



FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RETORNO À SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO VIA PROGRAMAÇÃO CÔNICA

Hugo Bruno

Guilherme Barros

Luiz Fernando Martha

Ivan Fábio Mota de Menezes

hbastos@tecgraf.puc-rio.br

gbarros@tecgraf.puc-rio.br

lfm@tecgraf.puc-rio.br

ivan@tecgraf.puc-rio.br

Tecgraf PUC-Rio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Prédio Pe. Laércio Dias de Moura - R. Marquês de São Vicente 225, 22451-900, RJ, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. *A análise elasto-plástica de estruturas, sob sua forma incremental, requer a solução de uma série de subproblemas, comumente denominado de Retorno à Superfície de escoamento, em que deseja-se determinar, a partir de um estado de tensões inicial, o incremento de tensões elásticas e plásticas correspondentes ao incremento de deformações. Em geral, a solução de tais subproblemas é obtida através de algoritmos especificamente projetados em função do critério de escoamento do material analisado e sua respectiva lei constitutiva. Nesse trabalho demonstra-se uma formulação alternativa para a solução de problemas de Retorno à Superfície de escoamento através da Programação Matemática. Especificamente, serão abordados algumas das superfícies de escoamento mais comuns da literatura, e.g. Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, que podem ser convenientemente reescritas através de restrições cônicas. Sendo assim, o problema de Retorno à Superfície de escoamento pode ser reformulado como um problema de Programação Cônica, para o qual métodos numéricos eficientes e robustos podem ser utilizados para a solução do problema.*

Keywords: Plasticidade, Programação Matemática, Programação Cônica

1 INTRODUÇÃO

O dimensionamento plástico de estruturas apresenta diversas vantagens sobre o dimensionamento elástico. Do ponto de vista econômico, estruturas projetadas sob o critério de colapso plástico tendem a ser consideravelmente mais leves e, portanto, mais econômicas. Já sob o aspecto mecânico, o projeto plástico permite prever o mecanismo de colapso da estrutura sob sua carga limite, proporcionando uma maior segurança quanto às medidas a serem tomadas na situação de cargas excepcionais. De fato, por estas e outras vantagens, diversas normas e especificações baseiam-se em conceitos de dimensionamento plástico.

Em termos da análise mecânica, o projeto plástico exige um estudo quanto à evolução das deformações plásticas que ocorrem ao longo da estrutura devido ao escoamento do material. Tal estudo é fundamental para a avaliação dos mecanismos de colapso sob a qual a estrutura está sujeita, assim como na determinação de sua carga limite de colapso. Um tema central em plasticidade diz respeito ao estudo da análise limite (AL) que tem como objetivo estimar a carga de colapso global de estruturas adotando-se a hipótese de um comportamento rígido-plástico do material. Alternativamente, a análise elasto-plástica (AEP) consiste em uma abordagem mais geral em que o histórico das deformações plásticas ao longo do carregamento da estrutura é obtido por meio de uma análise incremental-iterativa.

O modelo matemático da plasticidade proporciona uma metodologia geral que permite descrever o comportamento constitutivo contínuo de certos materiais. Em linhas gerais, o modelo constitutivo elasto-plástico descreve a taxa de evolução das deformações plásticas em termos do carregamento aplicado à estrutura. Dessa forma, um passo fundamental na análise elasto-plástica consiste na solução local das equações constitutivas da plasticidade ou, equivalentemente, na solução de um problema de valor inicial constitutivo elasto-plástico. Especificamente, tal problema consiste em um sistema de equações diferenciais sujeito a restrições na forma de equações algébricas, formalmente denominado sistema de *equações diferencial-algébrico* (EDA).

Soluções analíticas para sistemas de EAD só são possíveis para modelos constitutivos e históricos de deformações extremamente simples e, portanto, a utilização de métodos numéricos para solução de problemas práticos de engenharia é essencial. A metodologia geral para a solução numérica de tais problemas baseia-se, primeiramente, na discretização das equações diferenciais por meio do método de Euler. Uma vez discretizado, o problema é transformado em um sistema de equações algébricas sujeito às restrições impostas pelas condições de carregamento/descarregamento e pelo critério de resistência do material. Em um segundo momento, o problema discretizado é resolvido por meio do algoritmo preditor/corretor que basicamente consiste de dois passos: o passo preditor elástico, em que se verifica a hipótese do incremento de deformações ser puramente elástico, e o passo corretor plástico (ou de retorno à superfície de escoamento), onde o sistema de equações do problema discretizado é resolvido.

O sistema de equações do problema de retorno a superfície de escoamento é, em geral, não-linear. Além disso, o problema ainda está sujeito à condição de positividade estrita do multiplicador plástico. Dessa forma, a alternativa mais comum na prática é resolver o sistema de equações não-lineares utilizando-se algum método iterativo, em geral o método de Newton-Raphson, e em seguida verificar a admissibilidade da solução quanto à restrição de positividade do multiplicador plástico. Alternativamente, é possível ainda formular o retorno à superfície de escoamento como um problema de programação matemática, interpretação conhecida na

literatura como *closest point projection* (Simo & Hughes, 2013). De fato, considerando-se os critérios de escoamento mais comuns apresentados na literatura, o problema de retorno à superfície de escoamento pode ser formulado como um problema de otimização convexa para o qual a solução é única. Em particular, apresenta-se neste trabalho uma classe de critérios de escoamento para os quais o retorno à superfície de escoamento pode ser resolvido por meio de problemas de otimização cônica quadrática e semidefinida.

