

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO ATRITO NO COMPORTAMENTO DE CORPOS MOEDORES EM MOINHOS DE BOLAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

Wladimir José Gomes Florêncio¹, e-mail: wladimir@ifpi.edu.br¹,
Neilor Cesar dos Santos², e-mail: neilor@ifpb.edu.br²

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí; Rodovia BR – 407, S/N, Zona Rural, Paulistana - PI

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Av. Primeiro de Maio, 720, Bairro Jaguaribe, João Pessoa – PB.

RESUMO

Neste trabalho mostrou-se que foi possível realizar simulações do movimento de corpos moedores no interior de um moinho de bolas, em escala de laboratório, utilizando-se o Método dos Elementos Discretos (MED). O objetivo permitiu o estudo do comportamento, variando-se o coeficiente de atrito e a velocidade de operação com 57% e 80% da sua velocidade crítica. O comportamento da dinâmica do processo de moagem foi observado utilizando-se um sistema de filmagem em que foram analisados os deslocamentos nos tempos de 2s, 8s, 15s e 20s e comparando-os com os obtidos pela simulação computacional em 2D, realizada no software de simulação DEMpack[®]. Verificou-se ser possível realizar a calibração do modelo de simulação a partir da comparação das imagens obtidas pela filmagem do experimento. Assim foi possível também, analisar o efeito do atrito no comportamento da dinâmica do processo: melhores resultados foram obtidos quando se utilizou um coeficiente de atrito mais baixo para simular o comportamento dos corpos moedores.

Palavra-chave: Moinho de bolas, Coeficiente de atrito, Método dos Elementos Discretos.

1. INTRODUÇÃO

O conceito original do Método dos Elementos Discretos (MED) foi estabelecido por Cundall e Strack (1979, v.29, p.49 - 75) apud Mishra (2003, p.74) que aplicaram ao estudo de sólidos particulados sob condições de carregamento dinâmico. Em operações onde se utilizam moinhos cadentes, para estudos de simulação do processo de moagem, desde os primeiros trabalhos realizados por Mishra e Rajamani (1992) e Mishra e Rajamani (1994 a e 1994 b) o Método dos Elementos Discretos (MED) vem sendo bastante utilizado.

O MED refere-se a um método numérico que permite a determinação de rotações e deslocamentos finitos de corpos discretos que interagem entre si ou entre os limites do domínio local por meio de leis de contato, onde a perda do contato e a formação de novos contatos entre os corpos são calculados num ciclo progressivo. A lei de contato muitas vezes permite a penetração virtual entre as partículas. A quantidade e a taxa de penetração levam a determinação da força de contato incremental. Cada ciclo de cálculo leva o sistema do tempo t para $t + \Delta t$ e envolve a aplicação de leis de interação incrementais força-deslocamento em cada contato, resultando em novas forças entre partículas que são resolvidos para se obter o equilíbrio de forças e momentos para cada partícula.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Método dos Elementos Discretos - MED

O Método dos Elementos Discretos (MED) compreende basicamente dois estágios, o cálculo das forças de contato e posteriormente o cálculo do movimento das partículas por meio da segunda Lei de Newton. No primeiro, as forças de interação entre partículas são calculadas permitindo-se uma interpenetração entre os elementos, tornando esta formulação para cálculo da relação força-deslocamento, Donzé et al, (2008). No segundo estágio, a segunda Lei de Newton é utilizada para determinar as acelerações e velocidades de cada partícula, e a partir daí, a nova posição dos elementos.

No método dos Elementos Discretos os modelos são baseados em diferentes tipos de leis constitutivas para os contatos. O modelo mais simples é assumir leis de contatos lineares para a força normal e cisalhante, além de rigidez e ângulo de atrito constantes no deslizamento. Existem outros modelos força-deslocamento para o componente normal, como leis elásticas não lineares, e rigidez normal e cisalhante dependente da força. Ainda existem modelos que consideram a resistência ao rolamento das partículas (Neves, 2009).

2.2 Leis do movimento

Neste trabalho, as forças e torques, devido à gravidade, colisão e atrito de rolamento são considerados e equações do movimento de Newton para uma partícula i em contato com a partícula j , assume a seguinte forma:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum (\mathbf{F}_{ij}^n + \mathbf{F}_{ij}^t) + m_i \mathbf{g} \quad (1)$$

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = \sum (\mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_{ij}^t) - \boldsymbol{\tau}_{ij}^r \quad (2)$$

Onde m_i , I_i , $\mathbf{v}_i$ e ω_i , são respectivamente a massa, momento de inércia e velocidade translacional e rotacional da partícula i . $\mathbf{F}_{ij}^n$ e $\mathbf{F}_{ij}^t$ são as forças normais e tangenciais devido ao contato entre a partícula i e j no passo de tempo atual, conforme relatado na Fig. 1. $\mathbf{R}_i$ é o vetor entre o centro da partícula i e o ponto de contato onde a força $\mathbf{F}_{ij}^t$ é aplicada.

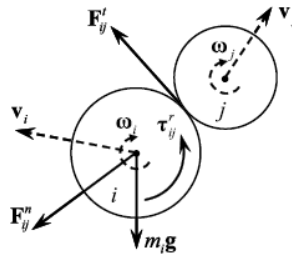


Figura1. Contato entre a partícula i e a partícula k , Marigo, 2010.

