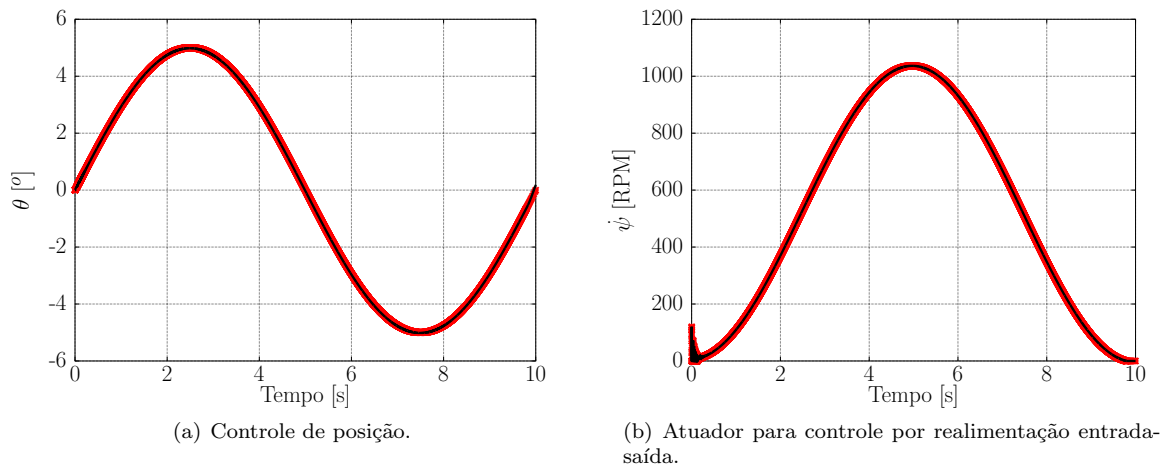


Figura 8: Controle não linear liga-desliga de posição do pênculo e sinal de controle para uma entrada senoidal como referência. Linha — indica a posição e o sinal de controle para a posição $\theta = 5^\circ$ e * referência.

Para o controle de orientação utilizando de uma referência degrau nota-se que tanto para o controle não linear quanto para o controle linear que o sinal de atuação é uma rampa, sendo assim, ocorrendo a saturação do atuador, o controle de atuação para ambos os casos pode ser aplicado somente em um curto período de tempo.

Quando utilizado da referência senoidal, ou seja, buscando que a orientação do pênculo ficasse dentro de uma faixa de valores, nota-se que os controladores não lineares têm um desempenho melhor fazendo com que o sinal de atuação esteja numa faixa de valores de velocidades angulares menores do que do controlador PID.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando o desempenho do controlador PID nota-se que é necessário uma grande quantidade de energia para o seu controle devido a linearização das equações para a aplicação do método, sendo que o sistema precisa equilibrar o torque produzido pelo peso do pênculo com roda de reação. Já para o controle não-linear, o sistema se comporta com maior flexibilidade e consegue acompanhar a uma referência com uma menor atuação, apresentando melhores resultados para o sistema apresentado neste trabalho.

A comparação dos métodos PID e controle não-linear mostra que existe uma limitação em usar modelos linearizados para o projeto de reguladores, o que compromete o desempenho e ainda satura o atuador. O controle realizado com modelos não-lineares, apesar de serem mais sofisticados, conseguem obter um desempenho muito superior. Porém, constata-se que devido a limitação da velocidade angular da roda de reação, métodos de controle mais sofisticados envolvendo chaveamento seriam melhores para esta aplicação e será tema de trabalhos futuros.

5. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao PIBIC/CNPq por sua bolsa. Os autores agradecem o apoio da FAPESP processo 12/09135-3 e CNPq processo 303403/2013-6.