2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é apresentar uma alternativa para a solução de problemas de retorno à superfície de escoamento (PRSE) utilizando-se uma formulação baseada em programação matemática. Especificamente, demonstra-se a representação cônica de diversos critérios de escoamento de forma a se obter um problema de otimização convexa com restrições cônicas. Em particular, são apresentadas as formulações que permitem reescrever o PRSE como problemas de otimização cônica quadrática (OCQ) e de otimização cônica semi-definida (OCSO).

3 CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

Os critérios de resistência dos materiais desempenham um papel fundamental na análise e dimensionamento de estruturas civis. Nos projetos em que se considera somente o regime linear elástico, tais critérios representam restrições locais de tensão que devem ser estritamente verificados. Já em projetos que contemplam uma análise elasto-plástica, tais critérios permitem observar a evolução das deformações plásticas que por sua vez devem ser limitadas de forma a prevenir o surgimento de mecanismos de colapso.

Matematicamente, um critério de resistência pode ser representado como uma condição de inclusão da forma

$$\Sigma_p \in \mathcal{M} \quad , \quad \mathcal{M} = \{X \in \mathcal{S}^3 | f(X) \leq \kappa_p\} \quad , \quad (1)$$

onde Σ_p representa o tensor de tensão de Cauchy em um ponto p , $\mathcal{M}$ é o conjunto dos estados de tensão admissíveis e $\mathcal{S}^3$ é o conjunto das matrizes simétricas 3x3. A função f representa a superfície de escoamento (para $f(X) = 0$) e κ_p é o nível de resistência local em um certo ponto p .

Os critérios de escoamento isotrópicos (Souza Neto et al., 2008) são aqueles para os quais as funções f são invariantes quanto à rotação de Σ_p e, portanto, podem ser expressas em termos das tensões principais

$$\sigma_k = \lambda_k(X), k = 1, 2, 3 \quad (2)$$

em que $\lambda_k(X)$ são os autovalores do tensor de tensões $X \in \mathcal{S}^3$.

A seguir são apresentados alguns dos critérios de resistência mais comumente encontrados na literatura.

3.1 Critério de Rankine

O critério de Rankine, também conhecido como critério da máxima tensão normal (Chen & Han, 1987), é um critério muito utilizado para a modelagem de materiais frágeis. De acordo com este critério, a falha do material ocorre quando a máxima tensão principal atinge o valor de resistência à tração normal σ_T , obtido a partir de um ensaio de tração simples. Sua superfície de escoamento pode ser representada pelas equações

$$\sigma_1 = \sigma_T \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_T \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_T \quad (3)$$

Já o conjunto das tensões admissíveis pode ser expresso como

$$\mathcal{M}_R = \{X \in \mathcal{S}^3 | \lambda_{max}(X) \leq \sigma_T\} \quad (4)$$

3.2 Critério de Tresca

Considerado como o primeiro critério de escoamento para metais, o critério de Tresca sugere que o escoamento do material ocorre quando a máxima tensão de cisalhamento atinge um valor limite de resistência de cisalhamento τ_y . Tal limite se relaciona com o limite de tensão normal por meio de

$$\tau_y = \frac{\sigma_y}{2} \quad (5)$$

Sua superfície de escoamento pode ser representada pelas equações

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \sigma_y \quad , \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad , \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= \sigma_y \quad , \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad , \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \end{aligned} \quad (6)$$

e seu conjunto de tensões admissíveis pode ser expresso como

$$\mathcal{M}_T = \{X \in \mathcal{S}^3 | 1/2(\lambda_{max}(X) - \lambda_{min}(X)) \leq \tau_y\} \quad (7)$$

3.3 Critério de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb é considerado uma generalização do critério de Tresca. Sua superfície de escoamento pode ser representada pela equação

$$\tau = c - \sigma_n \tan \phi \quad (8)$$

onde τ é tensão cisalhante, c é a coesão, σ_n é a tensão normal e ϕ é o ângulo de atrito.

Em termos das tensões principais a Eq. (8) pode ser escrita como

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi = c - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (9)$$

assumindo-se $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

O seu conjunto de tensões admissíveis pode ser dado por

$$\mathcal{M}_{MC} = \{X \in \mathcal{S}^3 | \alpha \lambda_{max}(X) - \beta \lambda_{min}(X) \leq \kappa\} \quad (10)$$

onde $\alpha = (1 + \sin \phi)$, $\beta = (1 - \sin \phi)$ e $\kappa = 2c \cos \phi$.

Vale notar que para $\phi = 0$, o critério de Mohr-Coulomb se reduz ao critério de Tresca e que para $\phi = \pi/2$ se reduz ao critério de Rankine.

3.4 Critério de von Mises

O critério de von Mises, vastamente utilizado na modelagem de metais, sugere que o escoamento do material ocorre quando a máxima energia de distorção de cisalhamento, ou a tensão cisalhante octaédrica, atinge um certo valor crítico, de acordo com a Eq. (11).

$$W_D = \frac{\tau_y^2}{2G}, \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}\tau_y \quad (11)$$

em que W_D é a energia de distorção de cisalhamento, G é o módulo de elasticidade transversal do material, τ_y é a tensão de escoamento em cisalhamento puro e τ_{oct} é a tensão octaédrica.

