



ANÁLISE CONFIABILÍSTICA DE DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS REFORÇADOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luiz Carlos Lima Vêras

Thiago Barbosa da Silva

Eduardo Toledo Lima Junior

luiz.veras@ctec.ufal.br

thiago.barbosa@lccv.ufal.br

limajunior@lccv.ufal.br

Laboratório de Computação Científica e Visualização, Universidade Federal de Alagoas

Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceió, Alagoas, Brasil

Valério da Silva Almeida

valerio.almeida@usp.br

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

Av. Prof. Almeida Prado, n. 83, Cid. Universitária, 05508-900, São Paulo, São Paulo, Brasil

Resumo. A busca por soluções em problemas de engenharia estrutural avançou significativamente com o auxílio das técnicas numéricas desenvolvidas nas últimas décadas, a exemplo do Método dos Elementos Finitos (MEF), largamente empregado em aplicações diversas. Na análise de materiais heterogêneos, a mescla de diferentes tipos de elementos - planos e lineares, p. ex. - pode ser utilizada para garantir uma melhor aproximação da constituição macroscópica, ou até mesoscópica, de algum produto considerando-se a contribuição das diversas fases. Assim, o MEF se mostra adequado à análise de meios enrijecidos, o que remete à materiais cimentícios reforçados. Já a teoria da confiabilidade contribui com o entendimento da performance estrutural, quantificando a influência da aleatoriedade das variáveis de projeto, permitindo uma análise mais robusta dos requisitos de segurança. Propõe-se uma análise confiabilística de domínios reforçados, em estado plano de tensões, e regime elástico linear. A matriz é discretizada em elementos finitos Q8 ou T3, e os reforços como elementos de treliça, admitindo-se aderência perfeita. Apresentam-se análises de rigidez em vigas de concreto armado e reforçadas com fibras curtas, a fim de validar e ilustrar a metodologia proposta.

Palavras-chave: Confiabilidade Estrutural, MEF, Concreto reforçado com fibras

1 INTRODUÇÃO

São diversas as aplicações em engenharia de estruturas que envolvem domínios enrijecidos, formados por um material base, ocupando a maior parte do domínio, e um ou mais materiais de reforço, em menor fração volumétrica. A ideia é que a associação dos componentes confira ao elemento estrutural um desempenho superior ao apresentado pelas fases, isoladamente. O concreto armado é um dos exemplos mais comuns de compósito, largamente utilizado na construção civil, que combina o baixo custo do concreto e sua resistência à compressão, com a ductilidade e a resistência à tração do aço.

Desde quando Clough (1960) utilizou pela primeira vez o termo *elemento finito* para o fim que se tem hoje, diversas foram as contribuições registradas durante as décadas seguintes que proporcionaram a evolução do Método dos Elementos Finitos (MEF). Essa evolução está relacionada também ao advento do computador, que possibilitou o estabelecimento do MEF como uma ferramenta indispensável na solução dos mais diversos problemas de engenharia. Até meados dos anos 1990, cerca de 40.000 trabalhos, entre artigos e livros, foram publicados sobre elementos finitos e suas aplicações (Cook, 1995). Atualmente, é possível encontrar, em uma simples busca na internet, mais de 25 milhões de resultados relacionados a "*finite element method*".

Em engenharia estrutural, modelos bi e tridimensionais de estruturas são largamente utilizados, dando origem a inúmeras formulações do MEF. Particularmente, nos casos bidimensionais, em que estes são simplificações de problemas tridimensionais, formulações mais robustas são necessárias a fim de garantir maior fidelidade ao fenômeno físico em estudo. Com este intuito, a mescla de diferentes tipos de elementos (planos e lineares) pode ser utilizada para garantir uma melhor aproximação da constituição macroscópica, ou até mesoscópica, de algum produto heterogêneo. Um exemplo desta aplicação é o estudo de materiais compósitos, no qual cada material constituinte pode ser representado por um tipo de elemento finito. Em domínios planos reforçados, a modelagem da matriz pode ser feita com elementos triangulares ou quadrilaterais, enquanto os reforços são aproximados por elementos de barra, retilíneos ou curvos.

Recentemente, com os avanços experimentais nos estudos de Concreto Reforçado com Fibras (CRF), torna-se necessário conceber modelos numéricos capazes de contribuir com o estudo deste material. A adição de fibras ao concreto armado possibilita reduzir ou até substituir a armadura convencional. Esse é um dos principais motivos para o crescente desenvolvimento das pesquisas na área. Segundo Figueiredo (2000), a adição de fibras de aço ao concreto faz com que este material passe a apresentar um comportamento pseudo-dúctil, ou seja, continue apresentando uma resistência residual a esforços nele aplicados mesmo após o início da fissuração. Isto ocorre devido à capacidade das fibras de absorver parte das forças trativas responsáveis pela abertura de microfissuras, atenuando este processo.

Ngo & Scordelis (1967) são responsáveis pelo primeiro registro de publicação sobre análise de concreto armado via MEF. Os autores utilizaram elementos finitos triangulares planos para representar o concreto e a armadura, cuja aderência foi avaliada a partir de elementos de interface. Phillips & Zienkiewicz (1976) desenvolveram um elemento linear representando uma barra embutida em um elemento isoparamétrico quadrilateral (concreto), de modo que a direção deste reforço fosse alinhada com um dos eixos locais do elemento plano. Ou seja, o elemento de aço é considerado como um componente axial embutido no elemento isoparamétrico e seus deslocamentos são consistentes com os do elemento de concreto.

No trabalho de Elwi & Hrudey (1989), é apresentada uma formulação para um elemento curvo (reforço) embutido em elemento isoparamétrico de oito nós (Q8). O reforço é descrito em coordenadas globais, o que possibilita independência da discretização do domínio. Real (2000) apresenta um modelo para análise probabilística via Monte Carlo de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos. Este modelo mostra como as incertezas presentes nos principais parâmetros do comportamento de vigas e pilares afetam a variabilidade da resposta da estrutura, sob um determinado carregamento. O concreto é modelado através de elementos Q8. A armadura é representada através do modelo incorporado, proposto por Elwi & Hrudey (1989).

