

## O GIROSCÓPIO COMO UM ATRATOR DE LORENZ

Andreyson Bicudo Jambersi, andreysonj@gmail.com<sup>1</sup>

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br<sup>1</sup>

João Antonio Pereira, japereira@dem.feis.unesp.br<sup>1</sup>

Antonio Eduardo Turra, turra@dem.feis.unesp.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Brasil, 53, Centro, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil.

**Resumo:** O objetivo deste artigo é mostrar algumas situações práticas onde as equações de Euler que modelam a orientação de um giroscópio com a ação de torques externos ficam semelhantes àquelas que descrevem um sistema de Lorenz. O modelo do giroscópio é descrito nas direções principais de inércia e os torques são considerados como realimentação das velocidades angulares medidas em cada eixo. Dependendo dos valores da matriz de ganho, o giroscópio apresenta comportamento caótico equivalente ao sistema de Lorenz, atrator estranho e contém trajetórias que divergem entre si ao longo do tempo quando sujeitas à pequenas alterações nos valores assumidos para as condições iniciais, características de sistemas caóticos dissipativos. O artigo discute algumas situações e mostra como isso poderia ser usado para controle de orientação ou mesmo estabilização em navegação inercial.

**Palavras-chave:** giroscópio; equações de Euler; caos determinístico; atrator de Lorenz.

### 1. INTRODUÇÃO

O giroscópio é um dispositivo com três graus de liberdade amplamente utilizado para a navegação inercial e sua aplicação é vasta nas áreas de navegação marítima e espacial, que são apresentadas em Scarborough (1958). Além disso, quando submetido a situações particulares nas quais os torques atuantes que agem sobre si são realimentados em função das velocidades angulares nas direções principais de inércia, o giroscópio pode apresentar uma dinâmica ainda mais rica e assumir o comportamento de sistemas dinâmicos de interesse, como o sistema de Lorenz, inicialmente proposto em Lorenz (1963) como uma solução particular e simplificada das equações de Navier-Stokes para descrição da convecção atmosférica. O sistema de Lorenz, composto de três equações diferenciais não-lineares, representa o fluxo hidrodinâmico forçado de fluido com dissipação de energia e geralmente sua solução é apresentada em termos de trajetórias no espaço de fases, onde, dependendo dos valores dos coeficientes da equação, obtém-se o que mais tarde ficou conhecido como atrator de Lorenz, sendo que o termo “atrator”, utilizado para representar a estrutura fractal formada no espaço de fases, é usado pela primeira vez por Ruelle and Takens (1971). Lorenz verificou que esse sistema era extremamente sensível à variação de seus parâmetros e dos valores assumidos para os estados iniciais. Este comportamento também é verificado para o giroscópio nas condições apresentadas no presente artigo.

Dependendo dos valores assumidos para os ganhos que realimentam os torques atuantes sobre o giroscópio, que podem ser relacionados aos parâmetros das equações de Lorenz, o comportamento do giroscópio apresenta caráter dissipativo e admite caos, passando a apresentar grande sensibilidade à variação dos valores das condições iniciais e de ganho, exibindo um comportamento não-periódico que pode ser confundido com aleatório e imprevisível mas que é determinístico, exatamente como o sistema de Lorenz. Nestas situações, o sistema apresenta atrator estranho no espaço de fases formado pelas velocidades angulares nas direções principais de inércia. O cálculo dos expoentes de Lyapunov confirma que o sistema é caótico.

Dentre as principais motivações de estudar o giroscópio em situações caóticas, pode-se citar que a realização do controle de orientação ou de estabilização em navegação inercial requer um custo energético menor do que o necessário em casos de movimentos regulares (Boccaletti *et al.*, 2000; Chatterjee, 2008). Ou seja, em situações de caos, o giroscópio torna-se extremamente sensível à pequenas perturbações, de modo que pode ser conveniente aplicar torques de realimentação levando o giroscópio ao caos para posteriormente aplicar o controle de atitude para levá-lo à orientação desejada (Pyragas, 1992; Vincent, 1997).

Este trabalho apresenta a obtenção de um modelo matemático que descreve a dinâmica de um giroscópio quando sujeito à esforços realimentados. As equações do movimento são obtidas e integradas numericamente e os resultados são apresentados para verificar situações de movimentos regulares e caóticos.

## 2. DINÂMICA DO GIROSCÓPIO

Os valores de massa e geometria utilizados neste modelo são baseados no disco do giroscópio 3-DOF da QUANSER<sup>®</sup> (Quanser, 2012) e as equações do movimento são obtidas utilizando conceitos da mecânica de Newton-Euler. O movimento do giroscópio é representado por meio de um sistema de referência inercial e três sistemas referenciais móveis. O giroscópio é, portanto, considerado como um disco simétrico com origem fixa.

