



ANÁLISE CONFIABILÍSTICA DE MODELOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DELGADAS

Eduardo Toledo Lima Junior

Thiago Barbosa da Silva

Luiz Carlos Lima Vêras

limajunior@lccv.ufal.br

thiago.barbosa@lccv.ufal.br

luiz.veras@ctec.ufal.br

Laboratório de Computação Científica e Visualização, Universidade Federal de Alagoas

Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceió, Alagoas, Brasil

Resumo. Elementos planos sujeitos à flexão são de grande aplicabilidade em soluções de engenharia, sendo observados em diversos tipos de sistemas estruturais. No campo da engenharia de estruturas, o desenvolvimento de modelos numéricos permite uma avaliação robusta do desempenho mecânico de elementos e sistemas, tanto na fase de projeto quanto ao longo de sua vida em serviço. Considerando-se a análise de sólidos em regime linear, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) figura como uma poderosa ferramenta, fornecendo respostas precisas a um baixo custo computacional. Já a teoria de confiabilidade estrutural permite o cálculo da probabilidade de violação de um estado limite qualquer da estrutura, e contempla a avaliação das incertezas associadas às variáveis de projeto, as quais são descritas estatisticamente. Propõe-se uma análise probabilística aplicada a modelos de elementos de contorno para placas delgadas. A formulação do MEC é desenvolvida a partir de equações integrais para flexão de placas regidas pela teoria de Kirchhoff-Love. Os termos sobre o contorno são avaliados a partir de processos analíticos e numéricos de integração. Incertezas oriundas da variabilidade do carregamento e das propriedades mecânicas são consideradas, de forma a estimar os níveis de segurança associados a estados limites de tensões e deslocamentos admissíveis. Utilizam-se o método de simulação de Monte-Carlo e o método de transformação FORM (First Order Reliability Method). Apresentam-se exemplos de placas com diferentes configurações de geometria, material e condições de contorno, a fim de validar a metodologia proposta e ilustrar sua eficácia.

Palavras-chave: Placas de Kirchhoff-Love, MEC, Confiabilidade estrutural

1 INTRODUÇÃO

São diversas as aplicações envolvendo elementos estruturais planos sujeitos à flexão, incluindo placas metálicas para base de equipamentos, lajes em construção civil, paredes de reservatórios e vasos de pressão, dentre outros. A literatura classifica as placas quanto à sua esbeltez, sendo o termo *placa fina* ou *delgada* atribuído a estruturas onde a relação entre o menor lado e a espessura t esteja entre 10 e 150, sendo valores fora desse intervalo associados a placas muito delgadas ou espessas. Este tipo de elemento é tratado pela teoria de Kirchhoff-Love, descrita no trabalho de Love (1888), com base em premissas publicadas anteriormente por Kirchhoff (1850).

Desde o início do século XIX tem-se conhecimento de estudos acerca de equações integrais, as quais são a base do desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Contudo, a primeira teoria clássica das equações integrais, onde os núcleos eram definidos e integráveis, é devida a Fredholm (1903). Os chamados métodos de contorno tiveram grande avanço a partir da tese de Lachat, apresentada à Universidade de Southampton em 1975, onde o autor introduziu a simplicidade e elegância que faltavam ao método, imprimindo-lhe uma maior generalidade. A partir dos desenvolvimentos de Lachat, as técnicas de resolução das equações integrais passaram a ser interpretadas como um método numérico. Consta que Brebbia (1978a, 1978b) foi o primeiro se referir à técnica como *Método dos Elementos de Contorno* em seus trabalhos. Nestes, a obtenção das equações integrais foi feita a partir do método dos resíduos ponderados, com escolha conveniente da função ponderadora. A partir do primeiro livro, publicado por Brebbia (1978a), o Método passou a ser estudado de forma intensa em vários centros de pesquisa.

No desenvolvimento de formulações para análise de placas, a referência inicial é devida a Jaswon et al. (1967), que resolveram a equação governante, de natureza bi-harmônica, a partir de sua decomposição em duas equações harmônicas, tratadas por formulação integral e posteriormente recombinadas. De maneira similar, outros trabalhos foram apresentados, podendo-se citar: Hansen (1976), Altiero & Sikarskie (1978) e Wu & Altiero (1979). A formulação direta para flexão de placas foi consolidada em 1978 com os trabalhos de Bezine (1978, 1981), Bezine, & Gambi (1978), Tottenham (1979) e Stern (1979).

A partir da proposição da formulação direta diversos outros trabalhos foram, ao longo do tempo, ampliando o uso do MEC em placas: Bézine (1980) propôs uma formulação mista envolvendo contorno e domínio, para análise de vibrações; van der Weeën (1982) desenvolveu a formulação para placas espessas, com base nas hipóteses de Reissner; Katsikadelis & Armenakas (1984) apresentaram formulações para o problema de placas sobre fundação elástica. Em 1987, Paiva analisou placas considerando sua interação com um pavimento de edificação e, em Venturini & Paiva (1988) adicionou-se a possibilidade de variação de espessura. Fernandes, em 1998, tratou da não-linearidade em placas, adicionando a consideração de espessura variável em Fernandes et al. (1999). Em 2002, Fernandes & Venturini propuseram a análise de placas com enrijecimento. Andrade (2001) tratou da análise de soluções fundamentais para placas espessas, pelas teorias de Reissner e Mindlin.

Teorias baseadas em análise probabilística, como a Confiabilidade Estrutural, se propõem a incrementar a qualidade de métodos de projeto e análise de estruturas, a partir da quantificação e tratamento das incertezas inerentes ao problema em estudo. Como produto desse tipo de análise, pode-se obter uma estimativa da probabilidade de falha da estrutura.

Vale notar que o conceito de probabilidade de falha não está relacionado apenas à ocorrência de eventos extremos, de ruína estrutural, mas também à violação de qualquer requisito ao qual espera-se que a estrutura satisfaça, usualmente definidos pelos Estados Limites de Serviço da estrutura. Como exemplos, pode-se citar deslocamentos e tensões inadmissíveis, e abertura excessiva de fissuras. Dentre os métodos usuais em confiabilidade de estruturas, destacam-se o método de simulação de Monte Carlo e o método semi-analítico FORM (*First Order Reliability Method*). Ambos são apresentados em Melchers (1999).