Bitencourt Júnior (2009) desenvolveu uma plataforma computacional que possibilita a análise de concreto armado reforçado com fibras de aço. Para a representação do concreto, foram implementados elementos finitos planos isoparamétricos quadrilaterais e triangulares e, para as armaduras, elementos finitos unidimensionais isoparamétricos com aproximações linear e quadrática representados por meio do modelo discreto. Neste modelo, há uma dependência da malha de elementos finitos para posicionar os elementos de armadura, uma vez que estes devem ser posicionados nas arestas dos elementos de concreto. As armaduras têm seu comportamento descrito através de um modelo elastoplástico bilinear. Para o comportamento do concreto, foi considerado um modelo elástico não-linear com comportamento isotrópico até o limite de ruptura, acoplado a um modelo de amolecimento linear na tração.

Bitencourt Júnior (2014) apresenta uma estratégia numérica desenvolvida usando o método dos elementos finitos para simular o processo de falha de compósitos cimentícios reforçados com fibras de aço. Um novo esquema de acoplamento para malhas de elementos finitos não-conformes foi desenvolvido para acoplar as malhas geradas independentemente, da matriz cimentícia e de uma nuvem de fibras de aço, baseado na utilização de novos elementos finitos desenvolvidos, denominados elementos finitos de acoplamento. As fibras de aço são modeladas usando elementos finitos isoparamétricos lineares com modelo material elastoplástico. As fibras são posicionadas usando uma distribuição randômica uniforme isotrópica, considerando o efeito parede.

Teorias baseadas em análise probabilística, como a Confiabilidade Estrutural, se propõem a incrementar a qualidade de métodos de projeto e análise de estruturas, a partir da quantificação e tratamento das incertezas inerentes ao problema em estudo. Como produto desse tipo de análise, pode-se obter uma estimativa da probabilidade de falha da estrutura. Vale notar que o conceito de probabilidade de falha não está relacionado apenas à ocorrência de eventos extremos, de ruína estrutural, mas também à violação de qualquer requisito ao qual espera-se que a estrutura satisfaça, usualmente definidos pelos Estados Limites de Serviço da estrutura. Como exemplos, pode-se citar deslocamentos e tensões inadmissíveis, e abertura excessiva de fissuras. Dentre os métodos usuais em confiabilidade de estruturas, destacam-se o método de simulação de Monte Carlo e o método semi-analítico FORM (*First Order Reliability Method*). Ambos são apresentados em Melchers (1999).

Em problemas complexos de engenharia, cuja solução seja fornecida por um modelo computacional, existe a necessidade do estudo de técnicas de acoplamento entre rotinas de confiabilidade e modelos numéricos. De acordo com Lemaire (2013), o acoplamento é concebido para que o modelo confiabilístico governe o modelo mecânico, de forma que este último recebe, em cada iteração, um conjunto de valores relacionados às variáveis aleatórias envolvidas, fornecido pelo módulo de confiabilidade.

Paliga (2008) implementou um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos e na técnica de simulação de Monte Carlo, para a análise de estruturas de concreto armado reforçadas externamente. Foi feita uma análise probabilística com o intuito de avaliar a segurança de vigas de concreto armado em flexão, recuperadas de um dano sofrido através da colagem de lâminas de Polímero Reforçado com Fibras de Carbono (PRFC) em sua face tracionada. Nogueira (2010) apresentou avanços na modelagem mecânica de estruturas de barras em concreto armado, bem como no acoplamento entre modelos de confiabilidade e otimização para obtenção de dimensões ótimas, respeitando os requisitos de segurança especificados em projeto. Em relação à modelagem mecânica via MEF, além do comportamento não-linear físico e geométrico, foi considerada a contribuição dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento. Foram utilizados elementos finitos de pórtico plano, a partir da teoria de Timoshenko. Quanto ao acoplamento de confiabilidade e otimização, foram exploradas melhorias no Método de Superfície de Resposta e no acoplamento direto via Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM).

No presente trabalho, propõe-se a análise de domínios bidimensionais reforçados com barras ou fibras curtas, no contexto da Confiabilidade Estrutural, a fim de quantificar a influência da aleatoriedade de algumas variáveis de projeto na resposta da estrutura. Um modelo mecânico simples, com materiais elástico-lineares e incorporação de reforço via modelo discreto, é acoplado ao método FORM. Conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO) são utilizados no desenvolvimento, visando flexibilidade no reuso de códigos, bem como técnicas de processamento paralelo, a fim de reduzir o custo computacional.

2 MEF APLICADO A DOMÍNIOS ELÁSTICOS LINEARES E PLANOS

Nesta seção abordam-se as formulação dos elementos finitos utilizados na implementação das rotinas deste trabalho. Com isso, pretende-se mostrar os principais condicionantes na montagem da matriz de rigidez global K , sendo esta composta pelas contribuições das matrizes de rigidez dos elementos planos (K_c^e) e dos elementos de reforço (K_s^e).

2.1 Formulação do MEF para Treliça

Na Figura 1 apresenta-se um elemento finito de treliça plana com dois nós, o qual representa os reforços inseridos no domínio. Cada nó possui dois graus de liberdade, e o vetor de deslocamentos $\mathbf{D}^e$ para um elemento e contém as componentes de deslocamento nodal D_{ij}^e , representadas nas coordenadas globais, conforme indicado na Eq. (1).

$$\mathbf{D}^e = [D_{1X}^e \quad D_{1Y}^e \quad D_{2X}^e \quad D_{2Y}^e]^T \quad (1)$$

O elemento finito de treliça permite apenas deformação por alongamento, na direção de seu eixo. Assim, sua matriz de rigidez local e vetor de forças internas são montados considerando apenas as componentes de deslocamentos nodais na direção do eixo x (coordenada local), como mostrado na Fig. 1. Dessa forma, o vetor de deslocamentos $\mathbf{d}_x^e = [d_{1x}^e \quad d_{2x}^e]^T = \mathbf{T}^e \mathbf{D}^e$, em coordenadas locais, é obtido com auxílio da matriz de rotação $\mathbf{T}^e$.