O termo $\boldsymbol{\tau}_{ij}^r = -\mu_r \mathbf{R}_i |\mathbf{F}_{ij}^t| \hat{\omega}_i$, na Equação 2 é adicionado devido o torque causado pelo atrito de rolamento. O parâmetro μ_r é definido como o coeficiente de atrito de rolamento e $\hat{\omega}_i$ é o vetor unitário da velocidade angular da partícula i .

Após o cálculo da força do contato e a sua contribuição para cada partícula o movimento das partículas pode ser determinado. O movimento translacional pode ser escrito em termos de posição, velocidade e aceleração, e o movimento rotacional em termos de sua velocidade angular e aceleração angular.

As equações do movimento dadas nas Equações (1) e (2) são integradas usando diferenças finitas centrais que envolvem um valor Δt para o passo de tempo. Os valores das velocidades translacionais e velocidades angulares são calculadas para intervalos de $t \pm n \frac{\Delta t}{2}$. No entanto, os valores dos deslocamentos, acelerações translacionais e angulares, força e torque, são calculados em intervalos primários $t \pm n \Delta t$. As acelerações são calculadas como:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{v}_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})} - \mathbf{v}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \right) \quad (3)$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{1}{\Delta t} \left(\omega_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})} - \omega_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \right) \quad (4)$$

As Equações (3) e (4) podem ser substituídas em 1 e 2 determinando as velocidades para o tempo $t \pm n \frac{\Delta t}{2}$. Tem-se como resultado:

$$\mathbf{v}_i^{(t+\Delta t/2)} = \mathbf{v}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left(\sum \frac{1}{m_i} (\mathbf{F}_{ij}^n + \mathbf{F}_{ij}^t) + \mathbf{g} \right) \Delta t \quad (5)$$

$$\omega_i^{(t+\Delta t/2)} = \omega_i^{(t-\Delta t/2)} + \left(\sum (\mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_{ij}^t) - \boldsymbol{\tau}_{ij}^r \right) \Delta t \quad (6)$$

As velocidades mostradas nas equações acima são usadas para atualizar a posição do centro da partícula. A posição da partícula pode-se determinar como segue:

$$\mathbf{r}_i^{(t+\Delta t)} = \mathbf{r}_i^{(t)} + \mathbf{v}_i^{(t-\Delta t/2)} \Delta t \quad (7)$$

O passo de tempo para a integração numérica deve ser definido menor do que um determinado valor crítico para fazer o cálculo estável. Com base na frequência natural de um sistema característico de oscilação de massa-mola, o período de oscilação pode ser calculado como:

$$\Delta t = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (8)$$

Onde, m é a massa da partícula e K é a rigidez do sistema de mola-massa. Em sistemas reais, o passo de tempo é calculado utilizando a menor massa e a maior rigidez.

Uma vez definida a Equação para o instante em que as partículas entram em contato, alguns modelos podem ser apresentados como forma de encontrar a força que surge no momento da colisão.

2.3 Modelo de contato

O modelo de contato inicialmente usado por Cundall e Strack é baseado em um modelo de Kelvin-Voigt representado na Figura 2. Uma mola, um amortecedor e um deslizador representam o modelo de contato na direção normal e tangencial. Este modelo assume a definição dos seguintes parâmetros nas direções normais e tangenciais: Rigidez – k ; Coeficiente de amortecimento – η e Coeficiente de atrito – μ .

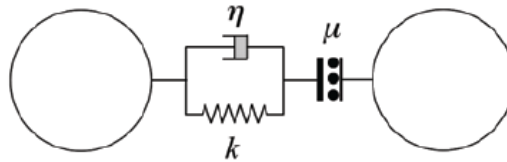


Figura 2. Modelo de contato Kelvin – Voigt, Marigo, 2010.

Cundall e Strack definem na Equação 9 para o modelo de contato normal e a Equação (10) para força de contato na direção tangencial.

$$\mathbf{F}_{ij}^n = (-k_n \delta_{ij}^n - \eta_n \mathbf{v}_{ij}^n) \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_{ij}^t = (-k_t \delta_{ij}^t - \eta_t \mathbf{v}_{ij}^s) \quad (10)$$

Os parâmetros de rigidez nas direções normais e tangenciais (k_n e k_t), parâmetros de amortecimento (η_n e η_t), e o coeficiente de atrito μ devem ser definidos no modelo de simulação. δ_{ij}^n e δ_{ij}^t são os deslocamento normal e tangencial devido as forças normais e tangenciais, $\mathbf{v}_{ij}^s$ representa a velocidade de deslizamento no pontos de contato definida conforme a Eq.(11):

$$\mathbf{v}_{ij}^s = \mathbf{v}_{ij} - (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij})\mathbf{n} + (R_i\omega_i + R_j\omega_j) \times \mathbf{n}_{ij} \quad (11)$$

Mishra (2003) estudou um modelo não-linear cuja adaptação é relativa ao modelo de contato de Cundall e Strack, Fig.3.

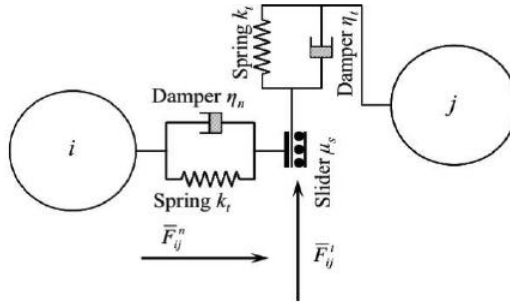


Figura 3. Modelo de contato de Hertz Mindlin, Mishra, (2003).