### 2.1 Sistemas Referenciais Utilizados

O giroscópio é descrito por um disco com massa  $m$  e raio  $R$  com centro de massa posicionado em  $O$ , conforme visto na Fig. 1 e seu movimento é composto de três rotações consecutivas, descritas com o auxílio de um sistema inercial e três sistemas móveis.

O sistema inercial  $\mathcal{I}$  é fixo em  $O$ , que corresponde ao centro de massa do giroscópio, com os eixos  $(x, y, z)$  representado pela base ortonormal  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ . Onde o primeiro giro, de precessão, ocorre em torno de  $z \equiv z_1$  com velocidade angular  $\dot{\psi}$  e é solidário ao sistema móvel  $\mathcal{B}_1$  descrito por  $(x_1, y_1, z_1)$  representado pela base ortonormal  $\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1\}$ . Já o segundo giro, de nutação, ocorre em torno de  $y_1 \equiv y_2$  com velocidade angular  $\dot{\theta}$  e é solidário ao sistema móvel  $\mathcal{B}_2$  descrito por  $(x_2, y_2, z_2)$  com a base  $\{\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}_2\}$ . Por fim, o terceiro giro, de *spin*, ocorre em torno de  $x_2 \equiv x_3$  com velocidade angular  $\dot{\phi}$  e é, por sua vez, solidário ao sistema móvel  $\mathcal{B}_3$  descrito por  $(x_3, y_3, z_3)$  com a base  $\{\hat{i}_3, \hat{j}_3, \hat{k}_3\}$ . Desta forma, a sequência de rotações utilizadas é  $z \equiv z_1$ ,  $y_1 \equiv y_2$  e  $x_2 \equiv x_3$ , ou 3 – 2 – 1, conforme notação utilizada por Diebel (2006).

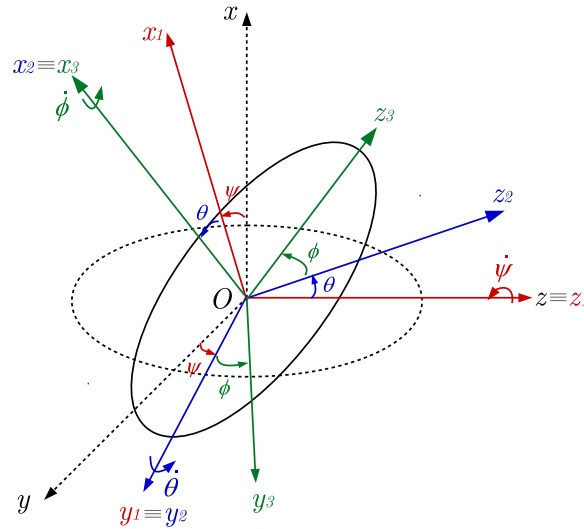


Figura 1: Desenho esquemático do giroscópio e seus sistemas de referência.

### 2.2 Obtenção das Equações de Movimento

O tensor de inércia de massa é diagonal e invariante quando representado no sistema móvel  $\mathcal{B}_3$ , solidário ao movimento do corpo, de modo que  $x_3$ ,  $y_3$  e  $z_3$  são eixos principais de inércia. Devido à essas propriedades, torna-se mais simples representar as equações do movimento no sistema  $\mathcal{B}_3$ .

O tensor de inércia  $\mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O$ , composto pelas suas componentes nas direções principais,  $I_{x_3}$ ,  $I_{y_3}$  e  $I_{z_3}$ , é dado por:

$$\mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O = \begin{bmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo:} \quad \begin{cases} I_{x_3} = \frac{1}{2}mR^2 \\ I_{y_3} = I_{z_3} = \frac{1}{4}mR^2 \end{cases}$$

A partir dos valores de parâmetros de massa  $m = 1.907$  kg e raio  $R = 0.0762$  m do giroscópio (Quanser, 2012), obtém-se:

$$\mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O = \begin{bmatrix} 0.005536 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002768 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002768 \end{bmatrix} \quad \text{unidade: [kg.m}^2\text{]} \quad (1)$$