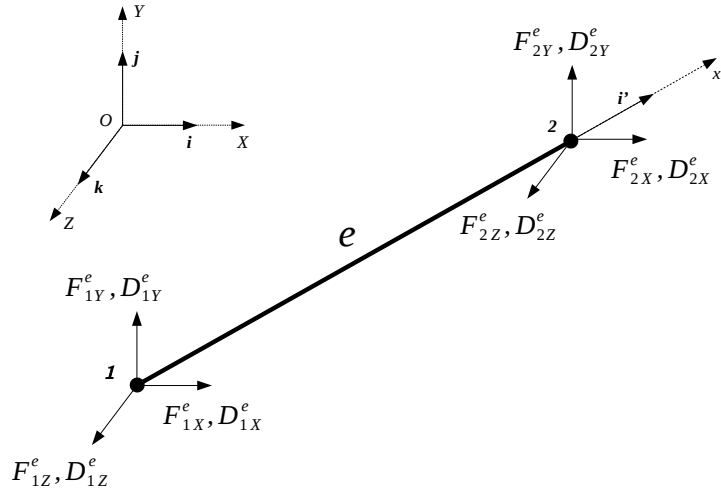


Figura 1: Elemento de treliça 2D no sistema de coordenadas globais

De posse dos valores nodais, calcula-se o vetor de deslocamentos no elemento, a partir da Eq. (2), no qual as funções de forma N^e são definidas na Eq. (3), em que x_i^e são as coordenadas dos nós inicial e final do elemento, e L^e o seu comprimento.

$$u_x^e = N^e d_x^e \quad (2)$$

$$N^e = [N_1^e \quad N_2^e] = \frac{1}{L^e} [x_2^e - x \quad x - x_1^e] \quad (3)$$

Além disso, as deformações na direção da barra são dadas pela Eq. (4), em que a matriz B^e , que relaciona deformação e deslocamentos, é mostrada na Eq. (5).

$$\epsilon_x^e = B^e d_x^e \quad (4)$$

$$B^e = \left[\frac{\partial N_1^e}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \right] = \frac{1}{L^e} [-1 \quad 1] \quad (5)$$

O vetor de forças nodais, em coordenadas locais e globais, pode ser obtido a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), sendo o trabalho interno virtual de um elemento de treliça escrito da forma

$$\delta W_{int}^e = \int_{\Omega^e} \delta \epsilon_x^{eT} \sigma_x^e d\Omega^e \quad (6)$$

em que $\delta \epsilon_x^{eT} = B^e \delta d_x^e$ é deformação virtual devido a um campo de deslocamentos virtual arbitrário, e σ_x^e é a componente de tensão normal no respectivo elemento. A partir das coordenadas locais, e considerando constante a área da seção transversal (A^e), a Eq. (6) é reescrita na forma da Eq. (7).

$$\delta W_{int}^e = A^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \delta \epsilon_x^{eT} \sigma_x^e dx^e = A^e L^e B^{eT} \sigma_x^e \delta d_x^e \quad (7)$$

Da última equação, extrai-se o vetor de forças internas do elemento e , definido na Eq. (8).

$$\mathbf{f}_{int}^e = \mathbf{A}^e \mathbf{L}^e \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}_x^e \quad (8)$$

O mesmo vetor pode ser expresso em termos de coordenadas globais, multiplicando-se pela matriz de transformação, da forma $\mathbf{F}_{int}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{f}_{int}^e$.

A partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total, em que se define o funcional $\Pi(d_{x_1}^e, d_{x_2}^e)$, e gera-se o sistema de equações algébricas fazendo $\frac{\partial \Pi}{\partial d_{x_i}^e} = 0$, com $i = 1, 2$, pode-se escrever a matriz de rigidez local, como segue.

$$\mathbf{k}_s^e = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e}{\partial \mathbf{d}_{x_i}^e} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e}{\partial \sigma_x^e} \cdot \frac{\partial \sigma_x^e}{\partial \epsilon_x^e} \cdot \frac{\partial \epsilon_x^e}{\partial \mathbf{d}_x^e} \quad (9)$$

Sabe-se que os termos na multiplicação da Eq. (9) são definidos como:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e}{\partial \sigma_x^e} = \mathbf{A}^e \mathbf{L}^e \mathbf{B}^{eT} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e}{\partial \sigma_x^e} = E^e \quad (10b)$$

$$\frac{\partial \epsilon_x^e}{\partial \mathbf{d}_x^e} = \mathbf{B}^e \quad (10c)$$

Na Eq. (10b), E^e é módulo de elasticidade linear do elemento. Assim, apresenta-se na Eq. (11) a matriz de rigidez em termos de coordenadas globais ($\mathbf{K}_s^e$) de um elemento de treliça.

$$\mathbf{K}_s^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{k}_s^e \mathbf{T}^e \quad (11)$$

2.2 Formulação do MEF para Problemas de Estado Plano

São dois os principais tipos de problemas de elasticidade plana: estado plano de tensão (EPT) e estado plano de deformação (EPD). Como o presente trabalho trata de modelagem de vigas à flexão, o estado plano de tensão mostra-se mais apropriado, aproximando esses elementos estruturais como uma chapa, submetidas a cargas atuantes no seu plano médio.

Assim como na seção anterior, a matriz de rigidez de um elemento finito plano será deduzida a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. O Funcional Π que representa a Energia Potencial Total de um sólido qualquer, é obtido pela soma das parcelas associadas às forças externas e aos esforços internos, dadas pelo termo positivo e pelos dois negativos que se seguem, respectivamente, na Eq. (12), respectivamente.

$$\Pi = \frac{h}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0) d\Omega - h \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (12)$$

Nesta, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}_0$ são a tensão e a tensão inicial, respectivamente, e $\boldsymbol{\epsilon}$ é a deformação do sólido de espessura h . Ainda, $\bar{\mathbf{b}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são as forças de volume e de superfície prescritas. Ressalta-se o fato de que o funcional é escrito em função do campo de deslocamentos $\mathbf{u}$.

Os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento são obtidos por interpolação dos seus deslocamentos nodais $\mathbf{u}^e$. Essa aproximação deve implicar em componentes de deformação $\boldsymbol{\epsilon}$,

com continuidade C^0 no domínio do elemento (Ω^e), permitindo a integração da matriz de rigidez e, desse modo, chegando-se ao sistema de equações algébricas de equilíbrio,

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N} \mathbf{d}^e \quad (13)$$

sendo a matriz $\mathbf{N}$ composta pela funções de interpolação. Cada uma destas funções tem a propriedade de ter valor unitário em um ponto nodal e ter valores nulos nos demais. O campo de deformações no interior do elemento finito é obtido pela Eq. (14).

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e \quad (14)$$

Para um elemento qualquer, a matriz $\mathbf{B}$ é determinada aplicando-se o operador diferencial $\mathbf{L}$ (Eq. (15)) à matriz $\mathbf{N}$, como é mostrado na Eq. (16).

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (16)$$

A partir da lei de Hooke generalizada, considerando-se as simplificações impostas pelo EPT, além de adotar um material isótropo, a matriz constitutiva $\mathbf{D}$ apresentada na Eq. (17), relaciona as tensões no interior do elemento com as deformações, como na Eq. (18).