Neste modelo, o primeiro termo da Equação (9) é substituído por um termo não linear que considerar a Teoria Hertz para contato normal. Para o contato tangencial Mishra propôs uma adaptação da Eq. (9) para incluir um termo de dissipação viscosa na Eq. (11). Por conseguinte o modelo de contato modificado resulta na seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{ij}^n = (-k_n \delta_{ij}^{n^{3/2}} - \eta_n (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij}) \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_{ij}^t = (-k_t \delta_{ij}^t - \eta_t \mathbf{v}_{ij}^t) \quad (13)$$

Onde $\mathbf{v}_{ij}^s$ velocidade de deslizamento foi substituída por $\mathbf{v}_{ij}^t$ velocidade tangencial relativa. Forças tangenciais suficientemente alta fará com que as partículas escorreguem uma em relação a outra ou outras superfícies com as quais elas estão em contato. Considere menos coesivas as partículas sujeitas a uma força normal constante: a medida do escorregamento devida a tangencial é determinada por:

$$|\mathbf{F}_{ij}^t| < \mu |\mathbf{F}_{ij}^n| \quad (14)$$

Estas equações representam um corte para a magnitude da máxima força tangencial para um dado coeficiente de atrito estático μ e é conhecida como Lei de Coulomb do atrito. Se a Eq. (14) é satisfeita o efeito de $\mathbf{F}_{ij}^t$ é provocar uma pequena o movimento relativo, denominado "Microdeslizamento" e a Eq. (13) é utilizada como força tangencial. Se a Eq. (14) não é satisfeita o deslizamento abrange toda a área de contato e isso pode ser referido como "grosso deslizamento". Neste caso, a força tangencial é dada pela primeira lei de atrito Amontons 'da seguinte forma, onde $\hat{\mathbf{t}}_{ij}$ é o vetor unitário tangencial:

$$\mathbf{F}_{ij}^t = -\mu |\mathbf{F}_{ij}^n| \hat{\mathbf{t}}_{ij} \quad (15)$$

Este modelo é uma extensão do modelo de força de contato linear mola amortecedor de Cundall e Strack. As forças de contato normais e tangenciais não-lineares são representadas pelas Eqs.(16) e (17) e que resultam de uma combinação do modelo não linear de Hertz na direção normal e do modelo de Mindlin linear elástico na direção tangencial com um termo dissipativo na direção tangencial. Para ambas as direções normais e tangenciais um segundo termo de dissipação é aplicado para explicar a energia perdida durante as colisões através de deformação inelástica e atrito.

No modelo de contato de Hertz Mindlin a colisão entre as duas esferas i e j , a força normal F_{ij}^n atuando em cada esfera é dado por:

$$F_{ij}^n = -\frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*}\delta_{ij}^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\frac{5}{6}}\Psi\sqrt{S_n m^*}v_{ij}^n \quad (16)$$

Onde E^* é o Módulo de Young das duas partículas que colidem, R^* é o raio equivalente δ_{ij}^n representa o deslocamento de partícula normal devido à força normal, m^* é a massa equivalente, a rigidez do contato normal $S_n = 2E^*\sqrt{R^*\delta_n}$ e v_{ij}^n a componente normal da velocidade relativa. O coeficiente de amortecimento Ψ é uma função do coeficiente de restituição, e , assume um valor entre 0 e 1 (totalmente viscoso para totalmente elástico)

A força tangencial F_{ij}^t depende do deslocamento tangencial δ_{ij}^t , a velocidade relativa tangencial v_{ij}^t e a rigidez de contato tangencial $S_t = 8G^*\sqrt{R^*\delta_n}$. A força tangencial pode ser ainda limitada pela condição de deslizamento definida pela lei do atrito de Coulomb.

$$F_{ij}^t = -S_t\delta_{ij}^t - 2\sqrt{\frac{5}{6}}\Psi\sqrt{S_n m^*}v_{ij}^t \quad (17)$$

O coeficiente de amortecimento é uma função do coeficiente de restituição e é definida como:

$$\Psi = -\frac{\ln e}{\sqrt{(\ln e)^2 + \pi^2}} \quad (18)$$

onde e é o coeficiente de restituição.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1. Movimento dos corpos moedores no moinho

Foram realizadas 3 (três) diferentes tipos de simulações, utilizando para simulação pelo MED o *software* DEMpack e para o pré-processamento o *software* GID versão 12.0.3 (<http://www.gidhome.com>). A primeira, apenas com 2 (dois) corpos moedores, a segunda com 3 (três) corpos moedores, a terceira com 18 (dezoito) corpos moedores, com o objetivo de validar a simulação computacional a partir dos resultados experimentais. Os corpos moedores foram discretizados pelo MED para a simulação do movimento dos corpos moedores e utilizado o modelo de contato de Hertz-Mindlin para simular o comportamento de interação entre os corpos moedores. Para simulação do comportamento da jarra do moinho foi utilizado o modelo do Método dos Elementos Finitos, modelo elástico plástico, mesmo sabendo que o moinho (jarra) utilizado neste trabalho não possui essa característica, pois o seu material é composto por cerâmica de alumina. Porém esse é o único modelo disponível para o material, no *software* utilizado. É possível perceber que os corpos poderão interagir entre si e entre corpos e as paredes do moinho. Dessa forma, é preciso saber quando ocorrem as colisões ou contatos entre os corpos na simulação.