Em problemas complexos de engenharia, cuja solução seja fornecida por um modelo computacional, podem-se aplicar técnicas de acoplamento entre rotinas de confiabilidade e modelos numéricos. De acordo com Lemaire (2013), o acoplamento é concebido para que o modelo confiabilístico governe o modelo mecânico, de forma que este último receba, em cada iteração, um conjunto de variáveis aleatórias fornecido pelo módulo de confiabilidade.

No presente trabalho, propõe-se a análise de placas finas, no contexto da Confiabilidade Estrutural, a fim de quantificar a influência da aleatoriedade de algumas variáveis de projeto na resposta da estrutura. Um modelo mecânico em elementos de contorno com aproximação linear é acoplado ao método FORM.

2 TEORIA DE FLEXÃO PARA PLACAS DELGADAS

Nesta seção apresenta-se brevemente a formulação de Kirchhoff-Love para placas finas. Entende-se por placa um corpo delimitado por duas superfícies planas e paralelas, separadas de uma distância muito pequena em relação às demais dimensões, a espessura da placa (t). Ainda, o carregamento atua na direção normal ao plano médio, como é chamado o plano paralelo às faces da placa e equidistante destas, no caso de espessura constante.

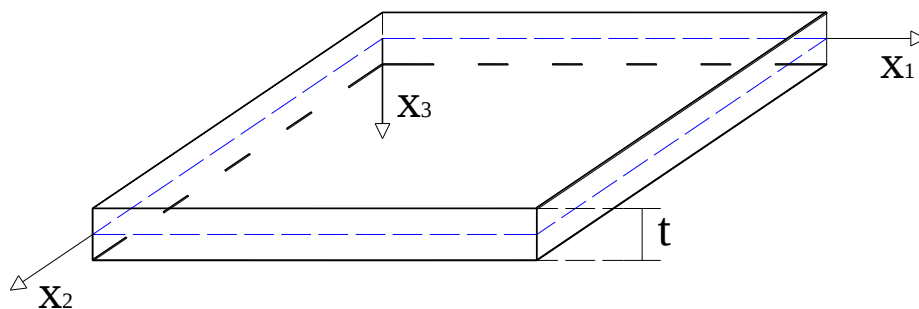


Figura 1. Esquema ilustrativo da placa e definição do sistema de coordenadas

Admitem-se as hipóteses devidas à Kirchhoff, para tratamento de placas delgadas:

- os deslocamentos transversais da placa são pequenos em relação à espessura;
- são nulas as tensões cisalhantes nas faces inferior e superior da placa;
- qualquer reta normal à superfície média indeformada permanece normal e reta após a deformação;
- na lei constitutiva, desprezam-se as tensões normais atuantes em planos paralelos ao plano médio.

Além destas, valem as hipóteses admitidas na teoria da elasticidade linear isotrópica.

A partir da definição geral do tensor de deformações ε_{ij} em termos dos deslocamentos u_i , as componentes nulas de deformação na placa são expressas como segue.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0\end{aligned}\tag{1}$$

Os deslocamentos u_1 e u_2 são lineares ao longo da espessura (x_3), e são obtidos pela integração das equações (1),

$$\begin{aligned}u_1 &= -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ u_2 &= -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{2}$$

sendo definidos em termos do deslocamento transversal, medido na superfície média, $u_3 = w$. Assim, os termos não-nulos do tensor de deformações são escritos (Eq. 3).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}\tag{3}$$

Com base na lei de Hooke generalizada para material isótropo, e admitindo estado plano de tensões, estas podem ser representadas em termos de deslocamentos, como segue.

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[x_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right] \\ \sigma_{22} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[x_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right] \\ \sigma_{12} &= -2Gx_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}\tag{4}$$

Definindo-se um sistema coordenado no plano médio da placa, como na Fig. 1, seja o elemento infinitesimal ilustrado na Fig. 2.

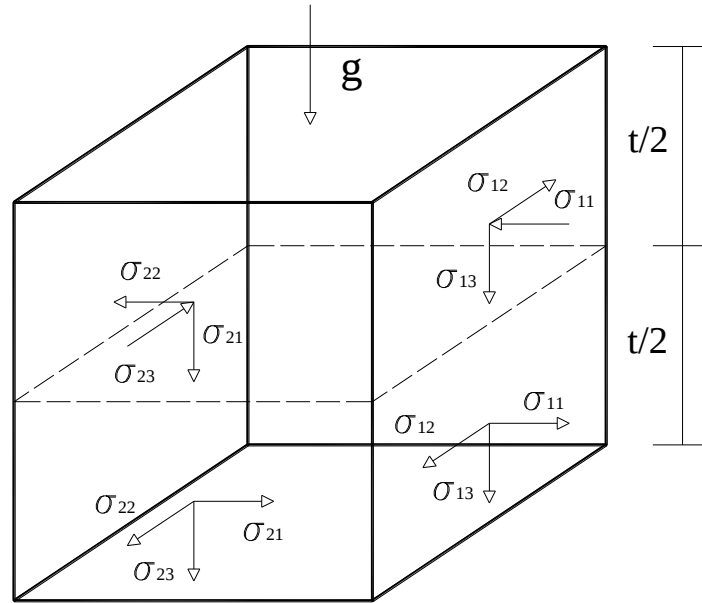


Figura 2. Esquema dos esforços solicitantes em um elemento da placa

A imposição do equilíbrio das forças na direção vertical (x_3), incluindo um possível carregamento distribuído g , leva à expressão

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + b_3 + g \right) dx_3 = 0 \quad (5)$$

que, desprezadas as forças de volume, resulta em:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + g = 0 \quad (6)$$

A expressão acima é escrita em função dos esforços cortantes q_i , que valem

$$q_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{i3} dx_3, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

ou, em deslocamentos, $q_i = -D(w_{,ikk})$. A constante D está associada à rigidez flexional da placa, e depende de propriedades geométricas e de material, como segue.

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (8)$$

As equações de equilíbrio de momentos em relação aos eixos x_1 e x_2 resultam em

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{22}}{\partial x_2} - q_2 &= 0 \\ \frac{\partial m_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{12}}{\partial x_2} - q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

sendo o momento definido em termos das tensões na Eq. (10).

$$m_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad i, j = 1 \dots 2 \quad (10)$$

Por fim, as Eq. (9) podem ser expressas em deslocamentos, como segue.

$$m_{ij} = -D \frac{1-\nu}{2} \left[2w_{,ij} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,kk} \delta_{ij} \right] \quad (11)$$

Como visto nas equações (6) e (9), as representações de equilíbrio da placa foram desenvolvidas em termos de esforços resultantes m_{ij} e q_i . Cabe ressaltar que isso é feito com base na hipótese de que as tensões possuem distribuição linear ao longo da espessura, podendo ser representados os esforços por suas resultantes na superfície média (Fig. 3.3).