Já a velocidade angular do corpo, em função dos ângulos de Euler e representada na base  $\mathcal{B}_3$ , é descrita por:

$$\mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (2)$$

As equações de Euler, calculadas no sistema móvel  $\mathcal{B}_3$ , são obtidas relacionando-se a taxa de variação do momento angular,  $\mathcal{B}_3 \mathcal{H}$ , do corpo rígido com os torques externos aplicados em relação ao ponto  $O$  (Goldstein, 1965), sendo:

$$\mathcal{B}_3 \dot{\mathcal{H}}_O = \mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O \frac{d}{dt} (\mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{B}_3 \boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O \mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega} + \underbrace{m_{\mathcal{B}_3} \mathbf{r}_{O-O} \times \mathcal{B}_3 \mathbf{a}_O}_{=0} = \mathcal{B}_3 \mathbf{M}_O \quad (3)$$

onde  $\mathcal{B}_3 \boldsymbol{\Omega}(t)$  é a velocidade angular do sistema móvel  $\mathcal{B}_3$ , sendo  $\mathcal{B}_3 \boldsymbol{\Omega}(t) = \mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega}(t)$ ,  $\mathcal{B}_3 \mathbf{r}_{O-O} = 0$  m é a distância entre a origem e o centro de massa do disco (nesse caso coincidentes) e  $\mathcal{B}_3 \mathbf{a}_O = 0$  m/s<sup>2</sup> é a aceleração do ponto  $O$ . Assim:

$$\mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O \frac{d}{dt} (\mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{B}_3 \boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O \mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega} = \mathcal{B}_3 \mathbf{M}_O \quad (4)$$

sendo  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  e  $\omega_{z3}$  as componentes da velocidade angular do giroscópio nos eixos principais de inércia e os termos  $\mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O \frac{d}{dt} (\mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega})$  e  $\mathcal{B}_3 \boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{B}_3 \mathbb{I}_O \mathcal{B}_3 \boldsymbol{\omega}$  a variação da amplitude do momento angular e a variação da direção do momento angular (torque giroscópico), respectivamente. A taxa de variação da velocidade angular é:

$$\mathcal{B}_3 \dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_{x3} \\ \dot{\omega}_{y3} \\ \dot{\omega}_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta + \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \cos \theta \sin \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + \ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \\ \ddot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi - \ddot{\theta} \sin \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Isolando as componentes de  $\mathcal{B}_3 \dot{\boldsymbol{\omega}}$ , tem-se como resultado as equações de Euler para um corpo rígido rotacionando com um ponto fixo no espaço representadas em um sistema com movimento solidário ao do corpo:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x3} &= \frac{(I_{y3} - I_{z3})}{I_{x3}} \omega_{y3} \omega_{z3} + \frac{M_{x3}}{I_{x3}} \\ \dot{\omega}_{y3} &= \frac{(I_{z3} - I_{x3})}{I_{y3}} \omega_{z3} \omega_{x3} + \frac{M_{y3}}{I_{y3}} \\ \dot{\omega}_{z3} &= \frac{(I_{x3} - I_{y3})}{I_{z3}} \omega_{x3} \omega_{y3} + \frac{M_{z3}}{I_{z3}} \end{aligned} \quad (6)$$

Se  $I_{y3} = I_{z3} = 0.002768 = I_0$  e  $I_{x3} = 2I_0$ , o sistema de eqs. (6) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x3} &= \frac{M_{x3}}{2I_0} \\ \dot{\omega}_{y3} &= -\omega_{z3} \omega_{x3} + \frac{M_{y3}}{I_0} \\ \dot{\omega}_{z3} &= \omega_{x3} \omega_{y3} + \frac{M_{z3}}{I_0} \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.3 Descrição dos Esforços Externos Realimentados Pelas Saídas

Os momentos externos  $\mathcal{B}_3 \mathbf{M}$ , assumidos como sendo realimentados pelas velocidades angulares nas direções principais, podem ser descritos por:

$$\begin{Bmatrix} M_{x3} \\ M_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}\omega_{x3} + a_{12}\omega_{y3} + a_{13}\omega_{z3} \\ a_{21}\omega_{x3} + a_{22}\omega_{y3} + a_{23}\omega_{z3} \\ a_{31}\omega_{x3} + a_{32}\omega_{y3} + a_{33}\omega_{z3} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz de coeficientes  $a_{ij}$ , que realimentam os momentos com as velocidades angulares nas direções principais de inércia. Limitando a matriz  $\mathbf{A}$  para a forma onde os coeficientes  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{31}$  e  $a_{32}$  são nulos, com o intuito de comparar esse resultado ao sistema de Lorenz, tem-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