São mostrados aqui o comportamento do movimento dos corpos moedores para os tempos de $t=2s$, $8s$, $15s$ e $20s$ para 57% e 80% da velocidade crítica (N_C), com os coeficientes de atrito variando entre 0,1 e 0,51. A Fig. 6 mostra os corpos moedores no tempo $t=0s$.

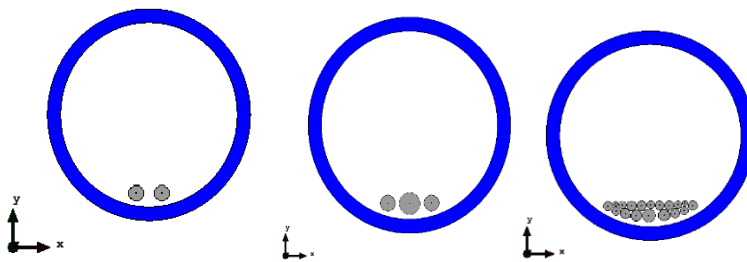


Figura 6. Posição dos corpos moedores no início da simulação, Autoria Própria

a) Para dois corpos moedores:

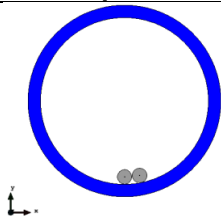
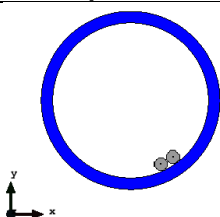
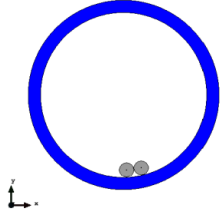
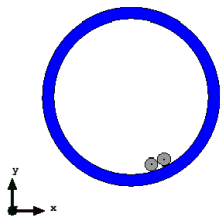
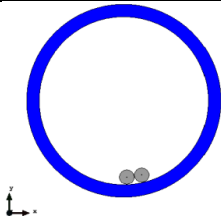
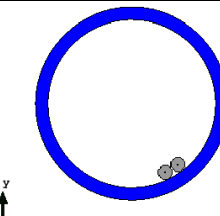
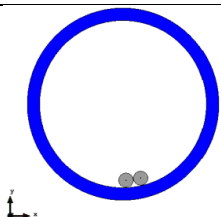
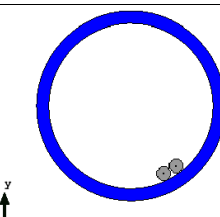
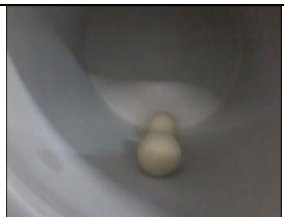
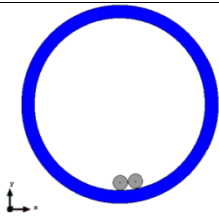
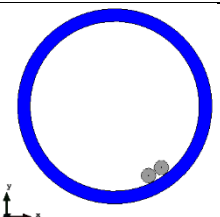
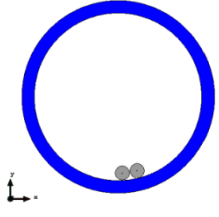
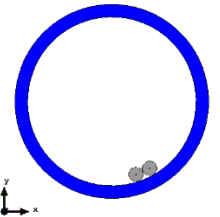
Tempo	Simulação		Experimental
	$\mu=0,1$	$\mu=0,51$	
t= 2s			
t= 8s			
t= 15s			
t= 20s			

Figura 7. Deslocamento para (57%) da velocidade crítica, dois corpos moedores , Autoria Própria

Tempo	Simulação		Experimental
	$\mu=0,1$	$\mu=0,51$	
t= 2s			
t= 8s			

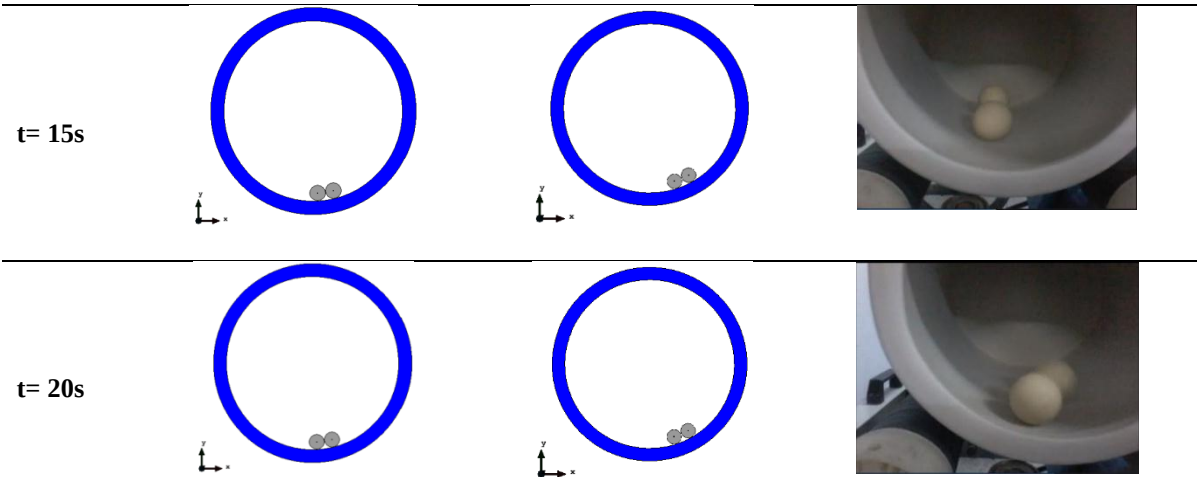


Figura 8. Deslocamento para (80%) da velocidade crítica para dois corpos moedores, Autoria Própria