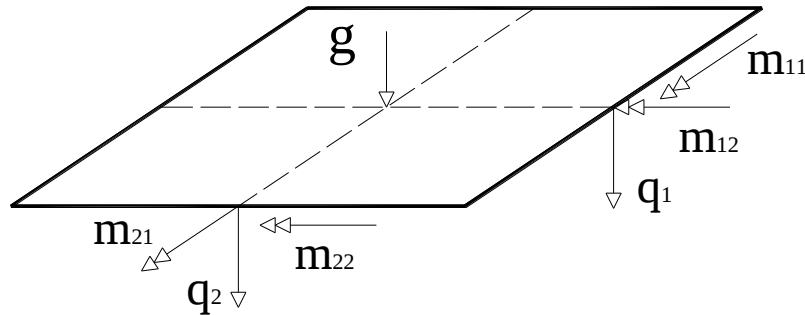


Figura 3. Esquema das resultantes dos esforços

A partir da fórmula de Cauchy, os esforços podem ser escritos sobre o contorno (Eq. 12).

$$\begin{aligned} Q_n &= -D(w_{,kki})\eta_i \\ M_i &= -D \frac{1-\nu}{2} \left[2w_{,ik}\eta_k + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,kk}\eta_i \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Observe-se que o momento na borda é uma grandeza vetorial, representada por suas duas componentes nas direções globais.

Manipulando-se as equações (6) e (9), chega-se à equação de equilíbrio condensada da placa, a seguir.

$$\frac{\partial^2 m_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 m_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \quad (13)$$

De posse da representação das tensões em termos de deslocamentos (4), pode-se reescrever as integrais das expressões dos esforços, originando uma outra forma da equação diferencial governante, em deslocamentos:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{g}{D} \quad (14)$$

Geralmente, na descrição de problemas de placa, é conveniente a adoção de um sistema de coordenadas alternativo $\langle n, s \rangle$, baseado nas direções normal e tangencial ao seu contorno. Com base no conhecimento do problema físico de placas delgadas, têm-se como condições de contorno as seguintes grandezas:

$$w, \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial w}{\partial s} \text{ (essenciais ou de Dirichlet)}$$

$$Q_n, M_n, M_{ns} \text{ (naturais ou de Neumann)}$$

A solução pela teoria de Kirchhoff, onde se desprezam as tensões normais na direção 3, recai na equação diferencial (14), que requer quatro condições de contorno. Logo, duas condições, uma natural e uma essencial, tornam-se redundantes na solução do problema, de forma que a condição essencial $\frac{\partial w}{\partial s}$ é desprezada. Com relação às condições naturais, o momento cruzado M_{ns} é incorporado à força cortante Q_n , dando origem a um novo esforço cortante equivalente, definido pela equação a seguir.

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (15)$$

Os valores de contorno para os tipos usuais de vínculo são os seguintes.

$$w = 0, M_n = \bar{M} \quad (\text{apoio simples})$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{engaste})$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0, V_n = 0 \quad (\text{engaste móvel})$$

$$M_n = 0, V_n = 0 \quad (\text{livre})$$

3 FORMULAÇÃO DO MEC PARA PLACAS DELGADAS

Modelos de elementos de contorno são baseados na formulação integral do problema em estudo, e dependem da existência de soluções fundamentais associadas ao mesmo. A definição do problema fundamental está relacionada a um domínio infinito onde atua uma carga concentrada unitária. No presente caso admite-se uma placa circular, sujeita a uma carga transversal no ponto fonte s , admitido no centro da placa. A solução fundamental consiste na deflexão em um ponto qualquer q na vizinhança do ponto fonte, quando considera-se o raio tendendo ao infinito. Grandezas associadas ao problema fundamental são identificadas pelo sobrescrito $*$.

Em se tratando de um domínio circular, é conveniente escrever o equilíbrio da placa (Eq. 14) em coordenadas polares. O operador bi-harmônico, no sistema polar (r, θ) , é dado a seguir.

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (16)$$

A representação da carga unitária na equação de equilíbrio da placa é feita a partir da função delta de Dirac, sendo o equilíbrio reescrito para o problema fundamental da forma

$$\nabla^4 w^*(s, q) = \frac{\delta(s, q)}{D} \quad (17)$$

sendo a solução desta equação dada a seguir. A obtenção desta pode ser consultada em diversas referências, vide Paiva (1987).

$$w^*(s, q) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \quad (18)$$

A partir da expressão acima pode-se escrever, para o problema fundamental, as outras grandezas envolvidas na solução de placa, como a rotação e os esforços cortante $q_i^*(s, q)$ e fletor $m_{ij}^*(s, q)$, como segue.

$$\frac{\partial w^*(s, q)}{\partial x_i} = \frac{r \ln(r)}{4\pi D} \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (19)$$

$$q_i^*(s, q) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (20)$$

$$m_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ [\nu + \nu \ln(r) + \ln(r)] \delta_{ij} + (1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\} \quad (21)$$

A obtenção da equação integral de um problema linear pode ser feita a partir do teorema da reciprocidade de Betti, procedimento aqui adotado. Para fins de concisão, apresenta-se a formulação integral do problema diretamente, podendo a dedução completa ser vista em Lima Junior (2006). A equação de deslocamentos num ponto fonte S sobre o contorno é dada pela Eq. (22),

$$\begin{aligned}
C(S)w(S) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q)w^*(S, Q) \right) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q)w(Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q)w(Q) \\
& + \int_{\Omega_g} (g(q)w^*(S, q)) d\Omega_g
\end{aligned} \tag{22}$$

na qual a constante $C(S)$ depende do ângulo interno do vértice da placa γ , definida a seguir.

$$C(S) = \frac{\gamma(S)}{2\pi} \tag{23}$$

M_n e V_n representam o momento volvente e a força cortante medidos sobre o contorno, associados a direção n , e R_c é a reação de canto da placa, grandeza auxiliar necessária à manutenção do equilíbrio da placa na teoria de Kirchhoff-Love.

