



OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO ANÁLISE LIMITE

Guilherme Coelho Gomes Barros

Ivan Fábio Mota de Menezes

Luiz Fernando Martha

gbarros@tecgraf.puc-rio.br

ivan@tecgraf.puc-rio.br

lfm@tecgraf.puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

R. Marquês de São Vicente, 225 - Gávea, 22430-060, Rio de Janeiro - RJ, Brasil

Resumo. *Este trabalho apresenta uma formulação puramente baseada em plasticidade para ser aplicada à otimização topológica. A principal ideia da otimização topológica em mecânica dos sólidos é encontrar a distribuição de material dentro do domínio de forma a otimizar uma medida de performance e satisfazer um conjunto de restrições. Uma possibilidade é minimizar a flexibilidade da estrutura satisfazendo que o volume seja menor do que um determinado valor. Essa é a formulação clássica da otimização topológica, que é vastamente utilizada na literatura. Não obstante fornecer resultados interessantes, verificações adicionais, relativas ao critério de segurança estrutural, são necessárias para viabilizar sua aplicação prática. Esse critério de segurança pode ser definido como limitar as tensões elásticas ao critério de plastificação em todo o domínio. Esta definição leva à otimização topológica com restrições de tensões. Por outro lado, em aplicações de projeto por estado limite último busca-se tirar proveito de toda capacidade resistente da estrutura. Dessa forma, este trabalho aborda a incorporação do projeto estrutural plástico à otimização topológica. A formulação proposta é uma extensão da análise limite, que fornece uma estimativa da carga de colapso de uma estrutura diretamente por meio da programação matemática, assegurando a eficiência computacional da metodologia proposta. De forma a verificar a otimização topológica plástica e comparar a topologia final com as obtidas através da otimização topológica clássica e da com restrição de tensões, são apresentados exemplos numéricos.*

Palavras chave: *Otimização Topológica, Análise Limite, Projeto Estrutural Plástico*

1 INTRODUÇÃO

Otimização estrutural é uma área que visa, através de manipulações dos parâmetros que descrevem um projeto, aprimorar o desempenho da estrutura. Essa área tem na otimização topológica um ramo de grande importância. Essa otimização busca a melhor distribuição de material ao longo de um domínio original de projeto. Sua formulação mais frequentemente Andreassen et al. (2011); Bendsøe & Sigmund (1999); Eschenauer & Olhoff (2001); Rozvany (2009) pode ser vista como um grande passo na direção de um projeto estrutural completamente automático. Entretanto, os projetos obtidos por meio desse processo podem apresentar severas concentrações de tensões Holmberg et al. (2013).

Emergiu do intuito de encontrar uma metodologia automatizada de projeto, que pudesse satisfazer os critérios de segurança quanto ao colapso estrutural, a otimização topológica com restrições de tensões Holmberg et al. (2013); Duysinx & Bendsøe (1998); Verbart et al. (2016a,b); París et al. (2009); Lee et al. (2012). Nessa formulação busca-se, em geral, uma distribuição de material que atenda o critério de plastificação do material, em todo domínio ótimo, com o menor volume possível.

Contudo, em várias aplicações busca-se prover segurança à estrutura em relação ao colapso plástico utilizando toda a capacidade de deformação plástica do material Wong (2009); Neal (1977); Moy (1981). Esse é o caso no estado limite último de esgotamento da capacidade resistente do material considerado em diversos documentos normativos. Nessa metodologia de projeto verifica-se que a estrutura não atingirá o colapso plástico para condições extremas de carregamento.

Dessa forma, este trabalho busca apresentar uma metodologia de otimização topológica considerando o critério de projeto estrutural plástico do material. As equações fundamentais desta formulação são derivadas dos teoremas limites da plasticidade Gvozdev (1936); Drucker et al. (1952). A otimização topológica considerando análise limite é amplamente empregada para treliças, sendo comumente referida como método de estrutura base (*Ground Structure*) Dorn (1964); Ohsaki (2016); Zegard & Paulino (2014, 2015); Sokół (2011).