b) Para três corpos moedores

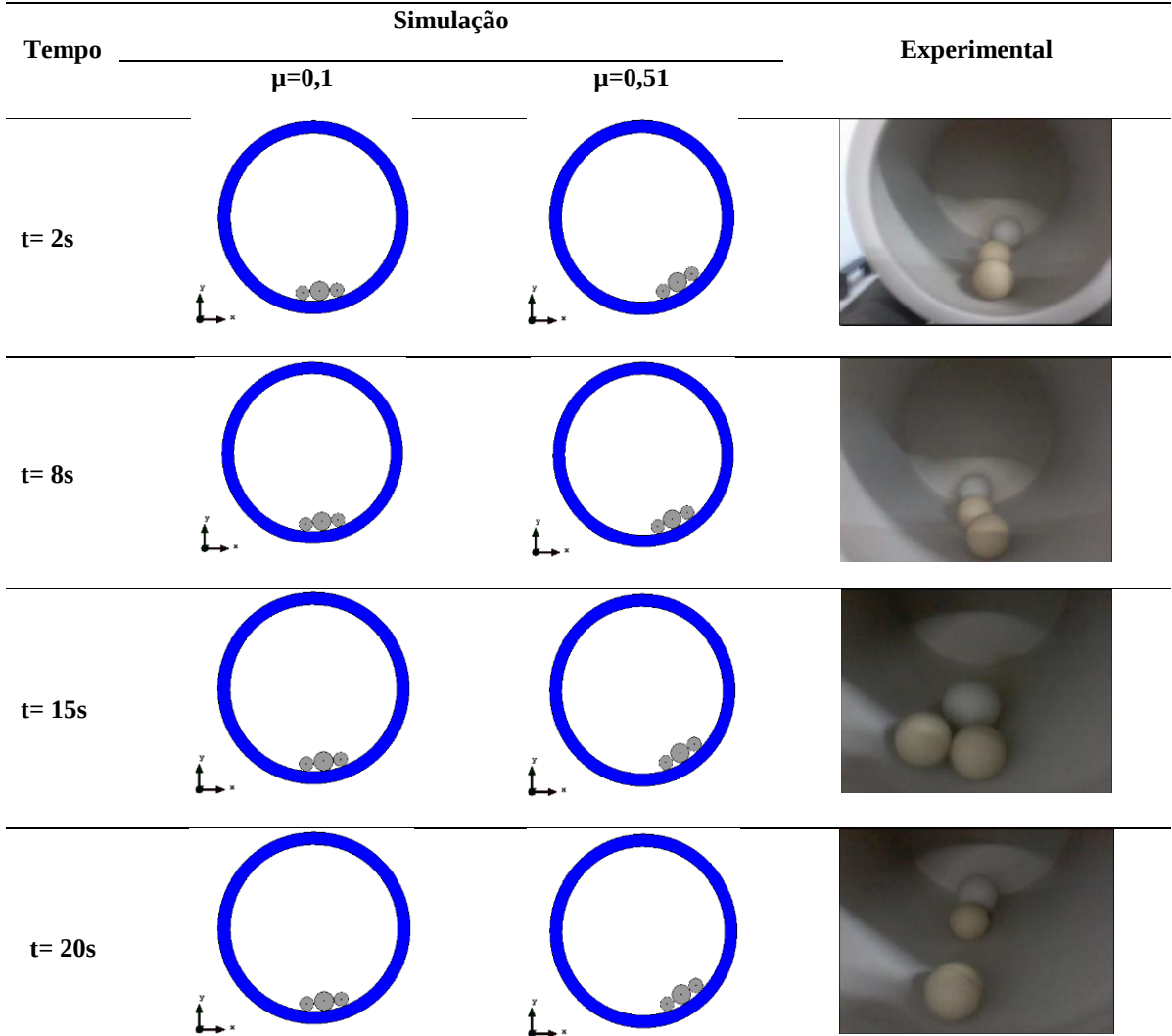
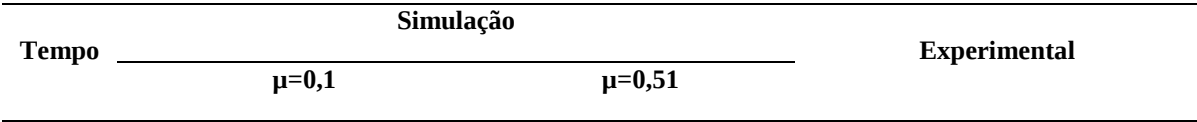