O sistema de equações, eq. (7), pode então ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{x3} &= \frac{a_{11}}{2I_0}\omega_{x3} + \frac{a_{12}}{2I_0}\omega_{y3} \\ \dot{\omega}_{y3} &= -\omega_{z3}\omega_{x3} + \frac{a_{21}}{I_0}\omega_{x3} + \frac{a_{22}}{I_0}\omega_{y3} \\ \dot{\omega}_{z3} &= \omega_{x3}\omega_{y3} + \frac{a_{33}}{I_0}\omega_{z3}\end{aligned}\quad (10)$$

que, se realizada uma mudança de variáveis com o intuito de simplificar a notação, onde  $a = \frac{a_{11}}{2I_0}$ ,  $b = \frac{a_{22}}{I_0}$  e  $c = \frac{a_{33}}{I_0}$ , pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{x3} &= a\omega_{x3} + \frac{a_{12}}{2I_0}\omega_{y3} \\ \dot{\omega}_{y3} &= -\omega_{x3}\omega_{z3} + b\omega_{y3} + \frac{a_{21}}{I_0}\omega_{x3} \\ \dot{\omega}_{z3} &= \omega_{x3}\omega_{y3} + c\omega_{z3}\end{aligned}\quad (11)$$

O sistema de equações (11) descreve a dinâmica do giroscópio sob a ação de ganhos de realimentação em função das velocidades angulares nas direções principais de inércia, e pode ser integrado numericamente para a obtenção das velocidades angulares nas direções principais de inércia (variáveis de estado).

### 3. O GIROSCÓPIO COMO UM ATRATOR DE LORENZ

O sistema de Lorenz, apresentado em Lorenz (1963), é dado por:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = XY - \beta Z \end{cases}\quad (12)$$

onde as variáveis de estado são  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e  $\sigma$ ,  $r$  e  $\beta$  são os coeficientes do sistema. A solução das equações de Lorenz admitem comportamento caótico para determinados valores destes coeficientes (em geral  $\sigma$  e  $\beta$  possuem valores fixos e varia-se os valores de  $r$ ) e apresenta comportamento periódico para uma faixa muito maior de valores. Diversas propriedades acerca do sistema de Lorenz e seu comportamento em função dos valores de seus parâmetros são discutidas em Sparrow (1982).

Se as eqs. de Lorenz (12) forem comparadas àquelas que descrevem o movimento do giroscópio (11), pode-se notar que, se  $b = 1$ ,  $a < 0$ ,  $\frac{a_{12}}{I_0} > 0$ ,  $\frac{a_{21}}{I_0} > 0$  e  $c < 0$ , os sinais das constantes que multiplicam cada variável de estado  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  e  $\omega_{z3}$  serão os mesmos das apresentadas no sistema de Lorenz, de modo que o giroscópio passa a se comportar como um sistema de Lorenz. Dependendo dos valores assumidos para os ganhos, o giroscópio também pode se comportar como outros sistemas não-periódicos de interesse, como os sistemas de Chen e Lü-Chen (Chen and Lee, 2004; Jambersi, 2016). Deste modo, para determinados valores de ganho da matriz  $\mathbf{A}$ , o giroscópio apresentará caos. Se forem assumidos os valores  $a = -10$ ,  $b = -1$  e  $c = -2.67$ ,  $a_{21} = 0.077511$  e  $a_{12} = -2I_0a$ , obtém-se a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.055364 & 0.055364 & 0.000000 \\ 0.077510 & -0.002768 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & -0.0073819 \end{bmatrix}\quad (13)$$

As equações do movimento foram integradas utilizando o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem de passo fixo, com  $\Delta t = 0.001$  [s] e o número de amostras temporais utilizado foi  $N = 10^6$  [amostras]. Os valores iniciais utilizados foram  $\psi(0) = \theta(0) = \phi(0) = 0$  [rad] e  $\dot{\psi}(0) = 1.04$  [rad/s],  $\dot{\theta}(0) = 1.04$  [rad/s] e  $\dot{\phi}(0) = 0.21$  [rad/s] e determinam os valores iniciais para as componentes de  $\boldsymbol{\omega}(t)$  a partir da Eq. (2),  $\omega_{x3} = 0.21$  e  $\omega_{y3} = \omega_{z3} = 1.04$  [rad/s],

A Figura 2 apresenta a evolução temporal das velocidades angulares até um tempo limite de 1000 segundos, o tempo foi limitado de modo a facilitar a visualização da resposta.

A Figura 3 apresenta o atrator de Lorenz no espaço de fases formado por  $\omega_{x3}(t)$ ,  $\omega_{y3}(t)$  e  $\omega_{z3}(t)$ , enquanto a Fig. 4, por sua vez, apresenta os atrator de Lorenz nos planos de fases  $\omega_{x3}(t) \times \omega_{y3}(t)$  e  $\omega_{y3}(t) \times \omega_{z3}(t)$ , respectivamente.