Todavia, poucos são os trabalhos encontrados na literatura Kammoun & Smaoui (2015) em que a formulação plástica adotada no método de estrutura base é estendida para o meio contínuo usando os desenvolvimentos da análise limite para derivar as equações de equilíbrio. Ainda o trabalho de Kammoun e Smaoui Kammoun & Smaoui (2015) represente um grande avanço nessa frente, os resultados apresentados mostram dificuldade em obter resultados discretos, *i.e.*, resultados em que há material em apenas parte do domínio original.

Este trabalho busca, então, apresentar uma nova forma de penalização da formulação contínua da otimização topológica considerando análise limite. Por essa proposta busca-se a obtenção de resultados discretos que estejam mais próximos do projeto estrutural final. Por fim, serão apresentados resultados comprovando a acurácia da metodologia proposta e será mostrado como essa formulação é mais vantajosa em problemas em que o interesse está, de fato, no limite da capacidade resistente da estrutura.

2 ANÁLISE LIMITE

A análise limite é uma técnica para estimar a carga de colapso de uma estrutura. Ou seja, o valor máximo que se pode majorar as cargas aplicadas de modo a levar a estrutura à iminência do

colapso plástico. Para esse fim, a análise limite é mais eficiente que a análise elastoplástica, por não haver necessidade de encontrar configurações de equilíbrio intermediárias. Desse modo, a análise limite é mais propícia a ser empregada com a otimização topológica.

A análise limite é baseada nos teoremas limites da plasticidade Gvozdev (1936); Drucker et al. (1952). A formulação do problema pelo teorema do limite inferior – também conhecido como teorema estático – permite que o problema seja formulado apenas em termos das variáveis estáticas, tensões e força. Esse teorema pode ser enunciado como: se pode ser encontrado um estado de tensões σ_{ij} seguro e estaticamente admissível, a estrutura não atingiu o colapso ou está na iminência de colapsar Drucker (1958).

Um estado de tensões σ_{ij} é dito seguro se atende a função de plastificação f em todo domínio:

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad \forall \Omega, \quad (1)$$

ademais, um estado de tensões é dito estaticamente admissível se atende as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_i &= 0 \\ \sigma_{ij}n_j &= t_i \end{aligned} \quad \forall \Omega, \quad (2)$$

em que, b é uma força de corpo e t são forças distribuídas no contorno cuja normal é n .

Decorre do teorema estático que a real carga de colapso será a maior possível de se obter um estado de tensões seguro e estaticamente admissível. Ou seja,

$$\lambda = \sup \left\{ \mu \in \mathbb{R}^+; \exists \sigma_{ij}, \sigma_{ij,j} + \mu b_i = 0, \sigma_{ij}n_j = \mu t_i, f(\sigma_{ij}) \leq 0 \right\}, \quad (3)$$

em que, μ é qualquer possível fator de majoração das cargas e λ , o supremo do conjunto definido na Eq. (3), é a real carga de colapso da estrutura.

Para resolver a Eq. (3) seria necessário achar funções que atendessem as condições impostas para cada valor de μ e tomar o máximo possível. Para viabilizar essa análise utiliza-se a discretização por meio do método dos elementos finitos. Essa formulação é derivada a partir do princípio dos trabalhos virtuais, escolhendo-se um campo para interpolação dos deslocamentos e outro, independente, para interpolar tensões Krabbenhoft et al. (2005).

Por fim, encontra-se uma equação de equilíbrio

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mu \mathbf{F}, \quad (4)$$

em que, $\mathbf{A}$ é uma matriz de equilíbrio; $\mathbf{F}$ é o vetor de carregamentos equivalente; e $\boldsymbol{\beta}$ são parâmetros adotados para interpolar o campo de tensões no elemento.

A formulação contínua do problema de análise limite, Eq. (3), após a discretização pelo método dos elementos finitos, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \lambda = \max_{\lambda, \{\beta\}, \{\sigma\}} \quad & \mu \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{A}\beta = \mu \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\beta \\ f^i(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad \forall \Omega \end{cases}, \end{aligned} \quad (5)$$

em que $\mathbf{D}$ é a matriz de relação entre os parâmetros de tensão e os valores de tensão nos pontos críticos.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO ANÁLISE LIMITE

O objetivo básico da otimização topológica considerando análise limite é determinar a estrutura de mínimo volume que esteja na iminência de colapso para o carregamento de projeto. Ou seja, pelo teorema do limite inferior buscamos um campo de densidades $\rho : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ de menor volume possível para o qual é possível encontrar um estado de tensões seguro e estaticamente admissível, ou seja,

$$V = \inf \left\{ \int_{\Omega} \rho \, d\Omega, \rho \in \mathcal{F}(\Omega, \{0, 1\}); \exists \sigma_{ij}, \sigma_{ij,j} + b_i = 0, \sigma_{ij} n_j = t_i, f(\sigma_{ij}, \rho) \leq 0 \right\}. \quad (6)$$

Ressalta-se que, na Eq. (6), a função de plastificação é dependente tanto da distribuição de material ρ , quanto do estado de tensões.