A partir das seguintes relações

$$W_D = \frac{J_2}{2G}, \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}J_2 \quad (12)$$

onde J_2 é o segundo invariante do tensor de tensões desviador, dado por

$$J_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} \quad (13)$$

o critério pode ser convenientemente reescrito como

$$\sqrt{J_2} = \tau_y \quad (14)$$

Sendo assim, a superfície de escoamento pode ser expressa por

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\tau_y^2 \quad (15)$$

e seu conjunto de tensões admissíveis pode ser escrito como

$$\mathcal{M}_{VM} = \{X \in \mathcal{S}^3 | \sqrt{J_2(X)} \leq \tau_y\}. \quad (16)$$

3.5 Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager é considerado como uma generalização do critério de von Mises em que se introduz uma sensibilidade ao escoamento do material quanto à pressão hidrostática. Tal propriedade é imposta por meio de um termo adicional à expressão do critério de von Mises (Eq. (14)), resultando em

$$\alpha\sigma_p + \sqrt{J_2} = \tau_y \quad (17)$$

onde α é uma constante do material e $\sigma_p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ é a pressão hidrostática.

O seu conjunto de tensões admissíveis pode ser expresso por

$$\mathcal{M}_{DP} = \{X \in \mathcal{S}^3 | \alpha m(X) + \sqrt{J_2(X)} \leq \tau_y\} \quad (18)$$

em que $m(X) = 1/3 \text{tr}(X)$.

4 PROGRAMAÇÃO CÔNICA

A otimização cônica é uma classe de problemas de programação matemática em que a função objetivo é convexa e o conjunto de restrições é dado pela interseção de restrições lineares com um cone convexo. Um problema de programação cônica geral pode ser descrito como

$$\begin{cases} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (19)$$

em que $\mathbf{x}$ é o vetor das variáveis de projeto, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é um conjunto de restrições lineares e $\mathcal{K}$ é o cone convexo associado ao problema.

Alguns exemplos de otimização cônica são a programação linear (LP), programação quadrática convexa (Convex QP), programação cônica de segunda ordem (SOCP) e a programação semi-definida (SDP). A Figura 1 ilustra os diferentes subcampos contidos na programação cônica.

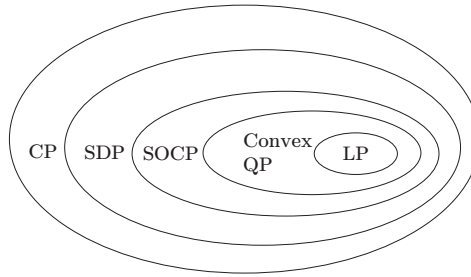


Figura 1: Subcampos da programação cônica.

Cada um desses subcampos se distingue pelo tipo de cone associado ao problema. Por exemplo, em problemas de programação linear o cone associado é conhecido como cone $\mathbb{R}_+$, que é definido como

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \quad (20)$$

Portanto, um problema de programação linear geral pode ser expresso como

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (21)$$

Analogamente, nos problemas de SOCP o cone associado é denominado cone de segunda ordem, também conhecido como *ice-cream cone* ou o cone de Lorentz, definido como

$$\mathcal{C}^{SOC} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq \|x_{2:n}\|, x_1 \geq 0\} \quad (22)$$

Portanto, um problema de SOCP geral pode ser escrito como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \text{s.t.} & x_1 \geq \|x_{2:n}\| \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in \mathcal{C}^{SOC} \end{array} \right. \quad (23)$$

A programação semi-definida tem como cone associado

$$\mathcal{C}^{SD} = \{X \in \mathcal{S}^n | X \succeq 0\} \quad (24)$$

onde $\succeq$ é utilizado para indicar que a matriz X é positiva semi-definida, especificamente

$$Y \succeq Z \iff w^T(Y - Z)w \geq 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \quad (25)$$

Dessa forma, um problema de SDP geral pode ser escrito como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_X & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} & \langle A_i, X \rangle = b_i \\ & X \succeq 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min_X & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} & \langle A_i, X \rangle = b_i \\ & X \in \mathcal{C}^{SDP} \end{array} \right. \quad (26)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual no espaço das matrizes quadradas, ou seja

$$\langle Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(X^T Y) \quad (27)$$

Alternativamente, um problema de programação cônica semi-definida poder ser expresso em termos de desigualdades matriciais lineares, ou seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & C_0 + \sum_{i=1}^n C_i x_i \succeq 0 \end{array} \right. \quad (28)$$

em que $C_k \in \mathcal{S}^n (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Vale ressaltar que os cones $\mathcal{C}^{SOC}$ e $\mathcal{C}^{SDP}$ pertencem a uma classe de cones denominados *self-scaled* (veja (Boyd & Vandenberghe, 2010) para uma definição detalhada). Em (Nesterov & Todd, 1997) apresenta-se a extensão do algoritmo de pontos interiores primal-dual para problemas programação cônica envolvendo cones *self-scaled*. Essa formulação permite a implementação numérica de forma robusta e eficiente para a solução de SOCPs e SDPs. De acordo com (Lobo et al., 1998), considerando-se o algoritmo de pontos interiores, uma análise teórica de pior caso mostra que o número de iterações para resolver um problema de SOCP cresce no máximo pela raiz quadrada do número de variáveis de projeto, enquanto que experimentos numéricos apontam que, tipicamente, o número de iterações exigido varia entre 5 e 50, quase independente do tamanho do problema. Uma implementação numérica passo-a-passo do algoritmo de pontos interiores primal-dual para a otimização cônica quadrática é apresentada em (Andersen et al., 2003).

5 REPRESENTAÇÃO CÔNICA DOS CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

A seção 3 apresenta os critérios mais comuns propostos na literatura. Demonstra-se agora que tais critérios podem ser convenientemente reescritos nas suas respectivas formas cônicas. Em particular, os critérios de von Mises e de Drucker-Prager podem ser representados por meio de restrições cônicas quadráticas. Já os critérios de Rankine, Tresca e Mohr-Coulomb, formulados em termos autovalores máximos e/ou mínimos, podem ser reescritos como restrições cônicas semi-definidas. É importante notar que tal representação é essencial para que o problema de otimização possa ser formulado na forma cônica, resultando portanto em um problema de otimização convexo de solução única que pode ser resolvido utilizando-se os métodos numéricos apropriados para programação cônica.