Os valores máximos, em módulo, calculados para os momentos externos aplicados foram:  $|M_{x3}| = 0.89$  [Nm],  $|M_{y3}| = 1.46$  [Nm] e  $|M_{z3}| = 0.35$  [Nm], e seus valores ao longo do tempo são apresentados na Fig. 5. A estimativa destes valores podem ser utilizados para indicar possíveis limitações em uma reprodução experimental do modelo teórico.

Os expoentes de Lyapunov, determinados de forma numérica a partir das séries temporais obtidas, foram calculados utilizando o Método de Wolf (Wolf *et al.*, 1985) utilizando-se as respostas do sistema para um tempo de até 10000 segundos e podem ser visualizados na Fig. 6. Nota-se que um dos expoentes calculados possui

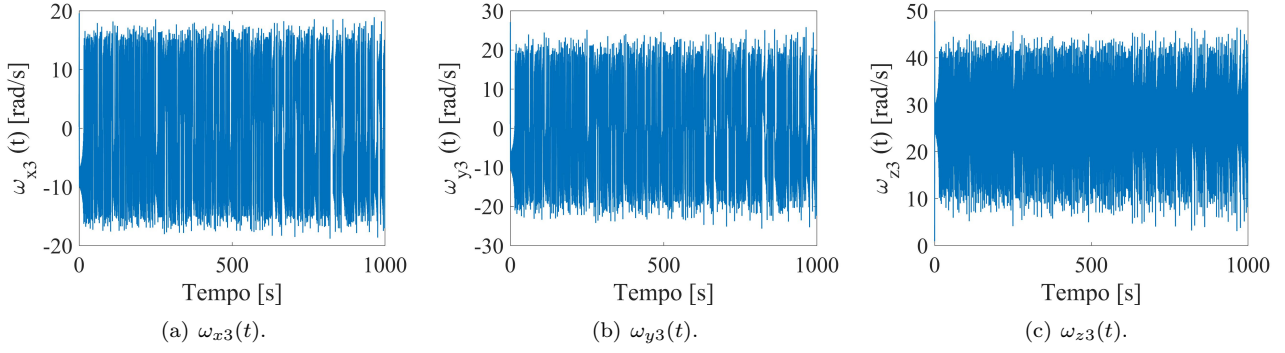


Figura 2: Velocidades angulares nas direções principais de inércia ao longo do tempo  $\omega(t)$ ; condições iniciais:  $\psi(0) = \theta(0) = \phi(0) = 0$  [rad] e  $\dot{\psi}(0) = 1.04$  [rad/s],  $\dot{\theta}(0) = 1.04$  [rad/s] e  $\dot{\phi}(0) = 0.21$  [rad/s]

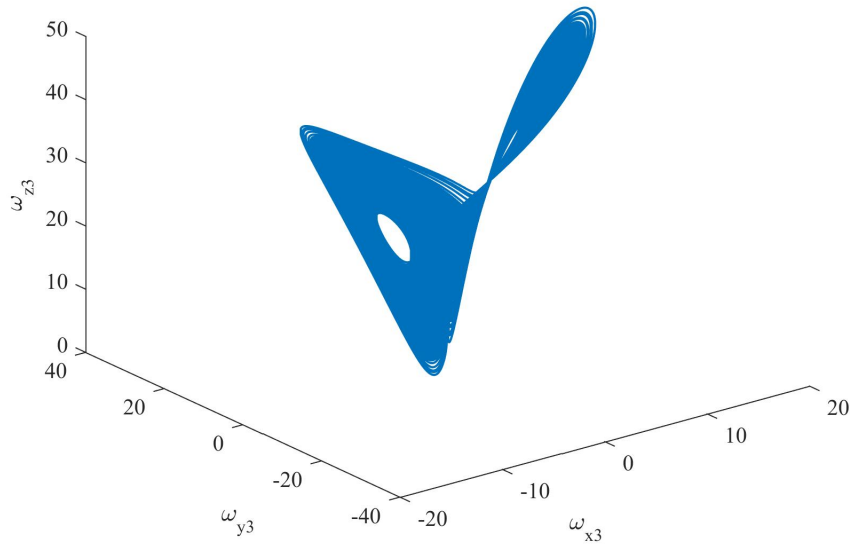


Figura 3: Atrator de Lorenz no espaço de fases  $\omega_{x3}(t) \times \omega_{y3}(t) \times \omega_{z3}(t)$ , para as condições iniciais:  $\psi(0) = \theta(0) = \phi(0) = 0$  [rad] e  $\dot{\psi}(0) = 1.04$  [rad/s],  $\dot{\theta}(0) = 1.04$  [rad/s] e  $\dot{\phi}(0) = 0.21$  [rad/s]