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (18)$$

Substituindo as Eqs. (13), (14) e (18) na Eq. (12), o funcional de energia potencial total, associado a um elemento, é reescrito como:

$$\Pi^e = \frac{h}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{B}^{eT} (\mathbf{D} \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e + \boldsymbol{\sigma}_0) d\Omega^e - h \int_{\Omega^e} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega^e - \int_{\Gamma^e} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e \quad (19)$$

em que Ω^e é a superfície e Γ^e é o contorno, ambos do elemento finito.

A minimização de um incremento da energia potencial total permite definir o campo de deslocamentos associado a uma configuração de equilíbrio estático do corpo, resultando em

$$h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega^e \mathbf{d}^e = h \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e - h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega^e \quad (20)$$

na qual definem-se os seguinte termos:

$$\mathbf{K}_c^e = h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega^e \quad (21a)$$

$$\mathbf{f}_b^e = h \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega^e \quad (21b)$$

$$\mathbf{f}_t^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e \quad (21c)$$

$$\mathbf{f}_{\sigma_0}^e = -h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega^e \quad (21d)$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_t^e + \mathbf{f}_{\sigma_0}^e \quad (21e)$$

em que $\mathbf{f}^e$ é o vetor de forças nodais composto pelas parcelas de de forças equivalentes às forças de corpo ($\mathbf{f}_b^e$), às forças de contorno ($\mathbf{f}_t^e$), e às tensões iniciais ($\mathbf{f}_{\sigma_0}^e$). O termo $\mathbf{K}_c^e$ é a matriz de rigidez simétrica de um elemento finito. Pode-se então reescrever a Eq. (20) como segue.

$$\mathbf{K}_c^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (22)$$

Nas aplicações deste trabalho, são utilizados os elementos planos triangular T3 (Fig. 2a) e quadrilateral Q8 (Fig. 2b). O primeiro possui 3 nós, com aproximação linear em deslocamentos, e o segundo possui 8 nós, com aproximação quadrática em deslocamentos. Ambos possuem dois graus de liberdade translacionais em cada nó, e suas funções de interpolação são apresentadas na Tabela 1.

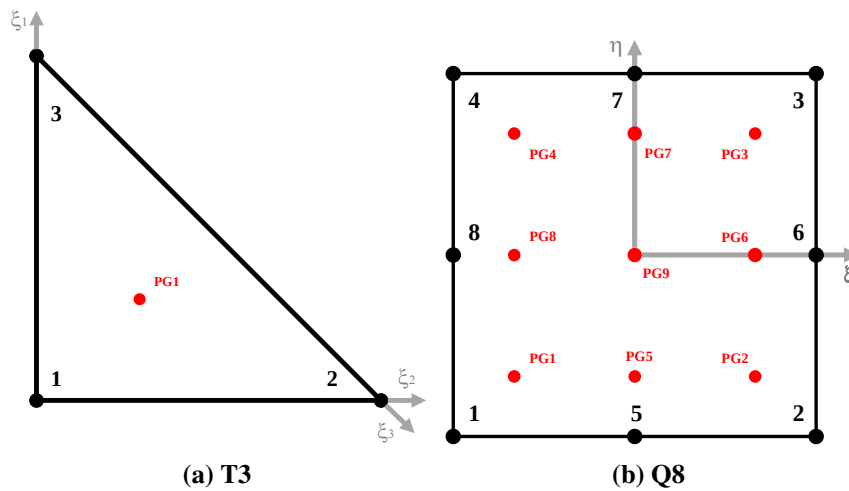


Figura 2: Elementos finitos isoparamétricos utilizados

2.3 Formulação Acoplada para Domínios Reforçados

O modelo utilizado neste trabalho é o modelo discreto, descrito por Bitencourt Júnior (2009) como o método no qual as barras de reforço são modeladas como elementos de treliça, individuais, ligados aos nós dos elementos que representam a matriz. Assim, os elementos de barra são dispostos, obrigatoriamente, nas arestas dos elementos planos. Este método é de fácil implementação, porém apresenta limitação quanto à sua dependência entre as malhas de elementos finitos.

Tabela 1: Funções de formas para elemento planos isoparamétricos

T3	$N_1 = \xi_1$	$N_2 = \xi_2$
	$N_3 = \xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$	
Q8	$N_1 = -\frac{1}{4}(\eta - 1)(\xi - 1)(\eta + \xi + 1)$	$N_2 = \frac{1}{4}(\eta - 1)(\xi + 1)(\eta - \xi + 1)$
	$N_3 = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\xi + 1)(\eta + \xi - 1)$	$N_4 = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\xi - 1)(\xi - \eta + 1)$
	$N_5 = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta - 1)$	$N_6 = -\frac{1}{2}(\eta^2 - 1)(\xi + 1)$
	$N_7 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta + 1)$	$N_8 = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1)(\xi - 1)$

A solução do problema acoplado é obtida adicionando-se as contribuições de rigidez e de forças nodais internas e externas, advindas dos elementos uni e bidimensionais, considerando-se a correspondência entre graus de liberdade e a correta incidência cinemática dos termos, vide Eq. (23).

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (23)$$

3 CONCEITOS EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Segundo Sagrilo (2003), a confiabilidade estrutural tem como principal objetivo avaliar a segurança de uma estrutura, a partir do cálculo da probabilidade de que um estado limite desta estrutura seja violado. Assim, é possível quantificar a probabilidade de que uma estrutura não suporte as solicitações especificadas durante o projeto. Para quantificar os modos de falha de uma estrutura utilizam-se as chamadas equações de estado limite (funções de falha), que são deduzidas a partir dos aspectos físicos do problema em análise. Seja uma função de falha denominada $G(\mathbf{X})$, em que $\mathbf{X}$ é um vetor de variáveis aleatórias (v.a.) consideradas na análise. Para cada modo de falha de uma estrutura a respectiva função estabelece uma fronteira entre as regiões de falha Ω_f e sobrevivência Ω_s da estrutura, onde valores positivos de $G(\mathbf{X})$ representam evento seguro e a condição $G(\mathbf{X}) \leq 0$ indica evento de falha. A probabilidade de falha é calculada integrando-se a função conjunta de densidade de probabilidade das v.a. do problema sobre o domínio de falha, conforme apresentado a seguir.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (24)$$

A integral n-dimensional supracitada é de difícil avaliação analítica, considerando-se a complexidade das funções densidade de probabilidade das distribuições estatísticas usuais. Sendo assim, faz-se necessário a utilização de métodos de análise em confiabilidade estrutural para sua resolução. No presente trabalho será utilizado o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), uma alternativa à simulação de Monte Carlo.