5.1 Critérios de Drucker-Prager e von Mises

Como indicado anteriormente, o critério de Drucker-Prager é uma generalização do critério de von Mises em que um termo relacionado à pressão hidrostática é introduzido. De fato, tomando-se $\alpha = 0$ na Eq. (17) obtemos a Eq. (14) que representa o critério de von Mises. Analogamente, o critério de Mohr-Coulomb é generalização dos critérios de Rankine e de Tresca. Dessa forma, basta então demonstrar a representação cônica para os casos mais gerais.

5.2 Representação cônica quadrática do critério de Drucker-Prager

Em termos do tensor de tensões de Cauchy, a expressão da Eq. (13) pode ser reescrita como

$$J_2(\Sigma) = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}{6}} \quad (29)$$

Alternativamente, coletando-se os elementos do tensor Σ no vetor

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T \quad (30)$$

pode-se reescrever a Eq. (29) na seguinte forma vetorial

$$J_2(\sigma) = \sigma^T P \sigma \quad (31)$$

em que

$$P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Observa-se que a matriz P é positiva semi-definida e, portanto, de acordo com o Teorema Espectral, pode ser decomposta como

$$P = V^T D V \quad (33)$$

em que V é a matriz que armazena os autovetores e $D = \text{diag}(\lambda_1(P), \dots, \lambda_6(P))$ tal que $\lambda_k(P) \geq 0$ ($k = 1, \dots, 6$).

Dessa forma, pode-se ainda decompor P como

$$L = D^{\frac{1}{2}} V \implies P = L^T L \quad (34)$$

Logo, o termo $\sqrt{J_2}$ na expressão da Eq. (17) pode ser reescrito como

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\sigma^T P \sigma} = \sqrt{\sigma^T V^T D V \sigma} = \sqrt{\sigma^T L^T L \sigma} = \|L\sigma\| \quad (35)$$

Por sua vez, o termo da pressão hidrostática pode ser convenientemente reescrito como

$$\sigma_p = m(X) = \sigma^T b, \quad b = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (36)$$

Por fim, o conjunto das tensões admissíveis do critério de Drucker-Prager, de acordo com a Eq. (18), pode ser reescrito como o seguinte cone de segunda ordem

$$\mathcal{M}_{DP} = \{ x \in \mathbb{R}^6 \mid \|L\sigma\| \leq (\tau_y - \alpha \sigma^T b), (\tau_y - \alpha \sigma^T b) > 0 \}. \quad (37)$$

5.3 Representação cônica semi-definida do critério de Mohr-Coulomb

O ponto central na representação cônica semi-definida do critério de Mohr-Coulomb, e seus correspondentes casos particulares, é notar que restrições quanto ao máximo/mínimo autovalor de uma matriz podem ser reescritas como restrições cônicas semi-definidas. Para isso, nota-se primeiramente que para $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\lambda_k(X - tI_d) = \lambda_k(X) - t \quad (k = 1, \dots, n) \quad (38)$$

em que I_d é a matriz identidade de tamanho apropriado.

Portanto, segue que

$$\lambda_{\max}(X - tI_d) = \lambda_{\max}(X) - t \quad (39)$$

logo é evidente que

$$\lambda_{\max}(X) \leq t \iff tI_d - X \succeq 0 \quad (40)$$

Observa-se também que

$$\lambda_{\min}(X) = -\lambda_{\max}(-X) \quad (41)$$

e portanto

$$-\lambda_{\min}(X) \leq t \iff tId + X \succeq 0 \quad (42)$$

Nota-se também que a desigualdade da Eq. (10) pode ser dividida em duas igualdades equivalentes, de acordo com

$$\alpha\lambda_{\max}(X) - \beta\lambda_{\min}(X) \leq \kappa \iff \alpha\lambda_{\max}(X) \leq (\kappa - y), -\beta\lambda_{\min}(X) \leq y \quad (43)$$

em que $y \in \mathbb{R}$ é uma variável auxiliar.

Portanto, o conjunto de tensões admissíveis da Eq. (10) pode ser escrito por meio da seguinte restrição cônica semi-definida

$$\mathcal{M}_{MC} = \{ (X, y) \in \mathcal{S}^3 \times \mathbb{R} \mid -yId - \alpha X + \kappa Id \succeq 0, yId + \beta X \succeq 0 \}. \quad (44)$$

6 PRINCÍPIO DA MÁXIMA DISSIPACÃO PLÁSTICA

Atualmente, o *Princípio da Máxima Dissipação Plástica* (PMDP) exerce um papel central na formulação matemática de modelos constitutivos elasto-plásticos. Em contraste ao método construtivo, em que as leis de escoamento e encruamento são postuladas, a formulação por meio do PMDP segue de argumentos matemáticos embasados na teoria de programação matemática, como multiplicadores de Lagrange e condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Contudo, vale ressaltar que o PMDP se limita a modelos elasto-plásticos com leis de escoamento e encruamento associativas. De fato, tais hipóteses são consequências diretas do PMDP.