A discretização do material no domínio seguirá o modelo SIMP Bendsøe & Sigmund (2004) em que, para essa distribuição, é assumida uma função contínua que tende para a descontínua ótima. Logo, substitui-se ρ por $\bar{\rho} : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Posteriormente o valor de $\bar{\rho}$ é elevado a $p \in \mathbb{N}$, formando, para cada ponto de Ω uma sequência $\{\bar{\rho}^p\}_{p \in \mathbb{N}}$. Pode-se verificar que,

$$\lim_{p \in \mathbb{N}} \bar{\rho}^p = 0 \quad \forall \bar{\rho} \in [0, 1),$$

e

$$\lim_{p \in \mathbb{N}} \bar{\rho}^p = 1 \iff \bar{\rho} = 1.$$

Desse modo, $\bar{\rho}$ tende à função descontínua ρ quando p tende a infinito. Ademais, as funções $\bar{\rho}$ utilizadas aqui são determinadas interpolando os valores de uma discretização do domínio por meio de uma técnica de filtro Bendsøe & Sigmund (2004).

A partir da discretização da interpolação do material e das equações de equilíbrio por meio do método dos elementos finitos, pode-se então escrever o problema como

$$\begin{aligned} \min_{\rho, \beta, \sigma} \quad & \rho^T V \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} A\beta = F \\ \sigma = D\beta \\ f^i(\sigma, \rho) \leq 0 \quad \forall \Omega \\ 0 \leq \rho_i \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

A penalização do problema com densidades contínuas para discretas é feita em cada ponto de avaliação do critério de plastificação. Nesse aspecto faz-se referência ao trabalho de Kammoun and Smaoui Kammoun & Smaoui (2015), no qual a penalização é aplicada apenas na função objetivo. A abordagem mostrada aqui é mais vantajosa para se obter um projeto discreto, uma vez que a densidade é penalizada individualmente por elemento.

Em geral, as funções de plastificação podem ser escritas como

$$f(\sigma) = s(\sigma) \leq r(\sigma), \quad (8)$$

desse modo, podemos penalizar a restrição presente na otimização topológica como

$$f(\sigma, \rho) = s(\sigma) \leq r(\sigma) \rho^p. \quad (9)$$

Esse princípio, aplicado ao critério de von Mises, é dado por:

$$f(\sigma, \rho) = \sqrt{\sigma^T M \sigma} \leq \rho^p \sigma_y. \quad (10)$$

4 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos para validação da metodologia proposta e comparação a topologia final encontrada com a dada pela otimização topológica regular e a com restrição de tensão.

4.1 MBB-Beam

O problema *MBB-Beam* é um exemplo clássico de otimização topológica. Ele consiste de uma viga biapoiada com carga concentrada aplicada no meio do vão. O modelo adotado, considerando a simetria da peça é mostrado na Fig. 1. O material adotado segue o critério de plastificação de von Mises com tensão de escoamento 350MPa, módulo de elasticidade 71GPa e coeficiente de Poisson 0.3; a peça é assumida com espessura de 1 mm; sua geometria é dada ainda por $L = 100\text{mm}$; e a carga aplicada à viga possui magnitude $F = 1.5\text{kN}$.