6. REFERÊNCIAS

- Andrievsky, B., 2011. "Global stabilization of the unstable reaction-wheel pendulum". *Automation and Remote Control*, Vol. 72, No. 9, pp. 1981–1993. ISSN 0005-1179. doi:10.1134/S0005117911090189. URL <http://dx.doi.org/10.1134/S0005117911090189>.
- Ardema, M.D., 2005. *Newton-Euler Dynamics*. Springer, New York, 1st edition.
- Bang, H., Tahk, M.J. and Choi, H.D., 2003. "Large angle attitude control of spacecraft with actuator saturation". *Control Engineering Practice*, Vol. 11, No. 9, pp. 989 – 997. ISSN 0967-0661. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0967-0661(02)00216-2. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066102002162>. Special Section on Algorithms and Applications of Iterative Feedback Tuning.
- Castrucci, P.L., Bittar, A. and Sales, R., 2011. *Controle Automático*. LTC, Rio de Janeiro. ISBN 9788521617860.
- da Cruz Pereira, M. and Weber, H.I., 2011. "In plane position control of a rotary arm using a reaction wheel". In *10ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*.
- Goldstein, H., Poole, C.P. and Safko, J., 2011. *Classical Mechanics*. Pearson, New York, 9th edition.
- Ismail, Z. and Varatharajoo, R., 2010. "A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control". *Advances in Space Research*, Vol. 45, No. 6, pp. 750 – 759. ISSN 0273-1177. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2009.11.004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117709007078>.
- Jepsen, F., Sborg, A., Pedersen, A.R. and Yang, Z., 2009. "Development and control of an inverted pendulum driven by a reaction wheel". In *Mechatronics and Automation, 2009. ICMA 2009. International Conference on*. IEEE, pp. 2829–2834.
- Li, Z., Ma, L. and Khorasani, K., 2006. "A dynamic neural network-based reaction wheel fault diagnosis for satellites". In *Neural Networks, 2006. IJCNN '06. International Joint Conference on*. pp. 3714–3721. doi: 10.1109/IJCNN.2006.247387. URL http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1716609.
- Ogata, K., 2010. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson, São Paulo - SP, 5th edition.
- Omar, H., 2007. *Genetic-Based Fuzzy Logic Controller for Satellites Stabilized by Reaction Wheels and Gravity Gradient*, American Institute of Aeronautics and Astronautics. doi:doi:10.2514/6.2007-6445. URL <http://dx.doi.org/10.2514/6.2007-6445>.
- Park, Jong-Oh; Oh, C.S.B.H.T.M.J., 2007. "An experimental study on attitude control of spacecraft using fuzzy controller". In H. Siguerdidjane, ed., *17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*. pp. 491–496.
- Slotine, J. and Li, W., 1991. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall. ISBN 9780130408907. URL <https://books.google.nl/books?id=cwpRAAAAMAAJ>.
- Tehrani, E., Khorasani, K. and Tafazoli, S., 2005. "Dynamic neural network-based estimator for fault diagnosis in reaction wheel actuator of satellite attitude control system". In *Neural Networks, 2005. IJCNN '05. Proceedings. 2005 IEEE International Joint Conference on*. Vol. 4, pp. 2347–2352 vol. 4. doi:10.1109/IJCNN.2005.1556268. URL http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1556268tag=1.
- Walker, M. and Wee, L.B., 1991. "Adaptive control of space-based robot manipulators". *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, Vol. 7, No. 6, pp. 828–835. ISSN 1042-296X. doi:10.1109/70.105391. URL http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=105391tag=1.
- Wang, B., Gong, K., Yang, D. and Li, J., 2003. "Fine attitude control by reaction wheels using variable-structure controller". *Acta Astronautica*, Vol. 52, No. 8, pp. 613 – 618. ISSN 0094-5765. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0094-5765(02)00133-9. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576502001339>.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

Nonlinear Control of a Reaction Wheel Pendulum

João Francisco Silva Trentin, joaotrentin17@gmail.com¹

Gustavo Luis Chagas Manhães de Abreu, gustavo@dem.feis.unesp.br¹

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br¹

¹UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, Campus de Ilha Solteira, Av. Brasil, nº56,15385-000, Ilha Solteira,SP.

Resumo: *The orientation control using reaction wheel as actuators is one of the most popular forms to stabilize and reject external disturbances in aerospace devices. From the controlled change of angular momentum rate, using for example a reaction wheel, it is possible to control the oscillation and direction rate in rigid bodies in space. This paper shows the completely modeling of the reaction wheel rigid pendulum to study control and adverse effects that can be related to actuators saturation. It is also observed that the system can present regular and chaotic motions that can facilitate or complicate the control. The purpose of this paper is to compare two position control approaches using linearized and nonlinear models using PID control and a nonlinear control by the input-output linearization. Simulations have been made with various conditions and disturbances levels seeking to analyse the performance, saturation limits and practical effectiveness of each implementation.*

Palavras-chave: *orientation control, reaction wheel, nonlinear dynamics.*