Seja

$$\mathcal{A} = \{(\sigma, A) \mid f(\sigma, A) \leq 0\} \quad (45)$$

em que A é um conjunto de variáveis associadas ao fenômeno encruamento. O PMDP estabelece que, para uma dada taxa de deformação plástica $\dot{\epsilon}^p$ e uma dada taxa de variação das variáveis internas de encruamento $\dot{\alpha}$, o *estado verdadeiro* $\{\sigma, A\} \in \mathcal{A}$ é, dentre todos os estados admissíveis $\{\sigma^*, A^*\} \in \mathcal{M}$, aquele para o qual a dissipação plástica

$$\mathcal{D}^p(\sigma, A, \dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) = \sigma : \dot{\epsilon}^p - A * \dot{\alpha} \quad (46)$$

é máxima, ou seja

$$\mathcal{D}^p(\sigma, A, \dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) \geq \mathcal{D}^p(\sigma^*, A^*, \dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) \forall (\sigma^*, A^*) \in \mathcal{A} \quad (47)$$

Alternativamente, o PMDP estabelece que o *estado verdadeiro* $\{\sigma, A\} \in \mathcal{A}$ é a solução do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathcal{D}^p(\sigma^*, A^*, \dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}) \\ \text{s.t.} \quad & f(\sigma^*, A^*) \leq 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Utilizando-se o Método dos Multiplicadores de Lagrange (Nocedal & Wright, 2006), tal problema pode ser reformulado como o problema de se determinar os pontos estacionários da função Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\sigma^*, A^*, \dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) = -\sigma^* : \dot{\epsilon}^p + A^* : \dot{\alpha} - \dot{\gamma} f(\sigma^*, A^*) \quad (49)$$

em que $\dot{\gamma}$ é o multiplicador de Lagrange associado à restrição do problema da Eq. (48), também conhecido como multiplicador plástico.

As condições de primeira ordem de KKT para este problema levam a

a. lei de escoamento associativa

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\sigma, A, \dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})}{\partial \sigma} = 0 \implies \dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma, A)}{\partial \sigma} \quad (50)$$

b. lei de encruamento associativa

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\sigma, A, \dot{\epsilon}^p, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})}{\partial A} = 0 \implies \dot{\alpha} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma, A)}{\partial A} \quad (51)$$

c. condições complementares de carregamento/descarregamento

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\sigma, A) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\sigma, A) = 0 \quad (52)$$

Considerando-se ainda

d. decomposição aditiva das deformações

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (53)$$

em que ϵ é o tensor das deformações totais e ϵ^e o tensor das deformações elásticas, e

e. lei de Hook para deformações elásticas

$$\sigma = C : \epsilon^e \quad (54)$$

o modelo constitutivo elasto-plástico fica completamente definido.

7 INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTO PLÁSTICAS

Sejam dados em um determinado tempo t_0 as deformação elásticas $\epsilon^e(t_0)$, as deformações plásticas $\epsilon^p(t_0)$, as variáveis internas de encruamento $\alpha(t_0)$ e seja $\epsilon(t)$ o histórico de deformações totais para $t \in [t_0, T]$. Considere ainda um modelo constitutivo elasto-plástico como o descrito pelas Eqs. (50-54). Então, o problema de valor inicial constitutivo elasto-plástico consiste em se determinar as funções $\epsilon^e(t)$, $\alpha(t)$ e $\dot{\gamma}$ que satisfazem $\forall t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned} \epsilon^e(t) &= \epsilon(t) - \dot{\gamma}(t) \frac{f(\sigma(t), A(t))}{\partial \sigma(t)} \\ \dot{\alpha}(t) &= -\dot{\gamma}(t) \frac{\partial f(\sigma(t), A(t))}{\partial A(t)} \\ \text{s.t. } \dot{\gamma}(t) &\geq 0, \quad f(\sigma(t), A(t)) \leq 0, \quad \dot{\gamma}(t) f(\sigma(t), A(t)) = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Como mencionado anteriormente, tal sistema de *equações diferencial-algébrico* (EAD) só admite soluções analíticas para casos muito simples e, portanto, de forma a tratar problemas mais complexos em geral adota-se uma metodologia numérica.

Em geral, o primeiro passo para o tratamento numérico de tal problema é adotar um Método de Euler para discretização temporal das Eqs. (55). Em particular, empregando-se o esquema implícito obtêm-se o seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^e &= \epsilon_n^e + \Delta\epsilon - \Delta\gamma \frac{f(\sigma_{n+1}, A_{n+1})}{\partial\sigma_{n+1}} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \Delta\gamma \frac{\partial f(\sigma_{n+1}, A_{n+1})}{\partial A_{n+1}} \\ \text{s.t. } \Delta\gamma &\geq 0, \quad f(\sigma_{n+1}, A_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta\gamma f(\sigma_{n+1}, A_{n+1}) = 0.\end{aligned}\tag{56}$$

Uma vez obtidas as equações na forma discreta, prossegue-se com o algoritmo preditor/corretor. Primeiramente, assume-se que a variação de deformações $\Delta\epsilon$ é puramente elástica, passo conhecido como preditor elástico. Essa hipótese é chamada de solução *trial*, tal que

$$\epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon, \quad \alpha_{n+1}^{\text{trial}} = \alpha_n\tag{57}$$

Se tal solução satisfaz

$$f(\epsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}, \alpha_{n+1}^{\text{trial}}) \leq 0\tag{58}$$

então simplesmente atualiza-se as variáveis

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}}\tag{59}$$

Caso contrário, prossegue-se com o passo corretor plástico, em que resolve-se o seguinte sistema de equações não-linear

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^e &= \epsilon_n^e + \Delta\epsilon - \Delta\gamma \frac{f(\sigma_{n+1}, A_{n+1})}{\partial\sigma_{n+1}} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \Delta\gamma \frac{\partial f(\sigma_{n+1}, A_{n+1})}{\partial A_{n+1}} \\ f(\sigma_{n+1}, A_{n+1}) &= 0\end{aligned}\tag{60}$$

Uma vez obtida a solução $(\epsilon_{n+1}^e, \alpha_{n+1})$ de tal sistema, verifica-se as restrições das Eqs. (56). Caso seja satisfeito, as variáveis são atualizadas. Caso contrário, deve-se obter outra solução para o sistema.