valor positivo e igual à  $\lambda_{\omega_{y3}}(t) = 0.905044$ , os outros dois expoentes apresentaram sinal negativo. A existência de ao menos um expoente de Lyapunov positivo para o sistema é uma maneira de quantificar a alta sensibilidade do sistema às condições iniciais (Eckmann and Ruelle, 1985; Goldhirsch *et al.*, 1987).

Uma análise de estabilidade do sistema pode ser realizada a partir da matriz Jacobiana do mesmo. A matriz Jacobiana do sistema, linearizado em torno do ponto  $(0, 0, 0)$  é:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\omega}_{x3}}{\partial \omega_{x3}} & \frac{\partial \dot{\omega}_{x3}}{\partial \omega_{y3}} & \frac{\partial \dot{\omega}_{x3}}{\partial \omega_{z3}} \\ \frac{\partial \dot{\omega}_{y3}}{\partial \omega_{x3}} & \frac{\partial \dot{\omega}_{y3}}{\partial \omega_{y3}} & \frac{\partial \dot{\omega}_{y3}}{\partial \omega_{z3}} \\ \frac{\partial \dot{\omega}_{z3}}{\partial \omega_{x3}} & \frac{\partial \dot{\omega}_{z3}}{\partial \omega_{y3}} & \frac{\partial \dot{\omega}_{z3}}{\partial \omega_{z3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ \frac{a_{21}}{I_0} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (14)$$

calculando os autovalores, obtém-se o polinômio característico na forma:

$$\lambda^3 + (-a + 1 - c)\lambda^2 + [-c(-a + 1) - a(1 - a_{21}I_0)]\lambda + ca(1 - a_{21}I_0) = 0 \quad (15)$$

que fornece como resultado os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -22.8277 \quad ; \quad \lambda_2 = 11.8277 \quad ; \quad \lambda_3 = -2.6667$$

como um dos autovalores calculados,  $\lambda_2 = 11.8277$ , é real e positivo e, sendo os demais negativos, o ponto  $(0, 0, 0)$  é uma sela, caracterizando uma instabilidade assintótica no ponto em questão, que age como um repulsor e as perturbações aumentam com o tempo quando  $t \rightarrow \infty$  (Strogatz, 2001; Fiedler-Ferrara and Prado, 1994).