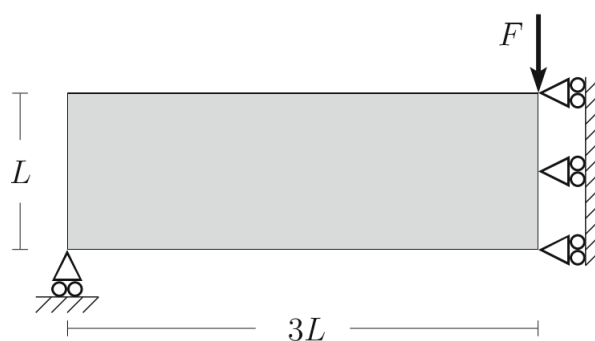


Figura 1: Geometria do problema *MBB-Beam* Holmberg et al. (2013)

O resultado para otimização topológica regular Talischi et al. (2010) é mostrado na Fig. 2, enquanto que o resultado considerando restrição de tensão Holmberg et al. (2013) é mostrado na Fig. 3. A topologia obtida pela metodologia apresentada é mostrada na Fig. 4 e o mapa de tensões no colapso da peça é mostrado na Fig. 5. Para tais resultados, foi utilizada uma discretização com 1200 elementos.

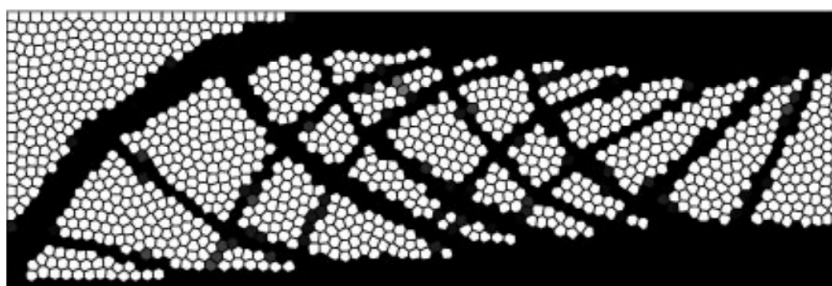


Figura 2: Otimização topológica regular do problema *MBB-Beam*



Figura 3: Otimização topológica com restrição de tensões do problema *MBB-Beam*

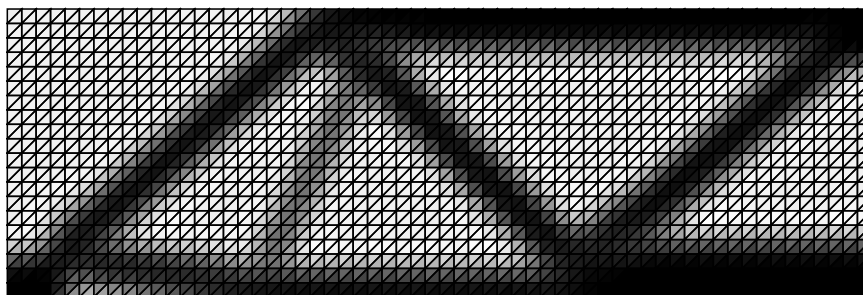


Figura 4: Otimização topológica considerando análise limite do problema *MBB-Beam*

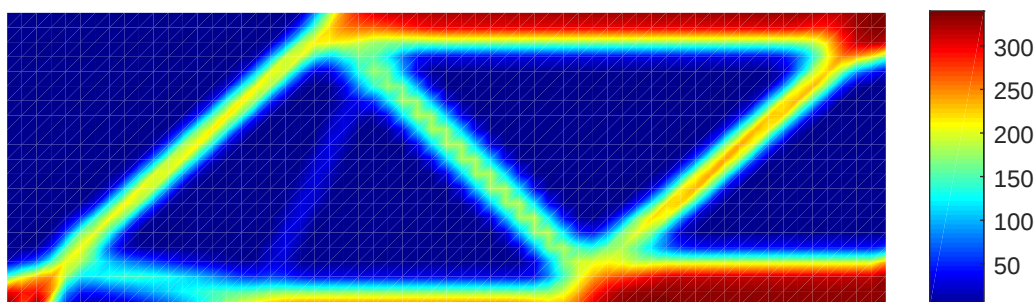


Figura 5: Mapa de tensões da topologia encontrada considerando análise limite

4.2 L-shaped beam

O problema *L-shaped beam* é extremamente popular para a otimização topológica com restrição de tensões Holmberg et al. (2013); Duysinx & Bendsøe (1998), pois possui uma concentração de tensão intrínseca à sua geometria. O modelo estrutural adotado é mostrado na Fig. 6. O material empregado e a magnitude do carregamento são os mesmos do problema *MBB-Beam* (ver item 4.1). A geometria do problema é dada por $L = 200\text{mm}$ e espessura igual à 1mm.