Alternativamente, o problema discreto da Eq. (56) pode ser interpretado como um problema de otimização convexa da seguinte forma

$$\begin{aligned}\min_{\sigma, A} \quad & \frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma) : C^{-1} : (\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma) + \frac{1}{2}(A_{n+1}^{\text{trial}} - A) : D^{-1} : (A_{n+1}^{\text{trial}} - A) \\ \text{s.t.} \quad & f(\sigma, A) \leq 0\end{aligned}\tag{61}$$

onde D é o módulo plástico generalizado tal que

$$A = D\alpha \iff \alpha = D^{-1}A\tag{62}$$

Considerando-se a Lagrangiana associada ao problema da Eq. (61)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma, A, \Delta\gamma) = & \frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma) : C^{-1} : (\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma) \\ & + \frac{1}{2}(A_{n+1}^{\text{trial}} - A) : D^{-1} : (A_{n+1}^{\text{trial}} - A) + \Delta\gamma f(\sigma, A) \end{aligned} \quad (63)$$

as condições de KKT levam a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\sigma, A, \Delta\gamma)}{\partial \sigma} = 0 & \implies \epsilon_{n+1}^e = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon - \Delta\gamma \frac{f(\sigma_{n+1}, A_{n+1})}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\sigma, A, \Delta\gamma)}{\partial A} = 0 & \implies \alpha_{n+1} = \alpha_n - \Delta\gamma \frac{\partial f(\sigma_{n+1}, A_{n+1})}{\partial A_{n+1}} \\ \Delta\gamma \geq 0, \quad f(\sigma_{n+1}, A_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta\gamma f(\sigma_{n+1}, A_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

que prova que a solução (σ_{n+1}, A_{n+1}) do problema de otimização corresponde à solução do problema da Eq. (56).

8 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RETORNO À SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO VIA PROGRAMAÇÃO CÔNICA

Considerando-se um encruamento isotrópico linear, dado por

$$\sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{y0} + H\bar{\epsilon}^p \quad (65)$$

onde $\bar{\epsilon}^p$ é a deformação plástica acumulada e H é módulo de encruamento linear isotrópico. Temos portanto que

$$A = H\bar{\epsilon}^p, \quad \alpha = \bar{\epsilon}^p \implies D = H \quad (66)$$

Dessa forma, os critérios de resistência são reescritos, sem perda de generalidade, como

$$(\Sigma_p, \alpha) \in \mathcal{M} \quad , \quad \mathcal{M} = \{(X, k) \in \mathcal{S}^3 \times \mathbb{R} | f(X) \leq \sigma_{y0} + Hk\} \quad (67)$$

E o problema de otimização da Eq. (61) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \alpha} \quad & \frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma)^T C^{-1}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma) + \frac{1}{2}(\alpha_{n+1}^{\text{trial}} - \alpha)H(\alpha_{n+1}^{\text{trial}} - \alpha) \\ \text{s.t.} \quad & f(\sigma, \alpha) \in \mathcal{M} \end{aligned} \quad (68)$$

Verifica-se porém que a função objetivo de tal problema é não-linear e, portanto, à primeira vista, o problema não pode ser formulado como um problema de otimização cônica do tipo da Eq. (19). Contudo, observa-se que tal problema é equivalente à

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \alpha, y_1, y_2} \quad & y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma)^T C^{-1}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \sigma) \leq y_1 \quad (1) \\ & \frac{1}{2}(\alpha_{n+1}^{\text{trial}} - \alpha)H(\alpha_{n+1}^{\text{trial}} - \alpha) \leq y_2 \quad (2) \\ & f(\sigma, \alpha) \in \mathcal{M} \quad (3) \end{aligned} \quad (69)$$

sendo que as restrições (1) e (2) podem ser reescritas como restrições cônicas quadráticas (vide (Ben-Tal & Nemirovski, 2001)).

Segue portanto que, para o caso em que a restrição (3) possa ser reformulada como um restrição cônica, ou seja, para os casos em que o critério de escoamento possa ser reescrito na forma cônica, a solução do problema de retorno à superfície da Eq. (56) pode ser reformulado como um problema de otimização cônica.

9 RESULTADOS

Um aspecto fundamental na implementação numérica do modelo da plasticidade consiste na precisão dos algoritmos de integração das equações constitutivas elasto-plásticas. Para incrementos de deformações arbitrariamente pequenos é possível demonstrar matematicamente a ordem de precisão de certos algoritmos. Contudo, considerando problemas práticos, é importante avaliar a precisão dos algoritmos de integração para o caso de incrementos suficientemente "grandes", ou seja, incrementos correspondentes a passos finitos de carga. Adota-se neste trabalho o procedimento proposto por (Krieg & Krieg, 1977) que consiste no uso de *iso-error maps* para a avaliação de diversos algoritmos de integração. De acordo com (Souza Neto et al., 2008), tal ferramenta demonstrou ser efetiva e atualmente é a mais aceita para o estudo da precisão de algoritmos de integração sob grandes incrementos de deformação.