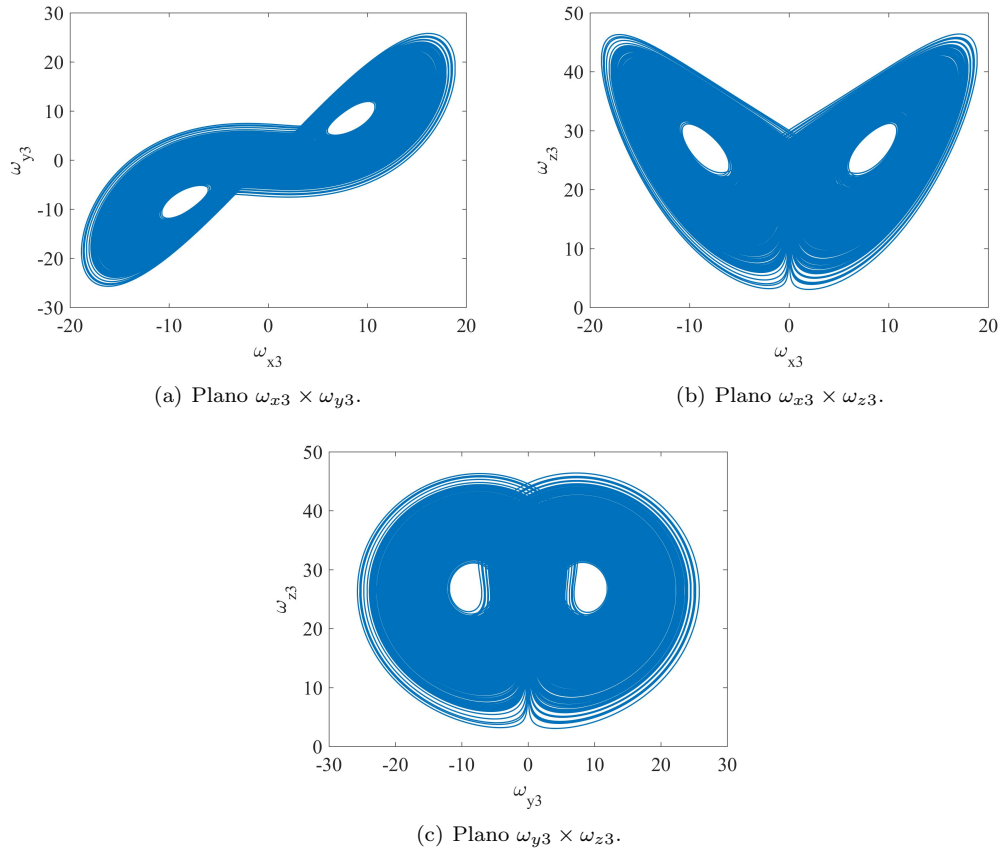


Figura 4: **Atrator de Lorenz, representação nos planos de fases, para as condições iniciais:**  $\psi(0) = \theta(0) = \phi(0) = 0$  [rad] e  $\dot{\psi}(0) = 1.04$  [rad/s],  $\dot{\theta}(0) = 1.04$  [rad/s] e  $\dot{\phi}(0) = 0.21$  [rad/s]

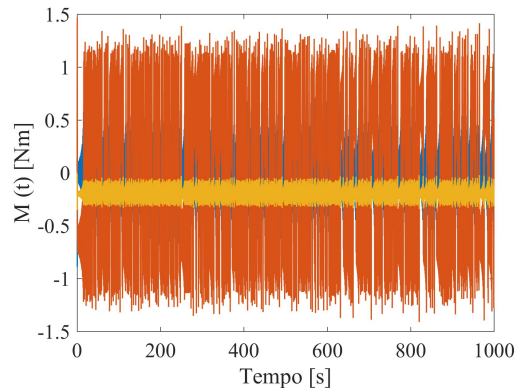


Figura 5: **Torques externos aplicados  $\mathcal{B}_3$   $M(t)$ :**  $M_{x3}$  (-) ,  $M_{y3}$  (-) e  $M_{z3}$  (-).

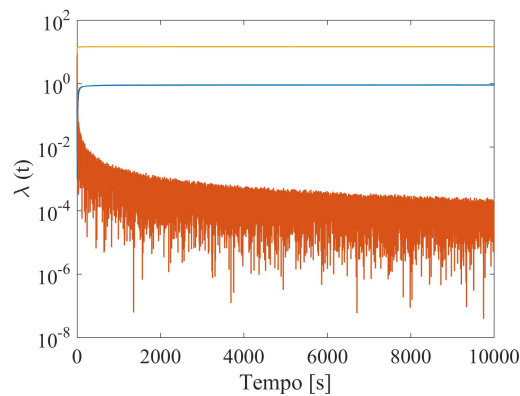


Figura 6: **Expoentes de Lyapunov  $\lambda_{i's}$  estimados a partir das séries temporais das componentes de  $\omega(t)$ ,  $\lambda_{\omega_{x3}}(t)$  (-),  $\lambda_{\omega_{y3}}(t)$  (-) e  $\lambda_{\omega_{z3}}(t)$  (-), eixo das ordenadas em escala logarítmica.**

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O giroscópio, quando sujeito à torques externos realimentados pelas componentes da velocidade angular nas direções principais de inércia, torna-se um sistema não-conservativo, apresentando comportamento não-periódico porém determinístico, e suas equações assumem a mesma forma daquelas que descrevem o sistema de Lorenz, amplamente abordado na literatura quando se trata do estudo de dinâmica não-linear. Para retratar o comportamento caótico do giroscópio, assume-se uma matriz de ganhos de realimentação, que relaciona as velocidades angulares instantâneas nas direções principais, e que poderiam ser medidas experimentalmente, com os torques aplicados. Deste modo o sistema torna-se não conservativo e uma analogia entre esses ganhos e os valores dos coeficientes do sistema de Lorenz (em condições de caos) pode ser realizada.

Neste artigo foram assumidos valores de coeficientes do sistema conhecidos da literatura, que foram relacionados à ganhos de realimentação. Situações de caos foram observadas tanto na evolução temporal das variáveis de estado (velocidades angulares nas direções principais de inércia) quanto no espaço de estado formado por essas variáveis. Para a determinação numérica dos expoentes de Lyapunov foi utilizado o Método de Wolf, que apresentou resultado positivo para um dos expoentes calculados, confirmando que o sistema é caótico. Também foram obtidos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema em torno do ponto (0,0,0) onde obteve-se três autovalores reais sendo um deles positivo, de modo que o ponto em questão é considerado assintoticamente instável.