A deflexão em um ponto interno s qualquer da placa pode ser calculada por (24). A partir desta, obtém-se a representação integral dos esforços cortante e fletor, definidos nas equações (25) e (26).

$$\begin{aligned}
w(s) = & \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q)w^*(S, Q) \right) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q)w^*(S, Q) \right) d\Gamma_\varepsilon \\
& - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q)w(Q) \right) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q)w(Q) \right) d\Gamma_\varepsilon \\
& - \sum_{k=1}^{N_v-1} [R_c^*(S, Q)w(Q)]|_k - [R_c^*(S, Q)w(Q)]|_{\Gamma_1} - [R_c^*(S, Q)w(Q)]|_{\Gamma_2} \\
& + \int_{\Omega_g} (g(q)w^*(S, q)w(Q)) d\Omega_g
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
q_j(s) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w_j^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q)w_j^*(s, Q) \right) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left(-M_{nj}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_{nj}^*(s, Q)w(Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_{cj}^*(s, Q)w(Q) \\
& + \int_{\Omega_g} (g(q)w_j^*(s, q)) d\Omega_g
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(s) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q) w_{ij}^*(s, Q) \right) d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma} \left(-M_{nij}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_{nij}^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_{cij}^*(s, Q) w(Q) \\
 & + \int_{\Omega_g} (g(q) w_{ij}^*(s, q)) d\Omega_g
 \end{aligned} \quad (26)$$

As variáveis genéricas X_j^* e X_{ij}^* são escritas de acordo com os esforços cortante e fletor, respectivamente, como mostrado abaixo:

$$X_j^*(s, Q) = -D \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 X^*}{\partial x_k \partial x_k}(s, Q) \right) \quad (27)$$

$$X_{ij}^*(s, Q) = -D \frac{1-\nu}{2} \left[2 \frac{\partial^2 X^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, Q) + \left(\frac{2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2 X^*}{\partial x_k \partial x_k}(s, Q) \delta_{ij} \right] \quad (28)$$

O objetivo principal do MEC é, com base no equacionamento integral, a montagem de um sistema de equações algébricas que permite a determinação direta dos valores de contorno aproximados e, a partir deles, dos demais valores necessários à análise. Naturalmente, são infinitas as equações possíveis de serem escritas, visto que pode-se aplicar a formulação integral a infinitos pontos da fronteira, do domínio ou pontos externos a este. A representação equivalente do contorno, em dimensão finita, é feita com a definição de nós que delimitam os chamados elementos de contorno. Esta parametrização do contorno pode ser exata ou aproximada, dependendo da geometria do domínio em análise e do tipo de parametrização adotada. Além da caracterização geométrica do elemento, deve-se aproximar as variáveis de interesse do problema, com base em funções aproximadoras e nos seus valores nodais em determinados pontos. É comum a utilização de funções polinomiais. Utilizam-se aqui elementos lineares para descrição da geometria e dos campos aproximados sobre os elementos.

A representação integral dos deslocamentos no contorno de uma placa (Eq. 5.19) pode ser escrita de forma discreta como segue:

$$\begin{aligned}
 C(S)w(S) = & \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} -\frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \phi d\Gamma \right) M_n^j + \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} w^*(S, Q) \phi d\Gamma \right) V_n^j \\
 & - \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} -M_n^*(S, Q) \phi d\Gamma \right) \frac{\partial w^j}{\partial n} - \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} V_n^*(S, Q) \phi d\Gamma \right) w^j \\
 & + \sum_{k=1}^{N_v} R_c(Q) w^*(S, Q) - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) + \int_{\Omega_g} (g(q) w^*(S, q)) d\Omega_g
 \end{aligned} \quad (29)$$

sendo N_e o número de elementos em que foi dividido o contorno. A equação acima relaciona os deslocamentos do ponto fonte aos valores de deslocamentos e forças nodais em um

elemento qualquer j . Escrevendo em termos da coordenada adimensional $-1 \leq \xi \leq 1$, com origem no centro do elemento linear, surge o operador jacobiano J , o qual é constante no elemento linear (Eq. 30).

$$\begin{aligned}
 C(S)w(S) = & \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} -\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} \phi d\xi \right) M_n^j + \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} w^*(S, Q) \phi d\xi \right) V_n^j \\
 & - \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} -M_n^*(S, Q) \phi d\xi \right) \frac{\partial w^j}{\partial n} - \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} V_n^*(S, Q) \phi d\xi \right) w^j \\
 & + \sum_{k=1}^{N_v} R_c(Q) w^*(S, Q) - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) + \int_{\Omega_g} (g(q) w^*(S, q)) d\Omega_g
 \end{aligned} \quad (30)$$

Na formulação do MEC, o sistema implícito acima é escrito em função das chamadas matrizes de influência, H e G , definidas pelas integrais destacadas nos parênteses. A avaliação da integral referente à carga de domínio dá origem a um vetor de cargas independentes nas duas direções globais, $\{F_b\}_{2N_p,1}$, sendo N_p o número de nós do contorno.

Após as integrações sobre todos os elementos serem feitas para todos os nós do contorno, chega-se ao sistema matricial,

$$[C]\{w\} + [H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F_b\} \quad (31)$$

onde o vetor $\{U\}_{2N_p,1}$ contém os deslocamentos e rotações normais ao contorno e o vetor $\{P\}_{2N_p,1}$ contém os esforços normais ao contorno. No caso de um ponto localizado sobre um dos cantos da placa, seus valores correspondentes estarão nesses mesmos vetores citados acima, na posição correspondente.

No procedimento de resolução do sistema, as parcelas à esquerda da igualdade são condensadas num único termo $[H] = [C]\{w\} + [H]\{U\}$, dando origem à Eq. (32).