Geração dos *iso-error maps*

Considere um estado de tensões arbitrário σ_o sob a superfície de escoamento, ou seja

$$f(\sigma_o, \kappa) = 0, \quad (70)$$

o vetor $\mathbf{n}$ normal à superfície no ponto σ_o

$$\mathbf{n}_i = \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \right|_{\sigma=\sigma_o} \quad (71)$$

e um vetor $\mathbf{t}$ tangente à superfície. Construindo-se a sequência de incrementos conforme

$$\Delta\sigma^{\text{trial}} = \Delta\sigma_t \mathbf{t} + \Delta\sigma_n \mathbf{n} \quad (72)$$

e definindo a medida de erro

$$\epsilon = \frac{\sqrt{(\sigma_{\text{exact}} - \sigma_{\text{num}}) \cdot (\sigma_{\text{exact}} - \sigma_{\text{num}})}}{\sqrt{\sigma_{\text{exact}} \cdot \sigma_{\text{exact}}}} \quad (73)$$

em que σ_{num} é o valor obtido pelo algoritmo de integração sob o incremento definido na Eq. (72) pelo par de pontos (σ_t, σ_n) e σ_{exact} é solução exata das equações constitutivas elasto-plásticas para o mesmo incremento. Então, o *iso-error map* consiste nas isocurvas da seguinte função

$$\begin{aligned} \epsilon: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\sigma_t, \sigma_n) &\mapsto \epsilon(\sigma_t, \sigma_n). \end{aligned}$$

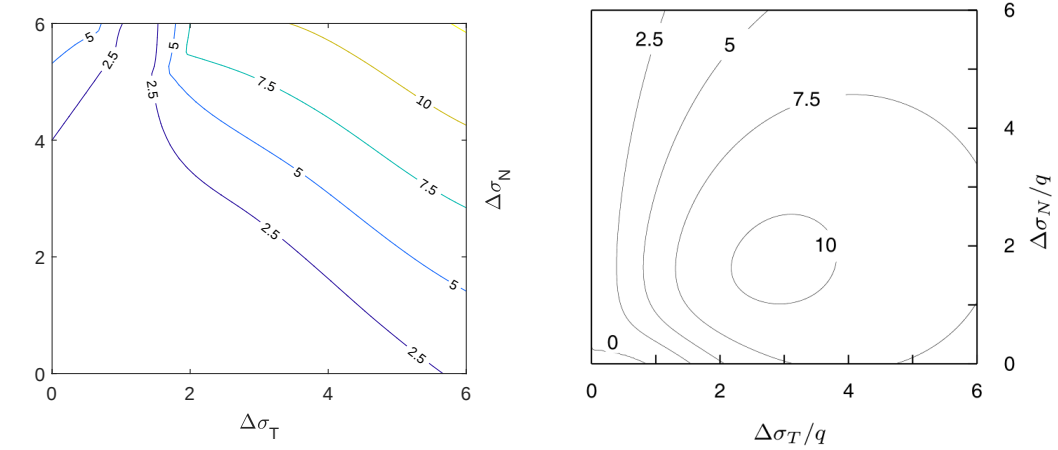
Deve-se observar, contudo, que a solução analítica para tal problema é de difícil obtenção e só está disponível para problemas muito simples. Sendo assim, de forma a se obter *iso-error maps* para problemas gerais, a solução exata é obtida dividindo-se tal incremento em um número suficiente de sub-incrementos. Assim como adotado em (Souza Neto et al., 2008), neste trabalho considera-se uma divisão em 1000 sub-incrementos.

9.1 Geração do *iso-error map* para o critério de Drucker-Prager

Considere o critério de Drucker-Prager, Eq. (17), com constantes $\alpha = 1$ e $\tau_y = 2$. Tomando-se o ponto inicial sobre a superfície de escoamento σ_o como

$$\sigma_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

e tomando-se o vetor tangente $\mathbf{t}$ de forma que esteja contido no plano desviador, obtêm-se o *iso-error map* conforme ilustrado na Figura 2a.



(a) Drucker-Prager *iso-error map*.

(b) Drucker-Prager *iso-error map* para comparação.
Fonte: (Souza Neto et al., 2008).

Figura 2: *Iso-error maps* para o critério de Drucker-Prager.

Para efeitos de comparação, apresenta-se na Figura 2b o *iso-error map* apresentado em (Souza Neto et al., 2008). É importante destacar que os resultados foram obtidos para modelos com constantes e pontos de partida diferentes e, portanto, deseja-se somente comparar os resultados de maneira qualitativa.

9.2 Geração do *iso-error map* para o critério de Mohr-Coulomb

Considere o critério de Mohr-Coulomb, Eq. (8), com constantes $\phi = \sqrt{2}/2$ e $c = 1$.

Arbitra-se 3 diferentes pontos na superfície de escoamento como

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{\sigma_B + \sigma_C}{2} \\ \sigma_B &= \begin{bmatrix} \frac{-(3a_y - 1)}{a_x + 2a_y} & \frac{-(3a_y - 1)}{a_x + 2a_y} & \frac{-(3a_x + 2)}{a_x + 2a_y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_C &= \begin{bmatrix} \frac{-(3a_x + 1)}{2a_x + a_y} & \frac{-(3a_y - 2)}{2a_x + a_y} & \frac{-(3a_x + 1)}{2a_x + a_y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

de forma que os pontos estejam localizados conforme o esquema da Figura 3.

Além disso, definem-se os vetores normais $\mathbf{n}_B$ e $\mathbf{n}_C$, nos pontos de singularidade do critério, como a média dos planos adjacentes. Por fim, toma-se o vetor tangente $\mathbf{t}$ de forma que esteja contido no plano desviador. Sob essas hipóteses, o *iso-error map* obtido para cada um dos 3 casos é ilustrado nas Figuras 4a, 4b e 4c.