Foi discutido ainda que o estudo do giroscópio em situações de movimento não-periódico pode ser útil para controle de orientação ou estabilização inercial, já que, nessas situações, o gasto energético necessário para perturbar o sistema (o sistema é sensível à pequenas perturbações) é menor do que aquela que seria necessária em situações de movimentos regulares.

#### 5. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece a FEPISA por sua bolsa de doutorado. Os autores também agradecem o apoio financeiro da CAPES, CNPq e da FEPISA.

#### 6. REFERÊNCIAS

- Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y.C., Mancini, H. and Maza, D., 2000. "The control of chaos: theory and applications". *Physics reports*, Vol. 329, No. 3, pp. 103–197.
- Chatterjee, S., 2008. "Chaos, concentration, and multiple valleys". *arXiv preprint arXiv:0810.4221*.
- Chen, H.K. and Lee, C.I., 2004. "Anti-control of chaos in rigid body motion". *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 21, No. 4, pp. 957–965.
- Diebel, J., 2006. "Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors". *Matrix*, Vol. 58, No. 15-16, pp. 1–35. URL [https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn/\\_downloads/attitude.pdf](https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn/_downloads/attitude.pdf).
- Eckmann, J.P. and Ruelle, D., 1985. "Ergodic theory of chaos and strange attractors". *Reviews of modern physics*, Vol. 57, No. 3, p. 617.
- Fiedler-Ferrara, N. and Prado, C., 1994. *Caos - Uma Introdução*. Edgard Blucher. ISBN 9788521200581.
- Goldhirsch, I., Sulem, P.L. and Orszag, S.A., 1987. "Stability and lyapunov stability of dynamical systems: A differential approach and a numerical method". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 27, No. 3, pp. 311–337.
- Goldstein, H., 1965. *Classical mechanics*. Pearson Education India.
- Jambersi, A.B., 2016. *Movimentos regulares e caóticos de rotação de corpos rígidos*. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP). URL <http://repositorio.unesp.br/handle/11449/136232>.
- Lorenz, E.N., 1963. "Deterministic nonperiodic flow". *Journal of the atmospheric sciences*, Vol. 20, No. 2, pp. 130–141.
- Pyragas, K., 1992. "Continuous control of chaos by self-controlling feedback". *Physics letters A*, Vol. 170, No. 6, pp. 421–428.
- Quanser, 2012. *3-DOF Gyroscope Plant Instructor Manual*. Canada.
- Ruelle, D. and Takens, F., 1971. "On the nature of turbulence". *Communications in mathematical physics*, Vol. 20, No. 3, pp. 167–192.
- Scarborough, J., 1958. *The Gyroscope: Theory and Application*. Interscience Pub. URL <https://books.google.com.br/books?id=BJySjgEACAAJ>.
- Sparrow, C., 1982. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York. ISBN 9780387907758. URL <https://books.google.com.br/books?id=tJdIAQAIAAJ>.
- Strogatz, S., 2001. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Advanced book program. Westview Press, Reading. ISBN 9780738204536.
- Vincent, T.L., 1997. "Control using chaos". *Control Systems, IEEE*, Vol. 17, No. 6, pp. 65–76.
- Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and Vastano, J.A., 1985. "Determining lyapunov exponents from a time series". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 16, No. 3, pp. 285–317.

## 7. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

### THE GYROSCOPE AS A LORENZ'S ATTRACTOR

Andreyson Bicudo Jambersi, andreysonj@gmail.com<sup>1</sup>

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br<sup>1</sup>

João Antonio Pereira, japereira@dem.feis.unesp.br<sup>1</sup>

Antonio Eduardo Turra, turra@dem.feis.unesp.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Brasil, 53, Centro, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil.

**Abstract:** *The goal of this paper is to show some practical cases where the Euler equations for modeling the orientation of a gyroscope with external torques are similar to those that describe a Lorenz system. This model of the gyroscope is described in the main inertia directions and the torques are assumed as feedback functions of the angular velocities measurements on each axis. Depending on the gain matrix values, the gyroscope has chaotic behavior equivalent to the Lorenz system, strange attractor and contains paths that diverge from each other over time when subjected to minor changes in the assumed values for the initial conditions, characteristics of dissipative chaotic systems. This paper discusses some situations and shows how this could be used for guidance control or stabilization in inertial navigation.*

**Keywords:** *gyroscope, Euler's equation, deterministic chaos, Lorenz attractor.*