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F_b\} \quad (32)$$

Caso o ponto fonte não pertença ao contorno, tem-se $[H] = [\bar{H}]$. Com a inclusão das condições de contorno, é conveniente rearranjar as matrizes do sistema, de forma que os valores incógnitos estejam no primeiro membro, e os valores prescritos no segundo. Fazendo a troca das colunas das matrizes, a equação (32) pode ser reescrita da forma:

$$[A]\{X\} = [A1]\{\bar{X}\} + \{F_b\} \quad (33)$$

ou seja

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (34)$$

Como visto, cada ponto possui 4 valores incógnitos. Metade destes valores são impostos como condições de contorno, de forma que a solução do sistema demanda a obtenção de $2N_p$ equações. A versatilidade do método permite que sejam quaisquer estas equações. Comumente, escrevem-se, para cada nó da discretização, a equação de deslocamentos (32), e

a primeira derivada desta, que fornece as rotações. Neste trabalho, opta-se por escrever apenas a equação de deslocamentos, e associar dois pontos fonte a cada nó do contorno. É importante o devido posicionamento do segundo ponto fonte, considerando que pontos próximos levam a problemas de mau condicionamento das matrizes, incorrendo em singularidade destas. Uma possibilidade para a escolha do primeiro ponto de colocação é tomá-lo como sendo o próprio nó, ou um nó interno ao elemento correspondente, no caso de elemento descontínuo. O segundo ponto pode ser externo e normal ao primeiro, a uma distância compreendida entre 1% e 100% do tamanho do elemento. A figura a seguir apresenta um esquema ilustrativo.

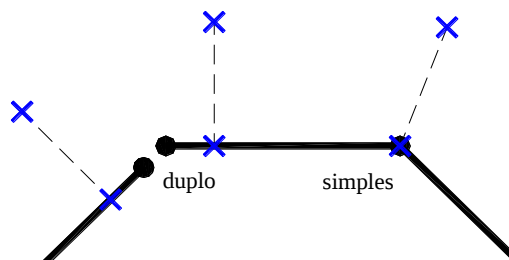


Figura 4. Pontos de colocação nos casos de nó simples e duplo

4 CONCEITOS EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Segundo Sagrilo (2003), a confiabilidade estrutural tem como principal objetivo avaliar a segurança de uma estrutura, que basicamente consiste no cálculo da probabilidade de que um determinado estado limite seja violado. Desta forma, é possível quantificar a probabilidade de que uma estrutura não suporte as solicitações especificadas durante o projeto. Para quantificar os modos de falha de uma estrutura utilizam-se as chamadas equações de estado limite (funções de falha), que são deduzidas a partir dos aspectos físicos do problema em questão. Seja uma função de falha $G(X)$ em que X é um vetor de variáveis aleatórias (v.a.) consideradas na análise. Para cada modo de falha, a respectiva função estabelece uma fronteira entre as regiões de falha Ω_f e de sobrevivência Ω_s da estrutura, em que valores positivos de $G(X)$ representam evento seguro e a condição $G(X) \leq 0$ indica evento de falha. A probabilidade de falha é calculada integrando-se $f_X(x)$ (função conjunta de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias do problema) sobre o domínio de falha, conforme apresentado a seguir.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(x) dx \quad (35)$$

A integral (35) é de difícil avaliação analítica, levando em consideração a complexidade das funções densidade de probabilidade das distribuições estatísticas usuais. Portanto, faz-se necessária a utilização de métodos de análise em confiabilidade estrutural para sua resolução. No presente trabalho serão utilizados o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) e o Método de Simulação de Monte Carlo.

A simulação de Monte Carlo é basicamente uma simulação que envolve a utilização de números aleatórios. O método tem como objetivo produzir N eventos randômicos para serem avaliados na equação de estado limite $G(X)$. Desta forma, eventos que possuem valores

negativos são contabilizados como eventos de falha (N_f). Assim, a probabilidade de falha é estimada pela razão entre o número de eventos de falha e o número total de eventos, ou seja,

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (36)$$

Os resultados gerados pela simulação de Monte Carlo podem ser bastante precisos, a depender do número de cenários que sejam testados. Contudo, para problemas que possuam probabilidades de falha muito baixas, faz-se necessário a realização de um grande número de simulações para atingir respostas adequadas, implicando em alto custo computacional. Considerando-se que cada conjunto de realizações de Monte Carlo corresponde a um diferente conjunto de vetores de números aleatórios gerados, a probabilidade de falha também é, por natureza, uma v.a., cuja média é dada pela Eq. (36). A fim de manter uniformidade na resposta, em diferentes execuções do método, pode-se estimar um número mínimo de cenários a simular, levando em conta a P_f característica do problema e o valor desejado para seu coeficiente de variação δ , como segue.

$$N_{\min} = \frac{1}{\delta^2} \frac{1 - P_f}{P_f} \quad (37)$$

O FORM é um método analítico de confiabilidade baseado na transformação das variáveis aleatórias originais do problema em variáveis aleatórias normais equivalentes, e na linearização da função de falha correspondente. O grande diferencial desse método consiste em sua capacidade de utilizar toda a informação estatística das variáveis aleatórias do problema, podendo-se lidar com distribuições estatísticas quaisquer, inclusive considerando correlação entre variáveis. O problema de confiabilidade é formulado como um problema de otimização não linear com restrição, no qual busca-se o chamado ponto de projeto, definido no espaço transformado das variáveis normais equivalentes (Fig. 5).

Este ponto contém os valores das variáveis aleatórias que mais provavelmente levem à falha da estrutura. Desta definição decorre o conceito de índice de confiabilidade β , que consiste na menor distância entre a origem do espaço transformado e a superfície de falha. Maiores detalhes acerca do método são apresentados em Melchers (1999). Os termos da função de falha $G(\mathbf{X})$ contêm as expressões dos modelos de resistência e de carregamento do problema, podendo ser implicitamente definidos por um modelo numérico qualquer, como é o caso do presente estudo.

No acoplamento com uma rotina confiabilística do tipo FORM, é necessário calcular o valor da função de falha e seus gradientes, os quais são utilizados na estimativa da probabilidade de falha do problema. Considerando-se a natureza implícita de $G(\mathbf{X})$, suas derivadas são calculadas numericamente por diferenças finitas, para cada chamada do modelo mecânico de elementos finitos, conforme Fig. 6.

No caso da simulação de Monte Carlo, o acoplamento é bastante intuitivo, porém custoso, consistindo em uma execução do modelo numérico a cada realização do método.