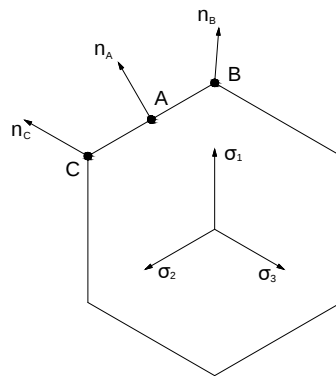
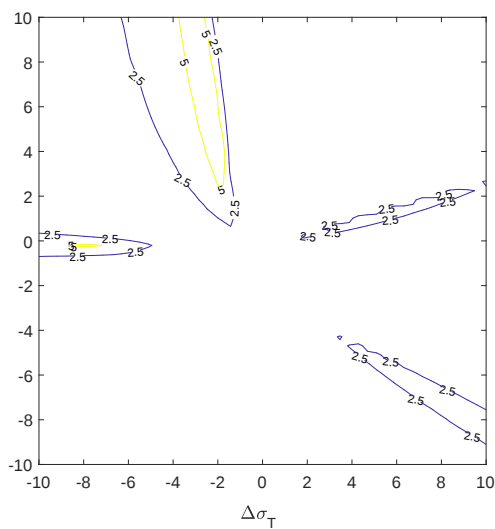
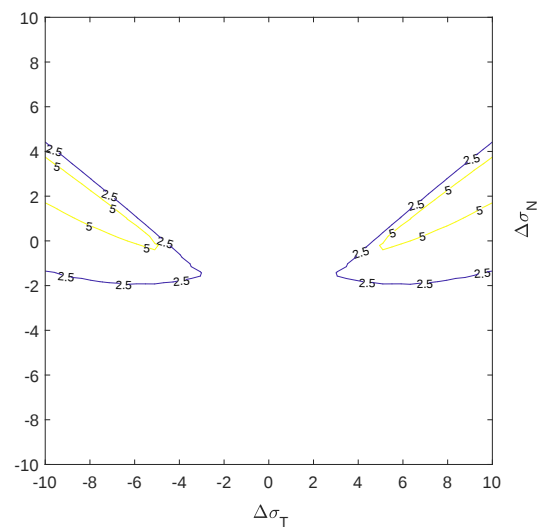


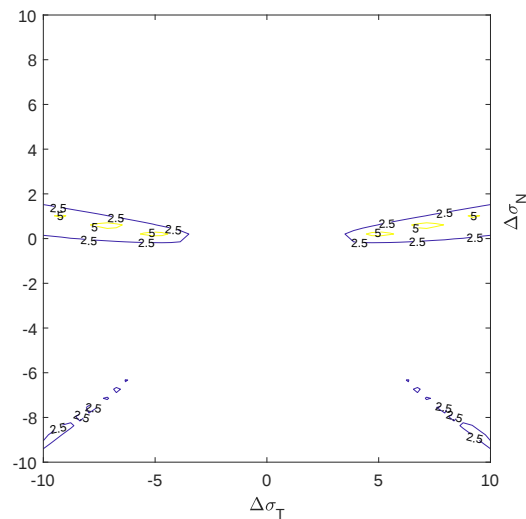
Figura 3: Representação geométrica dos pontos A, B e C.



(a) Mohr-Coulomb *iso-error map* ponto A.



(b) Mohr-Coulomb *iso-error map* ponto B.



(c) Mohr-Coulomb *iso-error map* ponto C.

Figura 4: Mohr-Coulomb *iso-error maps*.

10 CONCLUSÃO

Demonstra-se, neste trabalho, uma formulação para a solução de problemas de retorno à superfície por meio da programação cônica. Uma das maiores vantagens dessa alternativa é verificada para o caso de critérios de escoamento com singularidades. Tal situação apresenta diversos empecilhos para a construção de algoritmos de retorno à superfície relacionados com o cálculo da derivada da superfície de escoamento em relação ao tensor de tensões nas regiões de singularidade. Observa-se, porém, que tal tratamento não é necessário para a formulação apresentada. De fato, tais casos acomodam-se naturalmente na metodologia da programação matemática. Além do mais, algoritmos robustos e eficientes estão disponíveis para a solução de programação cônica, de modo que o problema possa ser resolvido de forma eficiente. Por outro lado, nota-se que a formulação apresentada é limitada a modelos constitutivos elasto-plásticos associativos com encruamento linear. Sendo assim, materiais como solos e rochas, que em geral não apresentam um comportamento segundo a lei associativa, não podem ser incorporados na formulação proposta.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte a este trabalho.

REFERÊNCIAS

- Andersen, E. D., Roos, C., & Terlaky, T., 2003. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization. *Mathematical Programming*, vol. 95, no. 2, pp. 249–277.
- Ben-Tal, A. & Nemirovski, A., 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Boyd, S. U. & Vandenberghe, U., 2010. *Convex Optimization Theory*. Cambridge University Press.
- Chen, W. F. & Han, D. J., 1987. *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag.
- Krieg, R. D. & Krieg, D. B., 1977. Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 99, no. 4, pp. 510–515.
- Lobo, M. S., Vandenberghe, L., Boyd, S., & Lebret, H., 1998. Applications of Second-Order Cone Programming. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 284, no. 1-3, pp. 193–228.
- Nesterov, Y. E. & Todd, M. J., 1997. Self-Scaled Barriers and Interior-Point Methods for Convex Programming. *Mathematics of Operations Research*, vol. 22, no. 1, pp. 1–42.
- Nocedal, J. & Wright, S. J., 2006. *Numerical Optimization*. Springer.
- Simo, J. & Hughes, T., 2013. *Computational Inelasticity*. Springer.
- Souza Neto, E. A., Peric, D., & Owen, D. R. J., 2008. *Computational Methods for Plasticity*. Wiley.