Figura 9. Deslocamento para (57%) da velocidade crítica para três corpos moedores, Autoria Própria



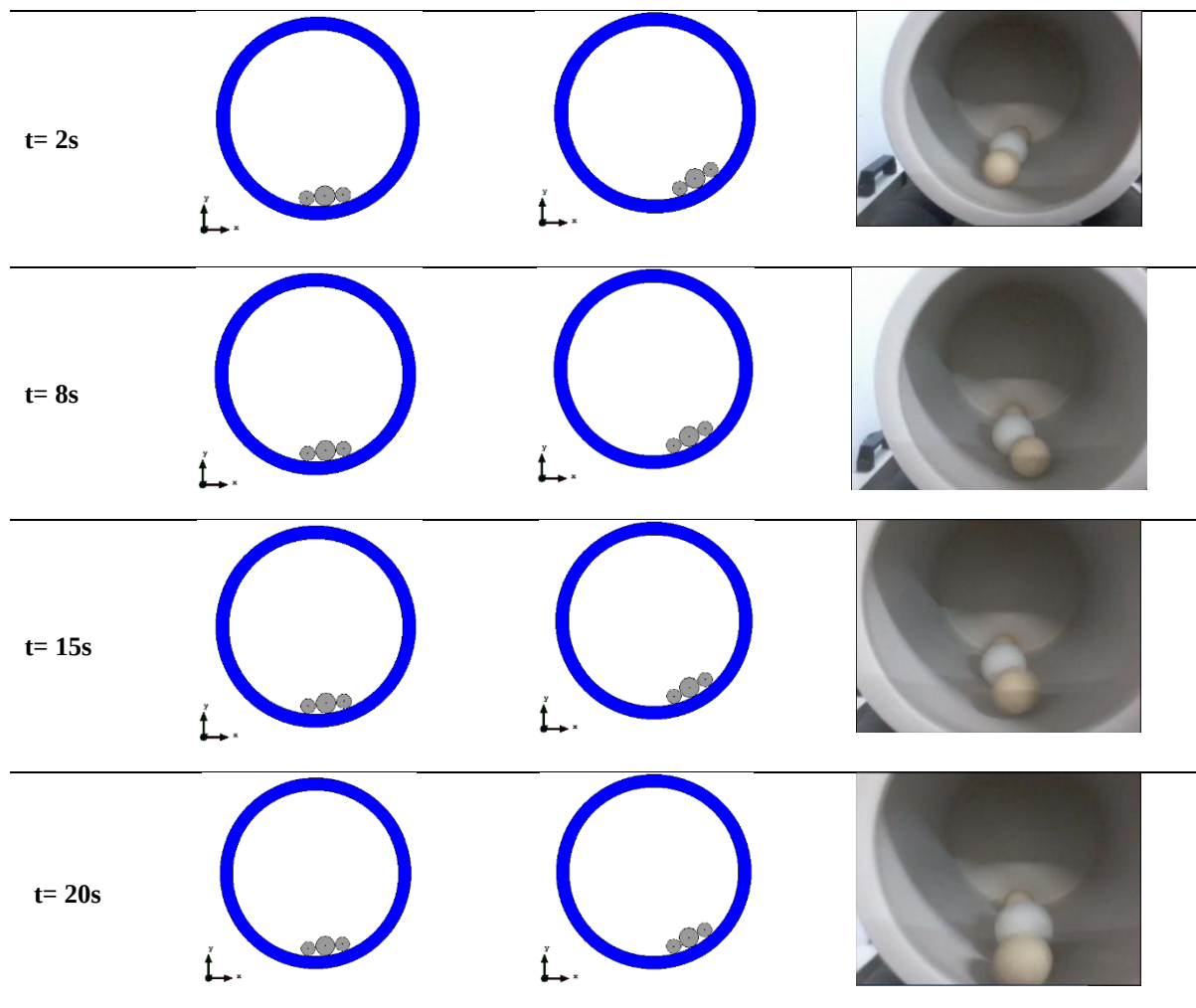
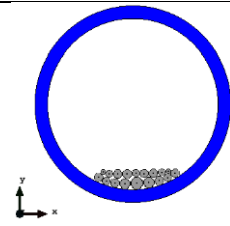
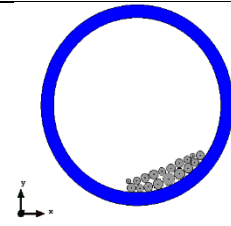
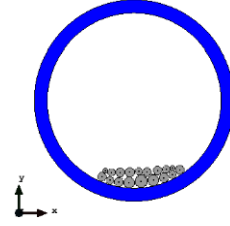
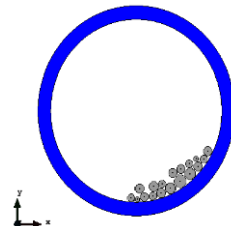