Utilizando o PolyTop Talischi et al. (2012) realizou-se a otimização topológica regular, cujo resultado é mostrado na Fig. 7. O resultado considerando concentração de tensões Holmberg et al. (2013) é apresentado na Fig. 8. A otimização topológica considerando análise limite desse problema resulta na distribuição de material mostrada na Fig. 9, para a qual tem-se o mapa de tensões no colapso mostrado na Fig. 10.

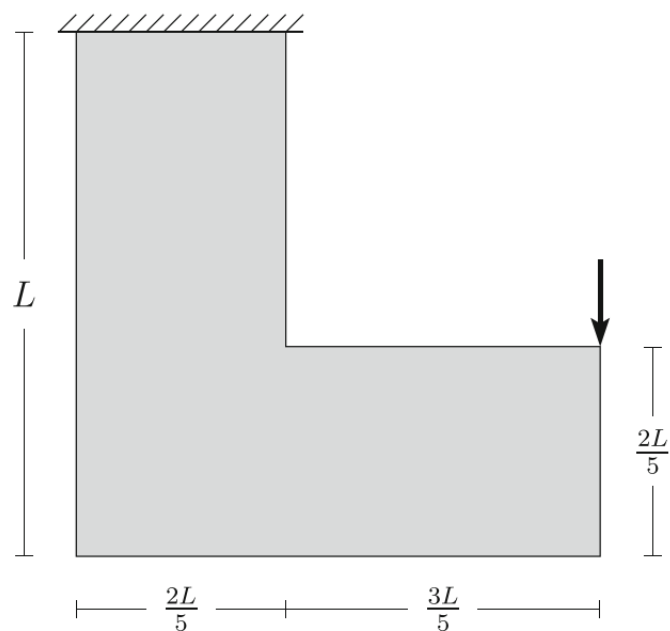


Figura 6: Geometria do problema *L-shaped beam* Holmberg et al. (2013)

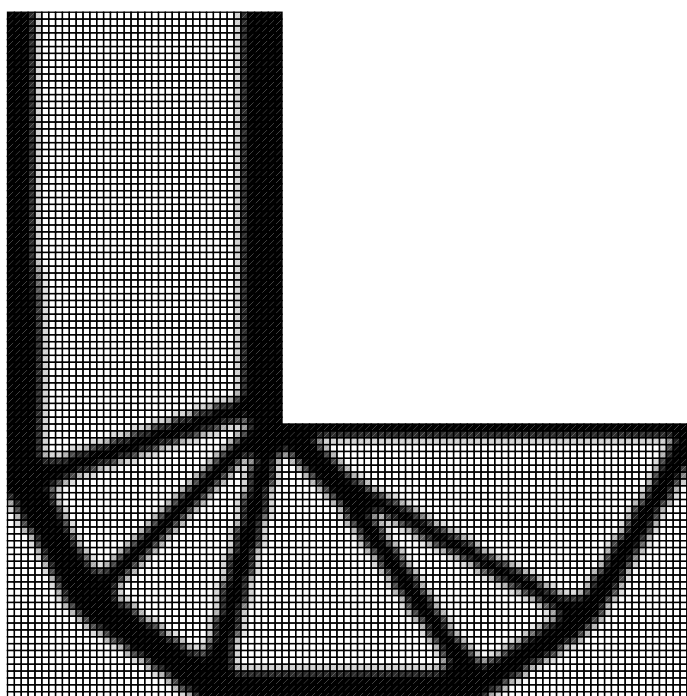


Figura 7: Otimização topológica regular do problema *L-shaped beam*

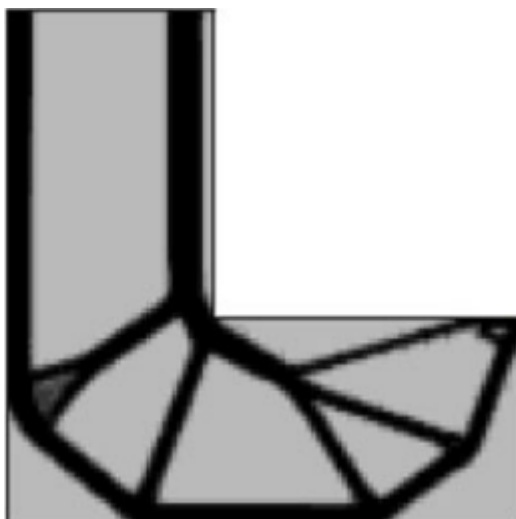


Figura 8: Otimização topológica com restrição de tensões do problema *L-shaped beam* Holmberg et al. (2013)