De acordo com Beck (2014), a simulação de Monte Carlo é basicamente uma simulação que envolve a utilização de números aleatórios. O método tem como objetivo produzir N eventos randômicos para serem avaliados na equação de estado limite $G(\mathbf{X})$. Desta forma, eventos

que possuem valores negativos são contabilizados como eventos de falha (N_f). Assim, a probabilidade de falha é estimada pela razão entre o número de eventos de falha e o número total de eventos conforme Eq. (25).

$$P_f = \frac{N_f}{N}. \quad (25)$$

Os resultados gerados pela simulação de Monte Carlo podem ser bastante precisos, a depender do número de cenários que sejam testados. Contudo, para problemas que possuam probabilidades de falha muito baixas, faz-se necessário a realização de um grande número de simulações para atingir respostas adequadas, implicando em alto custo computacional.

O FORM é um método analítico de confiabilidade baseado na transformação das variáveis aleatórias originais em variáveis aleatórias normais equivalentes, e na linearização da função de falha do problema. O grande diferencial desse método consiste em sua capacidade de utilizar toda a informação estatística das variáveis aleatórias do problema, podendo-se lidar com distribuições estatísticas quaisquer, inclusive considerando correlação entre variáveis. O problema de confiabilidade é formulado como um problema de otimização não linear com restrição, no qual busca-se o chamado ponto de projeto, definido no espaço transformado das variáveis normais equivalentes (Fig.3).

Este ponto contém os valores das variáveis aleatórias que mais provavelmente levem à falha da estrutura. Desta definição decorre o conceito de índice de confiabilidade (β), que consiste na menor distância entre a origem do espaço transformado e a superfície de falha. A busca pela solução do problema de otimização posto é feita de forma iterativa, com base no método HLRF. Maiores detalhes acerca do método são apresentados em Melchers (1999).

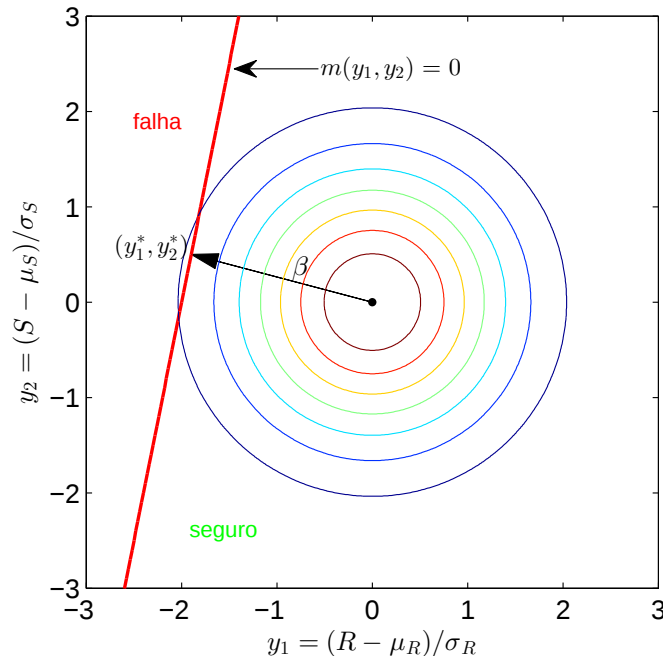


Figura 3: Representação da superfície de falha no espaço reduzido, para duas variáveis aleatórias

Os termos da função de falha $G(X)$, podem conter expressões de modelos mecânicos e modelos de carregamento, sendo implicitamente definidos por um modelo numérico qualquer.

No acoplamento para uma rotina confiabilística do tipo FORM, há a necessidade de se calcular o valor da função de falha e seus gradientes, os quais são utilizados na estimativa da probabilidade de falha do problema. Considerando-se a natureza implícita de $G(\mathbf{X})$, suas derivadas são calculadas numericamente por diferenças finitas, para cada chamada do modelo mecânico de elementos finitos, conforme Fig. (4)

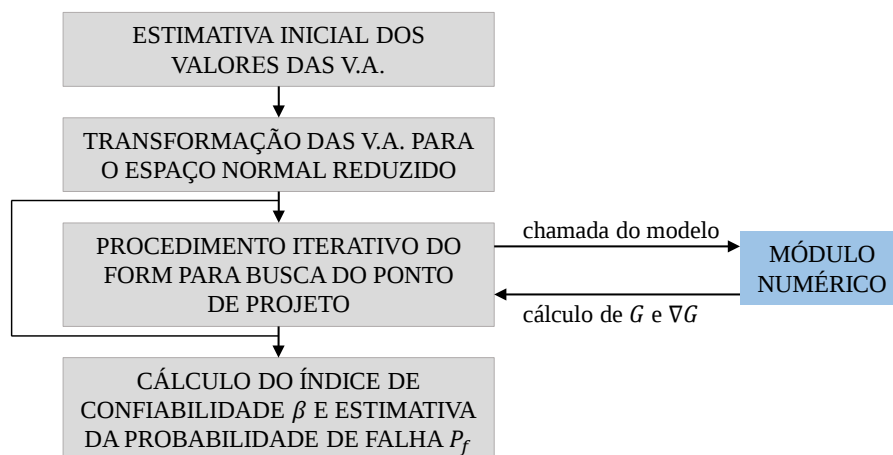


Figura 4: Esquema ilustrativo da estratégia de acoplamento direto via FORM

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Viga em Concreto Armado

Apresenta-se a seguir um exemplo de viga de concreto armado, submetida a um ensaio de flexão em 4 pontos, apresentado originalmente em Leonhardt e Walther (1962) *apud* Biten-court Júnior (2009), cujas características geométricas são ilustradas na Figura 5. O módulo de elasticidade do concreto é de 28 GPa, associado a uma resistência à flexão de 25 MPa, e coeficiente de Poisson igual a 0,2. O exemplo é adaptado, adotando-se uma carga $P = 155$ kN, em substituição ao valor original, de 72,25 kN. Além disso, o aço da armadura adotado, possui módulo de elasticidade de 200 GPa e tensão de escoamento igual a 500 MPa.