Figura 10. Deslocamento para (80%) da velocidade crítica para três corpos moedores, Autoria Própria

c) Para dezoito corpos moedores

Tempo	Simulação		Experimental
	$\mu=0,1$	$\mu=0,51$	
t= 2s			
t= 8s			

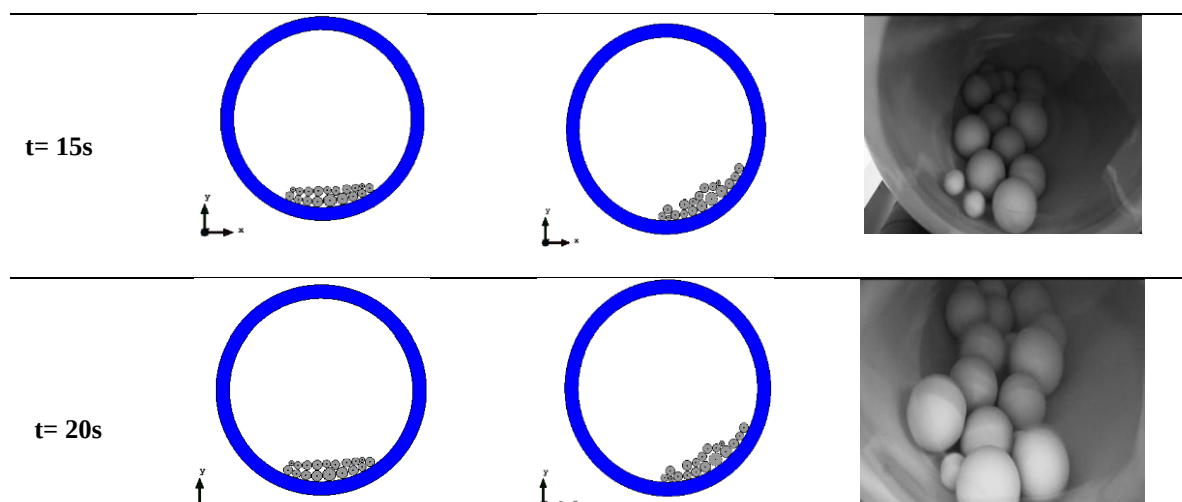


Figura 11. Deslocamento para (57%) da velocidade crítica para vários corpos moedores, Autoria Própria

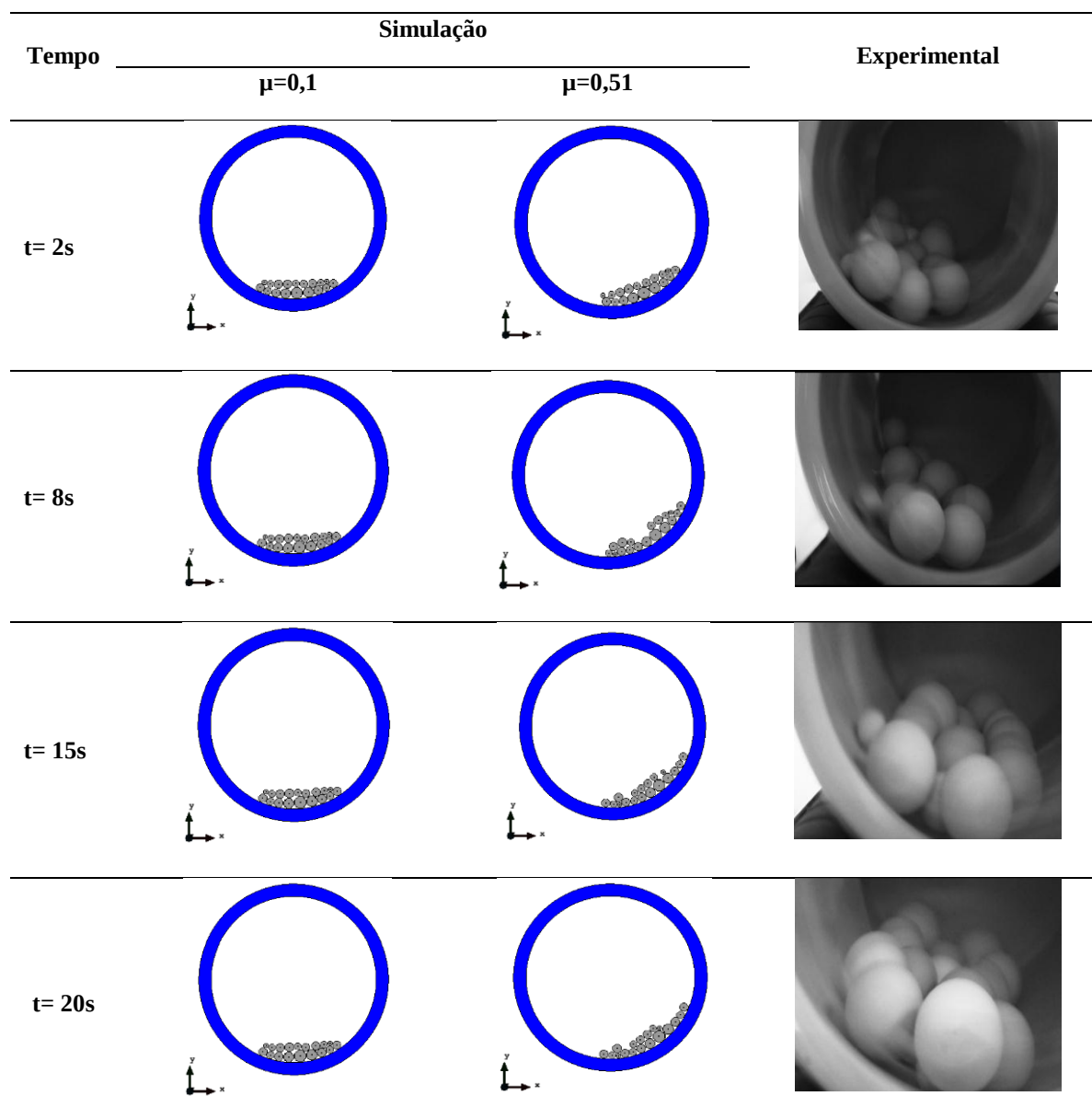


Figura 12. Deslocamento para (80%) da velocidade crítica para vários corpos moedores, Autoria Própria