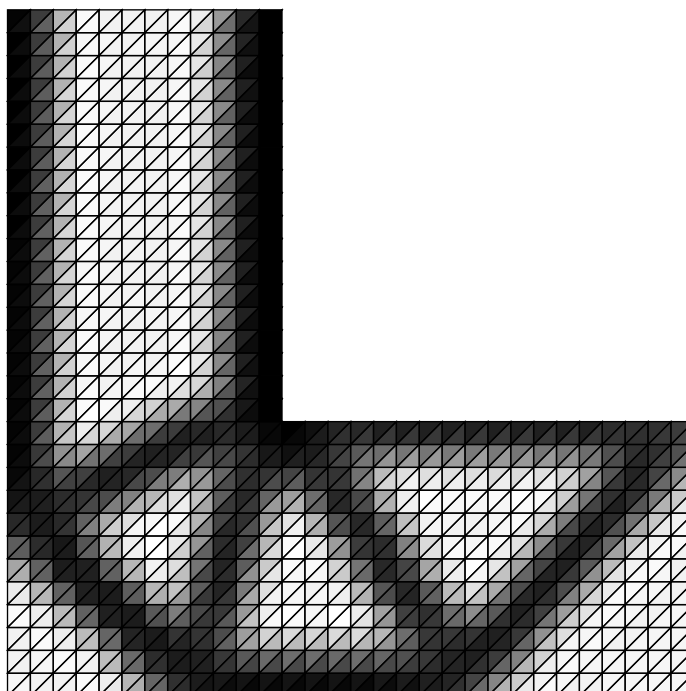


Figura 9: Otimização topológica considerando análise limite do problema *L-shaped beam*

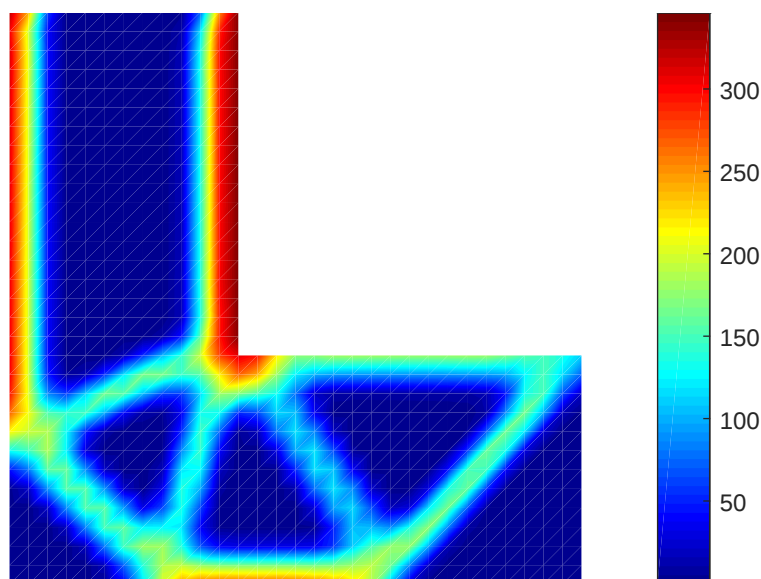


Figura 10: Mapa de tensões da topologia encontrada considerando análise limite

5 CONCLUSÕES

Com base nos desenvolvimentos mostrados e nos resultados numéricos obtidos pode-se constatar que a otimização topológica considerando análise limite permite alcançar volumes menores do que os obtidos com a otimização topológica considerando restrição de tensões. Desse modo, essa técnica pode ser muito útil para aplicações de projeto em estado limite último, uma vez que nesse caso busca-se prover segurança à estrutura quanto ao esgotamento de sua capacidade resistente.