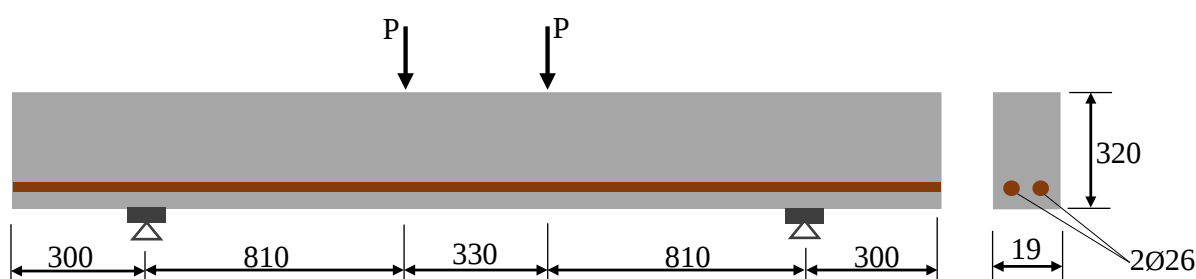


Figura 5: Propriedades geométricas (valores em mm) e esquema de ensaio em quatro pontos

Considerando-se a modelagem linear física deste trabalho, propõe-se uma simulação simplificada do comportamento da viga, não contemplando toda a resposta experimental apresentada pelos autores, a qual apresenta um trecho não linear de maior ductilidade. Inicialmente, o problema é modelado no programa *Abaqus*, sem armadura, de forma a validar os elementos

finitos T3 e Q8 implementados. O valor do deslocamento vertical máximo, no meio do vão, é usado como referência. Os resultados do estudo de convergência são apresentados na Tabela 2 e na Figura 6, notando-se a performance superior do elemento Q8, em relação ao T3.

Tabela 2: Estudo de convergência de malha, com elemento T3 e Q8

Malhas	Elemento T3			Elemento Q8		
	Nº de elementos	Deslocamento (mm)		Nº de elementos	Deslocamento (mm)	
		<i>Abaqus</i>	<i>ReliaFEM</i>		<i>Abaqus</i>	<i>ReliaFEM</i>
1	104	-1,25609	-1,25609	6	-1,48607	-1,48607
2	300	-1,43970	-1,43970	16	-1,56277	-1,56277
3	1326	-1,54660	-1,54660	52	-1,57797	-1,57797
4	5304	-1,57554	-1,57554	150	-1,58146	-1,58146

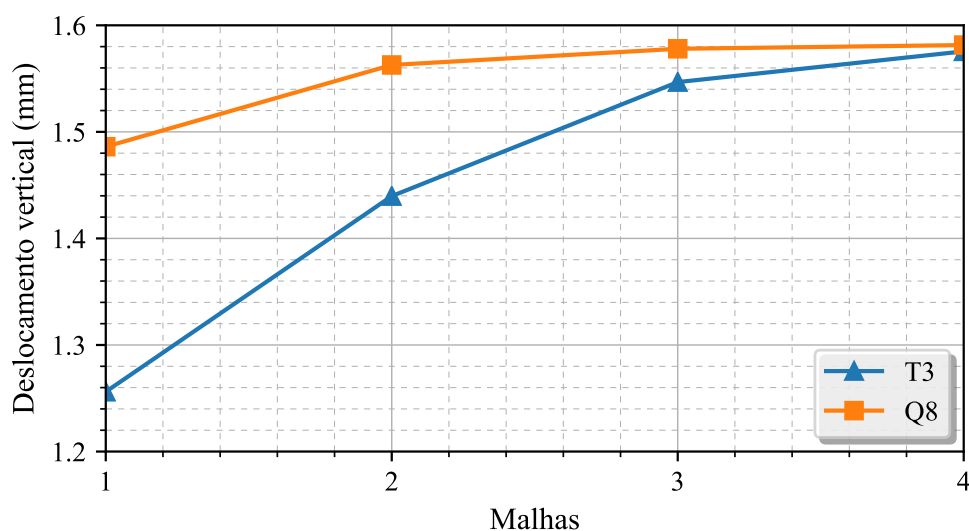


Figura 6: Deslocamentos verticais no meio do vão para as malhas analisadas

A malha 4 (Fig. 7) para elementos Q8 é então adotada para a modelagem do problema com reforço. O esquema de discretização matriz+reforço é ilustrado na Fig. 8. Segundo o modelo, o valor da flecha máxima é reduzido a 1,37 mm, com ganho de rigidez igual a 13%. A resposta do modelo reforçado também é validada com o *Abaqus*, obtendo-se um nível de precisão como o apresentado na Tabela 2.

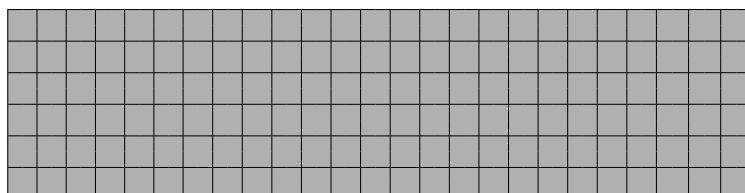


Figura 7: Malha adotada no exemplo

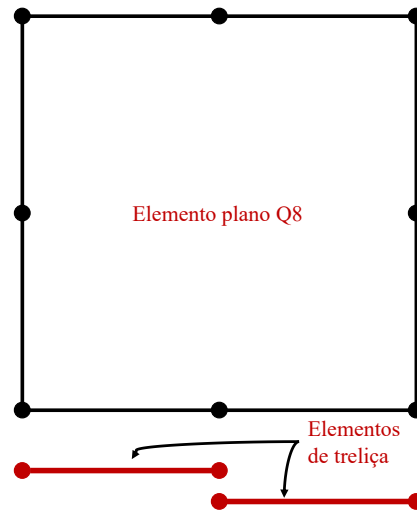


Figura 8: Esquema de acoplamento de elementos finitos Q8 e Treliça

As variáveis aleatórias tratadas no problema são apresentadas na Tabela 3. Os parâmetros estatísticos (média e desvio padrão) de cada variável aleatória são escritos em termos dos coeficientes *mean* e *COV* (coeficiente de variação).

Tabela 3: Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias utilizadas no problema

Variável	Símbolo	Distribuição	<i>mean</i>	<i>COV</i>
Resistência à compressão do concreto	f_{ck}	Normal	1,17	0,15
Resistência ao escoamento do aço	σ_y	Lognormal	1,03	0,063
Módulo de elasticidade do aço	E_a	Normal	1,04	0,05
Carga permanente	P	Normal	1,05	0,1

O valor médio da variável aleatória é obtido multiplicando-se o fator apresentado por seu valor nominal. Em relação ao desvio padrão, este é obtido multiplicando seu valor médio pelo coeficiente de variação. As informações estatísticas das variáveis foram obtidas nos trabalhos de Hamilton (2011) *apud* Souto (2015) e Santos et al. (2014). O módulo de elasticidade do concreto é escrito como v.a. a partir da distribuição da resistência à compressão.