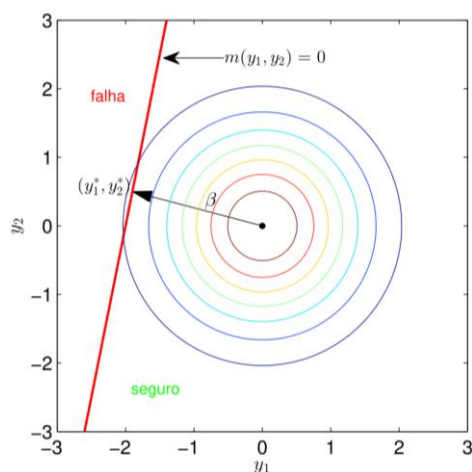


Figura 5. Representação da superfície de falha no espaço reduzido, para duas variáveis aleatórias

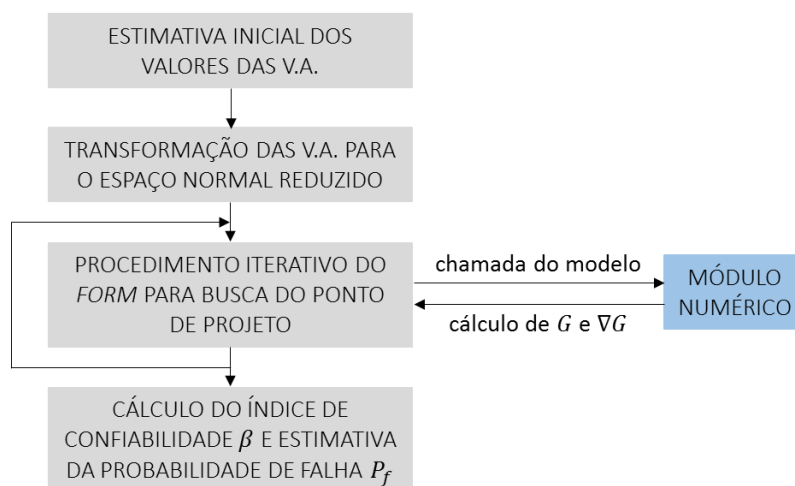


Figura 6. Esquema ilustrativo da estratégia de acoplamento direto via FORM

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentam-se dois exemplos, a fim de validar o modelo mecano-fiabilístico desenvolvido e medir a influência das v.a. escolhidas na resposta dos problemas de placa circular e retangular, sob diferentes condições de contorno.

5.1 Placa Circular Apoiada

Considere-se uma placa circular em aço, simplesmente apoiada, com 2 m de diâmetro e espessura de 6 cm, sob carregamento uniforme de 400 kN/m^2 . O módulo de elasticidade é de 205 GPa e o coeficiente de Poisson nulo. A tensão de escoamento vale 185 MPa.

As soluções analíticas para a deflexão e para o momento fletor na direção radial são apresentadas em Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959). Os resultados obtidos com o uso do programa são comparados com os valores de referência, para o ponto central (Tabela 1).

Tabela 1. Deflexão e momento radial no ponto central (kN, m)

Método	W	M_r
Referência	8.468 x 10 ⁻³	75
Presente Estudo (64 elementos)	8.437 x 10 ⁻³	74.84

A malha utilizada possui 64 elementos, distribuídos em torno da circunferência da placa, e 3 pontos de Gauss são utilizados na integração sobre cada elemento. Pode-se observar que o modelo proposto apresenta bons resultados frente aos valores de referência, ainda que com aproximações lineares para a geometria circular do contorno e para os deslocamentos.

As variáveis aleatórias consideradas são o carregamento externo, a tensão de escoamento σ_y e o módulo de elasticidade, obtidos em Hamilton (2011). Os parâmetros estatísticos (média e desvio padrão) de cada variável aleatória são escritos em termos dos coeficientes *bias* e COV, conforme apresentado na Tab. 2. O valor médio da variável aleatória é obtido multiplicando-se o fator *bias* apresentado por seu valor nominal. Em relação ao desvio padrão, este é obtido multiplicando seu valor médio pelo coeficiente de variação (COV).

Tabela 2. Parâmetros estatísticos das v.a. utilizadas no problema

Variável aleatória	<i>bias</i>	COV	Distribuição
E	1.04	0.05	normal
σ_y	1.03	0.063	lognormal
g	1.05	0.1	normal

Os modos de falha considerados referem-se à deflexão crítica na placa, e à tensão crítica, ambas registradas no ponto central, conforme as funções de falha a seguir.

$$G_1(E, g) = U_{\max}(E, g) - U_{\max}^{\det} \quad (38)$$

$$G_2(E, \sigma_y, g) = \sigma_y - \sigma_{\max}(E, \sigma_y, g) \quad (39)$$

Na primeira função de falha, os dois termos referem-se ao deslocamento calculado pelo modelo numérico proposto. A P_f obtida representa a probabilidade de que o valor determinístico ultrapasse o valor obtido utilizando confiabilidade, sendo este último mais realista, por contemplar algumas incertezas inerentes ao problema. Pretende-se unicamente quantificar a influência da aleatoriedade das variáveis na resposta da simulação. Já a segunda função avalia a probabilidade de que o aço comece a escoar, violando o regime elástico.

Na Tab. 3 apresentam-se os valores de probabilidade de falha obtidos via FORM. Vale destacar que estes foram validados com relação à simulação de Monte Carlo, obtendo-se congruência de resultados. Uma informação importante fornecida pela análise via FORM são os fatores de importância de cada v.a. na probabilidade de falha obtida, calculados a partir dos

cossenos diretores do vetor normal à função de falha no ponto de projeto no espaço reduzido. Os fatores são apresentados em termos percentuais na tabela.

Tabela 3. Resultados da análise via FORM

Funções de Falha	Probabilidade de Falha	Fatores de Importância (%)		
		E	g	σ_y
G_1	$10^{-0,3316}$	19.70	80.30	-
G_2	$10^{-3,5410}$	2.42	60.05	37.53

Nota-se um valor de P_f próximo a 50% para G_1 , valor inadmissível do ponto de vista prático, mas que indica que a resposta confiabilística não difere significativamente do valor determinístico, ao menos para as duas únicas v.a. consideradas. Quanto ao segundo modo de falha, surge uma probabilidade moderada, na ordem de 10^{-4} , sendo regida pelo carregamento, seguida da v.a. tensão de escoamento. O módulo de elasticidade não influenciou na resposta probabilística de forma significativa.

5.2 Série de Placas Quadradas com Diferentes Vinculações

Admita-se inicialmente uma placa quadrada, com 2 m de lado e 6 cm de espessura, sob um carregamento de 450 kN/m^2 . As propriedades do aço são as mesmas do exemplo anterior. O problema é analisado em Bares (1969). Utilizam-se 6 pontos de integração, e diferentes discretizações no contorno. A Figura 7 ilustra o problema, com a vinculação sendo feita por dois lados ortogonais engastados e os outros dois apoiados.