Observa-se em todos os casos anteriores que o movimento dos corpos moedores foram os mesmos independentemente da velocidade crítica utilizada, ou seja, inicialmente atinge-se um máximo para posteriormente se estabilizar sofrendo pequenas oscilações em relação a posição de equilíbrio. É possível observar que mesmo a simulação sendo realizada em duas dimensões (2D), o movimento foi qualitativamente o mesmo que o observado experimentalmente quando considerando três dimensões (3D).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das simulações do movimento dos corpos moedores para dois, três e dezoito corpos moedores verificou-se que é possível obter parâmetros que possam ser utilizados, comparando com o comportamento experimental, para validar a simulação computacional se aproximando da realidade (experimentação). Foi possível observar que a movimentação dos corpos moedores, geradas pela simulação foram de maneira qualitativa similares as ocorridas no experimento. Na maioria das simulações, inicialmente, houve um crescimento nos valores dos deslocamentos e posterior uma estabilização em torno de uma posição de equilíbrio, comportamento muito próximo do verificado na prática.

Foi possível verificar que o coeficiente de atrito de Coulomb, foi um fator determinante no comportamento da movimentação dos corpos moedores no moinho aqui utilizado, em que não se utiliza revestimentos e elevadores que poderiam propiciar uma maior capacidade de transferência da energia necessária ao processo de moagem, acredita-se que com isso aumentaria-se a eficiência do moinho e consequentemente um menor gasto de energia. Nesta metodologia utilizada, verificou-se que a variação do percentual da velocidade crítica não se mostrou determinante na comparação visual do comportamento do movimento dos corpos moedores no moinho.

5. AGRADECIMENTOS:

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG;
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI e;
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraíba – IFPB.

6. REFERÊNCIAS

CUNDALL, P. A., STRACK, O.D.L. **A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies**. Géotechnique, v. 29, p. 47-65, 1979.

DONZÉ, F.V.; RICHEFEU, V.; MAGNIER, S. (2008). **Advances in Discrete Element Method Applied to Soil, Rock and Concrete Mechanics**. Eletronic Journal of Geotechnical Engineering, 13.

M. MARIGO, D. L. CAIRNS, M. DAVIES, M. COOK, A. INGRAM, E. H. STITT Developing Mechanistic Understanding of Granular Behaviour in Complex Moving Geometry using the Discrete Element Method. Part A: Measurement and Reconstruction of Turbulent Motion using Positron Emission Particle Tracking, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol. 59, No. 3 (2010), pp. 217-238.

MISHRA, B.K., 2003. **A review of computer simulation of tumbling mills by the discrete element method: Part I - contact mechanics**. Int. J. Miner. Process. 71 (2003) 73– 93.

MISHRA, B.K., RAJAMANI, R.K., 1994. **Simulation of charge motion in ball mills: Part 1. Experimental verifications**. Int. J. Miner. Process. 40, 171–186.

MISHRA, B.K., RAJAMANI, R.K., 1994. **Simulation of charge motion in ball mills: Part 2. Numerical simulations**. Int. J. Miner. Process. 40, 187–197.

MISHRA, B.K., RAJAMANI, R.K., 1992. **The discrete element method for the simulation of ball mills**. Appl. Math. Model 16, 598– 604.

NEVES, C.E.V., 2009. **Comportamento de Materiais Granulares Usando o Método dos Elementos Discretos**. Dissertação (Mestrado em Geotecnia). Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

FRICITION INFLUENCE STUDY ON BEHAVIOUR OF BODIES IN GRINDER MILLS BALLS USING THE METHOD OF DISCRETE ELEMENTS

Wladimir José Gomes Florêncio¹, e-mail: wladimir@ifpi.edu.br,
Neilor Cesar dos Santos², e-mail: neilor@ifpb.edu.br

¹Instituto Federal of Education, Science and Technology of Piauí; Rodovia BR – 407, S/N, Zone Rural, Paulistana - PI

²Instituto Federal of Education, Science and Technology of Paraíba, Av. First of May, 720, Bairro Jaguaribe, João Pessoa – PB.

ABSTRACT

This work showed that it was possible to perform motion simulations grinding bodies inside a ball mill in laboratory scale using the Discrete Element Method (DEM). The aim allowed the study of behavior by varying the coefficient of friction and speed of operation with 57% and 80% of its critical speed. The behavior of the milling process dynamics were observed using a recording system in which we analyzed the displacements in the 2s time, 8s, 15s and 20s and comparing them with the results obtained by computer simulation of 2D performed in software DEMpack® simulation. It was possible to perform the calibration of the simulation model based on the comparison of images obtained by shooting the experiment. Thus it was possible to analyze the effect of friction in the process of dynamic behavior: the best results were obtained when using a lower coefficient of friction to simulate the behavior of grinding media.

Keywords: Ball mill, friction coefficient, method of Discrete Element.