Os modos de falha considerados referem-se à flecha crítica na viga, e à tensão crítica atuante na armadura, conforme as funções de falha a seguir.

$$G_1 = U_{adm}^{det} - U_{max}^{conf} \quad (26a)$$

$$G_2 = \sigma_y - \sigma_{s,max}^{conf} \quad (26b)$$

Na Tabela 4 apresentam-se os valores de probabilidade de falha obtidos via FORM. Notam-se valores elevados de P_f , típicos de Estado Limite de Serviço (ELS), sendo o segundo modo de falha dominante. Uma informação importante fornecida pela análise via FORM são os fatores de importância de cada v.a. na probabilidade de falha obtida, calculados a partir dos cossenos diretores do vetor normal à função de falha no ponto de projeto no espaço reduzido. Os fatores são apresentados em termos percentuais na Tabela 4.

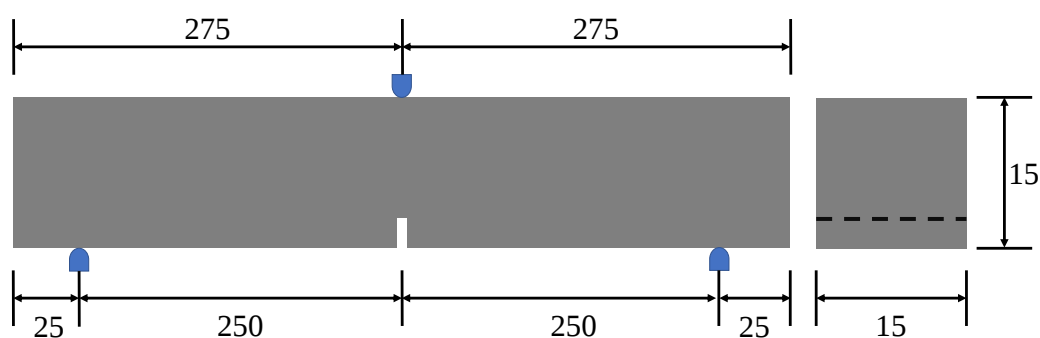
Tabela 4: Valores de probabilidade de falha e fatores de importância das v.a.

Funções de Falha	Probabilidade de Falha	Fatores de Importância			
		E_a	f_{ck}	σ_y	P
G_1	$10^{-2,7772}$	4,75%	91,06%	0,0%	4,19%
G_2	$10^{-2,2980}$	83,49%	7,53%	1,76%	7,22%

Nota-se que a resistência à compressão do concreto, descrita como v.a. f_{ck} , possui alta influência na análise confiabilística da função de falha G_1 , o que pode ser explicado pelo seu comportamento disperso, com o maior COV dentre as v.a. consideradas neste exemplo. Já no segundo modo de falha, o módulo de elasticidade do aço se mostra a v.a. dominante na resposta. Por fim, observa-se que a v.a. P , associada à carga aplicada, possui pouca influência na obtenção de P_f em ambos os modos investigados.

4.2 Espécime de Concreto Reforçado com Fibras

O segundo exemplo trata de um espécime de concreto fluido reforçado com fibras curtas metálicas, e é adaptado do trabalho de Agra (2017). O autor submeteu o espécime a um ensaio de flexão em 3 pontos, normatizado pela EN 14651 (2007), que visa medir a resistência à tração por flexão do concreto, de forma que caracteriza as resistências residuais do concreto à flexão para determinadas aberturas de fissuras, assim como o limite de proporcionalidade. A geometria e as dimensões do espécime são ilustradas na Fig. 9. A viga possui um entalhe com 25mm de altura, 5mm de largura. O módulo de elasticidade do concreto é de 28 GPa, associado a uma resistência à flexão de 25 MPa, e coeficiente de Poisson igual a 0,2. O aço da armadura possui módulo de elasticidade de 210 GPa. A carga vale $P = 10$ kN.

**Figura 9: Propriedades geométricas (dimensões em mm) e esquema de ensaio em três pontos**

Considerando-se a modelagem linear física deste trabalho, propõe-se uma simulação simplificada do comportamento do espécime, não contemplando toda a resposta experimental apresentada pelo autor, a qual apresenta um trecho não linear de maior ductilidade. O esquema de discretização matriz+reforço é ilustrado na Fig. 11. Inicialmente, o problema é modelado no programa *Abaqus*, sem fibras, de forma a validar o modelo em elementos T3 implementado. Os deslocamentos horizontal e vertical na extremidade inferior do entalhe são adotados como referência. A malha (Fig. 10) que leva a uma solução convergida do problema contém 3502

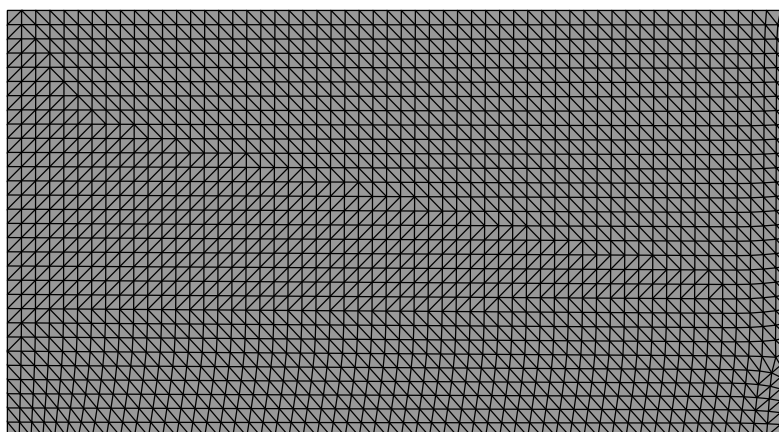


Figura 10: Malha adotada no exemplo

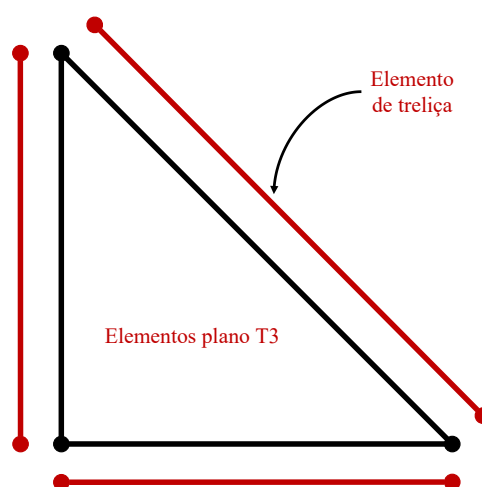


Figura 11: Esquema de acoplamento de elementos finitos T3 e Treliça

elementos. Modela-se a metade do domínio do problema, graças à simetria, com intuito de diminuir o custo computacional.