A Tabela a seguir apresenta a validação dos resultados obtidos nos pontos destacados.

Tabela 4. Valores de deflexão e momentos nos pontos especificados (kN, m)

Método	W P1	M_{xx} P1	M_{yy} P1	M_n P2
Bares(1969)	3.642×10^{-6}	37.44	37.44	-108.32
16 elem.	3.654×10^{-6}	37.47	37.47	-115.22
Presente				
Estudo 32 elem.	3.649×10^{-6}	37.46	37.46	-109.74
64 elem.	3.649×10^{-6}	37.46	37.46	-108.72

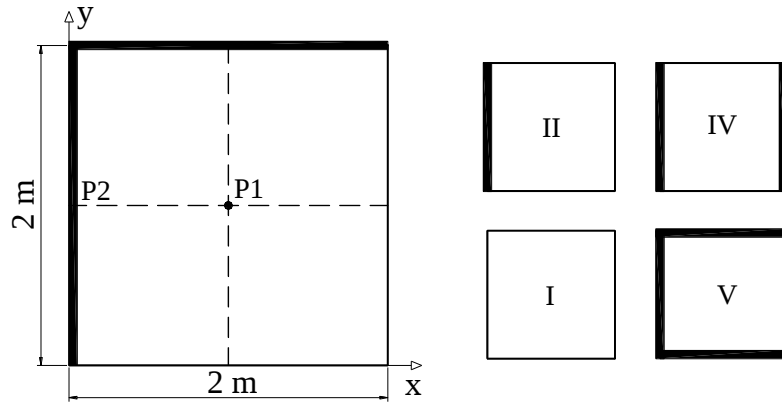


Figura 7. Placa apoiada/engastada sob carregamento uniforme

Na figura 8 apresentam-se alguns diagramas traçados com resultados do programa, representando as distribuições dos campos de deslocamento transversal e momentos sobre a superfície média da placa.

A partir deste problema, define-se uma série de 5 placas, de mesmas propriedades geométricas e mecânicas, variando-se apenas as condições de contorno, conforme Fig. 7. Estas serão identificadas por números de I a V, sendo a placa mostrada inicialmente a de número III. Essa identificação remete ao ordenamento decrescente da flecha máxima da placa.

De posse das v.a. já definidas no exemplo anterior, faz-se a análise da função de falha apresentada a seguir, associada à ocorrência de deslocamento crítico superior ao valor admissível de 1/200 do vão, ou seja, 10 mm.

$$G(E, g) = U_{adm} - U_{max}^{conf} \quad (40)$$

Os valores de probabilidade de falha obtidos via FORM, para cada caso de vinculação são apresentados na Tab. 5, bem como os fatores de importância.

Tabela 5. Resultados da análise via FORM para diferentes vinculações

Caso de Vinculação	Coordenadas do ponto (x, y)	Udet (m)	Probabilidade de Falha	Fatores de Importância (%)	
				E	g
I	(1, 1)	7.049×10^{-3}	$10^{-3.305}$	56.18	43.82
II	(1.2, 2)	4.921×10^{-3}	$10^{-4.9062}$	26.19	73.81
III	(1.2, 0.8)	3.763×10^{-3}	$10^{-5.9453}$	13.95	86.05
IV	(1, 1)	3.325×10^{-3}	$10^{-6.6083}$	44.89	55.10
V	(1, 1)	2.194×10^{-3}	$10^{-8.4925}$	38.92	61.08

Nota-se que o nível de segurança, em termos de flecha admissível, aumenta à medida que as condições de vinculação proporcionam uma maior rigidez à estrutura. Os fatores de importância apresentam-se oscilantes nos casos analisados, não sendo possível definir um padrão de comportamento para o modo de falha, em se tratando de problemas com condições de contorno diferentes.