Vale ressaltar ainda que, a otimização topológica com restrição de tensões recai, em geral, num problema de programação matemática altamente não-linear Verbart et al. (2016a). Desse modo, as soluções encontradas na literatura são, em geral, extremamente dependentes dos parâmetros utilizados na otimização, como solução inicial e constantes de penalização das tensões. Isso fica evidenciado pela quantidade de diferentes resultados que podem ser obtidos variando-se tais parâmetros Holmberg et al. (2013).

Nesse aspecto, vale ressaltar que a otimização topológica considerando análise limite recai num problema de programação matemática mais bem comportado: função objetivo linear; restrições lineares relativas às equações de equilíbrio; e a única fonte de não-linearidade seria a função de plastificação. Contudo, todas as funções de plastificação apresentam domínios convexos. Desse modo, o problema fica definido como uma solução sucessiva de problemas convexos.

Por fim, vale mencionar que essa formulação é facilmente extensível para problemas tridimensionais, uma vez que a análise limite nesses casos é bem conhecida na literatura. Ademais, pode-se estudar também, para trabalhos futuros, a extensão dessa formulação a problemas com mais de um material como, por exemplo, em estruturas de concreto armado.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPERJ e ao CNPq pelo suporte a este trabalho.

REFERÊNCIAS

- Andreassen, E. et al., Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 43, no. 1, 2011, pp. 1–16.
- Bendsøe, M. P. et al., Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, vol. 69, no. 9-10, 1999, pp. 635–654.
- Bendsøe, M. P. et al., *Topology optimization: theory, methods and applications*. Springer, Berlin, 2nd ed., 2004.
- Dorn, W. S., Automatic design of optimal structures. *Journal de mecanique*, vol. 3, 1964, pp. 25–52.
- Drucker, D. C., Plastic Design Methods — Advantages and Limitations. *Society of Naval Architects and Marine Engineers Transactions*, vol. 65, 1958, pp. 172 – 196.
- Drucker, D. C. et al., Extended limit design theorems for continuous media. *Quarterly of applied mathematics American Mathematical Society*, vol. 9, no. 4, 1952, pp. 381–389.
- Duysinx, P. et al., Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, no. 8, 1998, pp. 1453–1478.
- Eschenauer, H. A. et al., Topology optimization of continuum structures: A review*. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 54, no. 4, 2001, pp. 331–390.
- Gvozdev, A. A., The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, no. 4, 1936, pp. 322–335.
- Holmberg, E. et al., Stress constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 48, no. 1, 2013, pp. 33–47.
- Kammoun, Z. et al., A Direct Method Formulation for Topology Plastic Design of Continua. In *Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures*, Springer, 2015, pp. 47–63.
- Krabbenhoft, K. et al., A new discontinuous upper bound limit analysis formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, no. 7, 2005, pp. 1069–1088.
- Lee, E. et al., Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 46, no. 5, 2012, pp. 647–661.
- Moy, S. S. J., *Plastic Methods for Steel and Concrete*. MACMILLAN, London, 1981.

- Neal, B. G., *The plastic methods of structural analysis*. John Wiley & Sons, New York, NY, 3 ed., 1977.
- Ohsaki, M., *Optimization of finite dimensional structures*. CRC Press, 2016.
- París, J. et al., Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 39, no. 4, 2009, pp. 419–437.
- Rozvany, G. I. N., A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 37, no. 3, 2009, pp. 217–237.
- Sokół, T., A 99 line code for discretized Michell truss optimization written in Mathematica. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 43, no. 2, 2011, pp. 181–190.
- Talischi, C. et al., Polygonal finite elements for topology optimization: A unifying paradigm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 82, no. 6, 2010, pp. 671–698.
- Talischi, C. et al., PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 45, no. 3, 2012, pp. 329–357.
- Verbart, A. et al., A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016a, pp. 1–17.
- Verbart, A. et al., Damage approach: A new method for topology optimization with local stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 53, no. 5, 2016b, pp. 1081–1098.
- Wong, M. B., *Plastic analysis and design of steel structures*. Butterworth-Heinemann - Elsevier, 2009.
- Zegard, T. et al., GRAND — Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains using MATLAB. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 50, no. 5, 2014, pp. 861–882.
- Zegard, T. et al., GRAND3 — Ground structure based topology optimization for arbitrary 3D domains using MATLAB. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 52, no. 6, 2015, pp. 1161–1184.