A fração volumétrica de fibras considerada é de 0,5% em relação ao volume total do corpo-de-prova. As fibras são inseridas em todas as arestas de elementos planos, ocupando o domínio de maneira uniforme, totalizando 5130 fibras. De forma a representar a fração volumétrica de 0,5% na geometria plana simulada, atribui-se uma área equivalente de aço aos elementos de treliça. Apesar de não se investigar o comportamento pós-pico do espécime, nota-se o ganho de rigidez proporcionado pelas fibras, sendo a abertura de fissura ao final do carregamento igual a $2,19 \times 10^{-2}$ mm, contra $2,25 \times 10^{-2}$ mm do caso sem reforço. O valor obtido para o caso com fibras está coerente com a resposta do autor, no trecho elástico, sob o nível de carga de 10 kN. Verifica-se um ganho de rigidez inferior a 5%, em termos de deslocamentos e, como demonstra a literatura, o reforço com fibras curtas de aço não influi, de maneira significativa, na fase elástica inicial do problema.

As variáveis aleatórias consideradas no problema são os módulos de elasticidade do concreto e do aço, além da carga aplicada, conforme apresentado no exemplo anterior. O modo de falha investigado refere-se ao deslocamento vertical máximo, na ponta do entalhe, dado pela

equação de estado limite que segue.

$$G_1 = U_{max}^{conf} - U_{max}^{det} \quad (27)$$

Os dois termos referem-se ao deslocamento calculado pelo modelo de elementos finitos proposto. A P_f obtida representa a probabilidade de que o valor determinístico ultrapasse o valor obtido utilizando confiabilidade, sendo este último mais realista, por contemplar algumas incertezas inerentes ao problema. Pretende-se unicamente quantificar a influência da aleatoriedade das variáveis na resposta da simulação. A Tabela 5 ilustra O valor de probabilidade de falha obtido, e os fatores de importância das variáveis envolvidas.

Tabela 5: Probabilidade de falha obtida via FORM e Monte Carlo e Fatores de Importância

Probabilidade de Falha		Fatores de Importância	
Monte Carlo	FORM	f_{ck}	P
0,68	0,63	0,08%	99,92%

O alto valor de probabilidade obtido indica que a consideração das incertezas não modifica significativamente o valor do deslocamento crítico, havendo 63% de chances de que o valor determinístico seja maior ou igual ao valor estimado de forma probabilística. Quanto aos fatores de importância, nota-se que o carregamento P mostra-se dominante na obtenção do valor de P_f . Isso indica que para o tipo de função de falha adotado neste exemplo, a sensibilidade da v.a. P na obtenção dos valores de deslocamento, é muito maior do que no exemplo anterior.

5 CONCLUSÕES

Através dos exemplos analisados, foi possível validar a implementação do modelo de elementos finitos implementado, quantificando o acoplamento entre matriz e reforço elástico-lineares. Especificamente no caso de fibras metálicas curtas, verificou-se que sua influência na rigidez da viga, na fase elástica da resposta, é pouco significativa, conforme reportado na literatura. Para fins de simulação do comportamento de materiais cimentícios reforçados por fibras ou barras, o modelo mecânico precisa ser aprimorado, incluindo leis constitutivas não lineares que representem adequadamente os materiais constituintes, permitindo a modelagem de elementos até a carga última.

O modelo mecano-fiabilístico desenvolvido foi validado, e permitiu quantificar a influência das incertezas associadas às variáveis de projeto na resposta dos dois problemas apresentados. Os resultados apresentados são apenas indicativos dos modos de falha investigados, estando associados aos valores das v.a. adotadas. Metodologias probabilísticas se mostram com uma poderosa ferramenta no processo de tomada de decisão do projetista.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - pelo suporte financeiro concedido no âmbito da Chamada Pública MCTI/CNPq/MEC/Capes - Ação Transversal nº 06/2011 – Casadinho/PROCAD.

REFERÊNCIAS

- Agra, R. R., 2017. Influência do tipo de fibra no comportamento á flexão de vigas de concreto fluido. *Monografia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió*.
- Beck, A. T., 2014. Curso de confiabilidade estrutural: notas de aula. *Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos*.
- Bitencourt Júnior, L. A. G., 2009. *Desenvolvimento de uma plataforma computacional para análise via método dos elementos finitos de estruturas de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço*. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Bitencourt Júnior, L. A. G., 2014. *Modelagem do processo de falha em materiais cimentícios reforçados com fibras de aço*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Clough, R. W., 1960. The finite element in plane stress analysis. In *2nd ASCE Conf. on Electronic Computation* (pp. 345–378). Pittsburgh.
- Cook, R. D., 1995. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. Wiley.
- Elwi, A. E. & Hrudey, T. M., 1989. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(4), 740–754.
- EN 14651, B., 2007. *Test method for metallic fibre concrete e measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual)*. UK: BSI, (pp. 1–20).
- Figueiredo, A. D., 2000. *Concreto com Fibras de Aço*. Boletim técnico bt/pcc/260, Universidade de São Paulo.
- Lemaire, M., 2013. *Structural reliability*. John Wiley & Sons.
- Melchers, R. E., 1999. *Structural reliability analysis and prediction*. Chichester New York: John Wiley.
- Ngo, D. & Scordelis, A. C., 1967. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. *ACI Journal Proceedings*.
- Nogueira, C. G., 2010. *Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Paliga, C. M., 2008. *Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de elementos finitos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Phillips, D. V. & Zienkiewicz, O. C., 1976. Finite Element Non-Linear Analysis of Concrete Structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 61(1), 59–88.
- Real, M. d. V., 2000. *Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos*. PhD thesis, UFRGS.
- Sagrilo, L. V. S., 2003. Confiabilidade estrutural: notas de aula. *Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia - Universidade Federal do Rio de Janeiro*.

Santos, D., Stucchi, F., & Beck, A., 2014. Reliability of beams designed in accordance with brazilian codes. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, 7(5), 723–746.

Souto, N. A. O., 2015. *Aplicação de confiabilidade ao estudo de elementos de aço comprimido em situação DE incêndio*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Alagoas, Maceió.