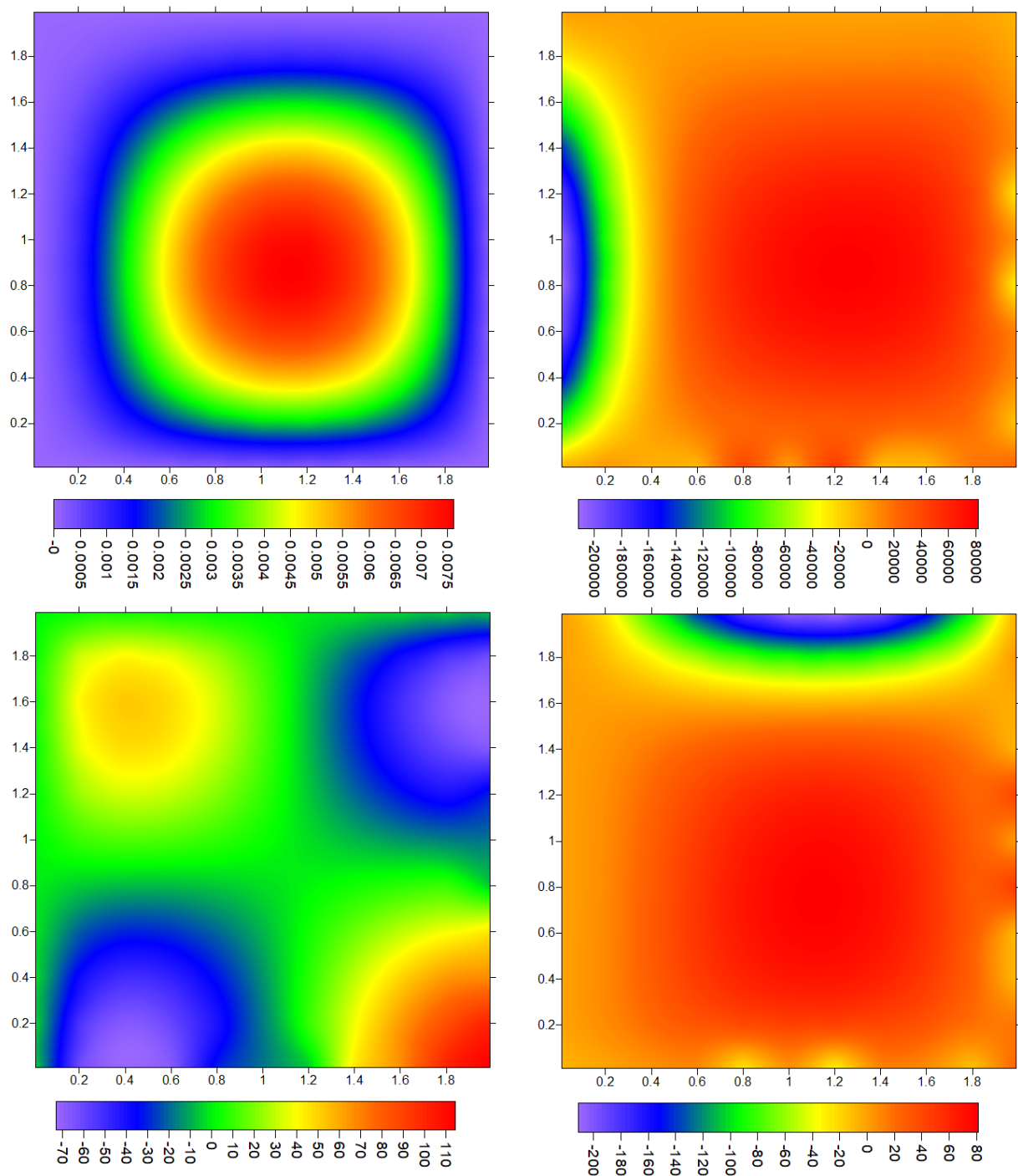


Figura 8. Deflexão (m); Momento M_{xx} (kN.m); Momento M_{xy} (kN.m); Momento M_{yy} (kN.m)

6 CONCLUSÃO

Através dos exemplos analisados, foi possível validar a implementação do modelo de elementos de contorno implementado, para análise de placas finas elástico-lineares. Para fins de simulação de uma gama maior de problemas, o modelo mecânico precisa ser aprimorado, incluindo leis constitutivas não lineares que representem aço e concreto, por exemplo.

O modelo mecano-fiabilístico desenvolvido foi validado, e permitiu quantificar a influência das incertezas associadas às variáveis de projeto na resposta dos dois problemas apresentados. Os resultados apresentados são apenas indicativos dos modos de falha investigados, estando associados aos valores das v.a. adotadas. Metodologias probabilísticas se mostram como uma poderosa ferramenta no processo de tomada de decisão do analista estrutural.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – e ao Centro de Pesquisas da PETROBRAS pela suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- Altiero, N.J. & Sikarskie, D.L., A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Computer & Structures*, 9, 163-168, 1978.
- Andrade, R.C., Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis às Placas Espessas Pelas Teorias de Reissner e Mindlin e Suas Relações com a Teoria Clássica para uso no Método dos Elementos de Contorno. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Campinas, 2001.
- Bares, R., *Tables Pour le Calcul des Dalles et des Parois*. Ed. Dunod, Paris, 1969.
- Bezine G.P., A mixed boundary integral-finite-element approach to plate vibration problems. *Mechanics research communications*, 7 (3), 141-150, 1980.
- Bezine, G.P. & Gambi, D.A., A new integral equation formulation for plate bending problems. In: *Recent advances in boundary element methods*, Brebbia, C.A. ed., Pentech Press, 1978.
- Bézine, G.P., Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions, *Mech. Res. Comm.*, 5 (4), 197-206, 1978.
- Bezine, G.P., A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.17, p.1647-1657, 1981.
- Brebbia, C. A., Weighted Residual Classification of Approximate Methods. *Applied Mathematical Modelling*, 2 (3), 1978.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F & Wrobel, L.C. *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*, Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
- Brebbia, C.A., *The Boundary element method for engineers*. Pentech Press, London, 1978.
- Chaves, E.W.V., Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno. Dissertação de mestrado, EESC-USP, 1997.
- Fernandes, G.R. & Venturini, W.S., Stiffened plate bending analysis by boundary element method. *Computational Mechanics*, 28, p. 275-281, 2002.
- Fernandes, G.R., Chaves E. W.V. & Venturini, W.S., Plate bending boundary element formulation considering variable thickness. *Engineering Analysis with boundary elements*, v. 23, 405-418, 1999.
- Fernandes, G.R., O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

- Fredholm, I., Sur une Classe d'equations fonctionelles. *Acta Math.*, v.27, p.365-390, 1903.
- Hamilton, S.R. Performance-based fire engineering for steel framed structures : a probabilistic methodology. Stanford University: Tese (Doutorado), 2011.
- Hansen, E.B., Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems. *J. of Elasticity*, v.6, n.1, p.39-56, 1976
- Jaswon, M.A., Maiti, M.& Symm, G.T., Numerical biharmonic analysis and some applications. *Int. J. Solids & structures*, 3, 309-332, 1967.
- Katsikadelis, J. T. & Armenakas, A. E., Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. *J. of Applied Mechanics*, ASCE, v.110, p.1085-1104, 1984.
- Kirchhoff, G. Über das Gleichgewicht and die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 40, p. 51-88, 1850.
- Lachat, J.C., A further development of the boundary integral technique for elastostatics. PhD Thesis, Southampton University, Southampton, 1975.
- Lemaire, M.; Chateaneuf, A.; Mitteau, J-C. Structural reliability. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013.
- Lima Junior, E.T. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de cascas abatidas. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.
- Love, A.E.H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells, *Philosophical trans. of the Royal Society (London)*, n. 17, p. 491–549, 1888.
- Melchers, R. E. Structural reliability analysis and prediction. New York: John Wiley, 1999.
- Paiva, J.B., Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura. São Carlos. 195p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1987.
- Sagrilo, L. V. S. Confiabilidade Estrutural: notas de aula. Rio de Janeiro: Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia, 2003.
- Stern, M.A., A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems, *Int. J. Solids Structures*, 15, 769-782, 1979.
- Timoshenko S. & Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.
- Tottenham, H., The Boundary Element Method for Plates and Shells. In: *Developments in Boundary Element Methods – 1*, Banerjee, P. K. & Butterfield, R., eds., Applied Science, London, 1979.
- Van Der Weeën, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model, In: *Boundary element methods in engineering*, Brebbia, C.A., Springer-Verlag, 1982.
- Venturini, W.S.; Paiva, J.B. Plate bending analysis by the boundary element method considering zoned thickness domain. *Software for Engineering Workstations*, v.4, n.4, p.183-185, Oct. 1988.
- Wu, B. C. & Altiero, N. J., A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Computers & Structures*, v.10, p.107-117, 1979.