



FERRAMENTA EM AMBIENTE EXCEL PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE TRELIÇAS ESPACIAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luís Gustavo Oliveira Nogueira

Eric Mateus Fernandes Bezerra

eng.lg.nogueira@gmail.com

eric.fernandes@ufersa.edu.br

Engenharia Civil, Universidade Federal Rural do Semi Árido (UFERSA)

Avenida Francisco Mota, 59625-900, Rio Grande do Norte, Mossoró, Brasil

Resumo. Atualmente, o desenvolvimento de qualquer projeto de estruturas é assistido por uma ferramenta computacional. Por possuir uma interface intuitiva e recursos matemáticos poderosos, o Microsoft Excel® (Excel) se tornou uma ferramenta computacional muito popular e presente em quase todos os escritórios de engenharia. As treliças, por apresentarem uma boa relação peso/resistência, se mostram como uma solução prática e econômica para muitos problemas de engenharia. O presente trabalho trata do desenvolvimento de uma ferramenta computacional em ambiente Excel, denominada Hand-Trusses, capaz de obter os esforços, reações, tensões e deslocamentos em treliças espaciais a partir de uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF). Para melhorar a interação com o usuário, será utilizado o recurso VBA UserForms, que fornece uma maneira prática para o desenvolvimento da interface gráfica da ferramenta. Os resultados fornecidos por esta estão em conformidade com os obtidos por meio do software SAP2000®. Além de aplicações para o projeto, a ferramenta pode ser usada como recurso pedagógico para o ensino do comportamento das estruturas. A mesma se mostra como uma alternativa simples, gratuita e eficiente, com potencial para subsidiar profissionais e estudantes de engenharia.

Palavras-chave: Análise Estrutural, Treliças Espaciais, Método dos Elementos Finitos, Excel

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o desenvolvimento de qualquer projeto de estruturas é assistido por uma ferramenta computacional. Com o uso destas, é possível diminuir o tempo que seria gasto realizando operações matemáticas básicas e se dedicar mais à concepção de uma solução estrutural eficiente. Além disso, devido ao elevado poder de processamento de dados dos computadores atuais e à facilidade de acesso a estes, problemas de natureza complexa, cuja solução manual seria inviável, podem ser rapidamente resolvidos e suas respostas melhor investigadas. Como reflexo, estruturas mais arrojadas podem ser concebidas e modeladas computacionalmente com elevado nível de representatividade.

As ferramentas computacionais podem, ainda, desempenhar um papel pedagógico relevante ao serem usadas como recurso para o ensino do comportamento das estruturas. Ferramentas computacionais gratuitas (como o *Ftool*[®], por exemplo) são utilizadas com muita frequência no âmbito acadêmico para facilitar e estimular o aprendizado do mecanismo real das estruturas, bem como familiarizar o aluno com ferramentas que, doravante, serão utilizadas na confecção de qualquer projeto das mesmas.

O *Excel* é um *software* muito popular que possui uma interface intuitiva e recursos matemáticos poderosos, fato que justifica e fomenta sua ampla utilização no desenvolvimento de projetos de engenharia. É prática comum nos escritórios de engenharia fazer uso de planilhas desenvolvidas neste ambiente para auxiliar desde o orçamento, planejamento e controle de uma obra, até, em muitos casos, realizar o dimensionamento dos elementos que a compõe.

Assim como as demais ferramentas do pacote *Microsoft Office*, o *Excel* possui um ambiente de programação cuja linguagem utilizada é a *Visual Basic for Applications* (VBA), que possui recursos específicos que permitem um maior controle e manuseio dos atributos do próprio *Excel*, facilitando o processo de automatização e, por conseguinte, a criação de novas ferramentas computacionais mais racionais que utilizem esse ambiente. O VBA é uma linguagem de programação baseada no *Visual Basic* (VB) que foi incorporada aos *softwares* da *Microsoft*, trazendo elementos específicos para a melhoria das ferramentas destes. Outros programas também fazem uso desta, dentre os quais pode-se citar o *AutoCAD*[®], *MathCAD*[®], *Robot*[®], etc., fato que facilita o trabalho conjuntos destes. Embora só possa executar códigos dentro da aplicação, o VBA permite gerar *links* entre programas que possuem esta linguagem.

As treliças são estruturas formadas por barras retas conectadas e articuladas em suas extremidades que podem estar dispostas no plano ou no espaço, na qual, em geral, as cargas são aplicadas diretamente sobre nós, gerando no interior dos elementos apenas tensões de tração e compressão. Por apresentar uma boa relação peso/resistência, estas se mostram como uma solução prática e econômica para muitos problemas de engenharia.

Para o estudo das treliças espaciais, a análise estrutural geralmente é realizada através de *softwares* sofisticados baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF), o que, inerentemente, reflete em um elevado custo de aquisição e na dificuldade em manipular e ler os seus resultados. Alternativamente, a análise deste elemento pode ser realizada por meio de cálculos manuais, mas que, nesse caso, torna-se um processo oneroso e ineficiente, haja vista a grande quantidade de tempo demandada e o processo cansativo para se determinar as possíveis soluções, sendo que, muitas vezes, tais soluções se tornam impossíveis sem o auxílio computacional.

Tendo em vista a grande utilização de treliças pela indústria da construção civil, torna-se substancial o desenvolvimento de ferramentas computacionais para a análise estrutural destas. O presente trabalho apresenta, portanto, o desenvolvimento de uma ferramenta computacional simples, intuitiva e esteticamente agradável em ambiente *Excel*, denominada *Hand-Trusses*, que permita a obtenção dos esforços, reações, tensões e deslocamentos de treliças espaciais a partir de uma formulação baseada no MEF, que é o método de análise estrutural mais utilizado atualmente, o que torna sua compreensão substancial na formação de um engenheiro.

2 TRELIÇAS

As treliças são estruturas amplamente utilizadas em projetos de engenharia devido sua versatilidade, uma vez que proporcionam excelente eficiência quando analisada sua relação carga resistente/peso próprio, não resultando em um alto custo relativo ou perda estética. De acordo com Beer et al. (2012), a treliça é uma das principais estruturas da engenharia, pois oferece uma solução prática e econômica para muitas situações encontradas. As treliças são as estruturas preferidas em projetos de pontes, torres de telefonia e coberturas diversas.

Uma treliça típica é composta por um arranjo estável de elementos retos unidos em suas extremidades, denominadas de nós, não havendo, assim, a continuidade dessas barras através de suas juntas (Beer et al., 2012). Embora na prática a ligação entre os elementos dessa estrutura seja rígida e realizada através de soldagem ou parafusamento em placas de ligação, é consistente idealizar essas conexões por meio de rótulas sem atrito (Leet et al., 2010). Comumente, as cargas atuantes nestas são aplicadas diretamente sobre os seus nós, fazendo com que cada membro esteja sujeito apenas a forças de tração ou compressão.

Dependendo do arranjo das barras, as treliças podem ser classificadas em planas ou espaciais (Fig. 1). As treliças espaciais são formadas pela simples união de barras retas com o intuito de construir uma configuração tridimensional. Assim como a forma elementar de uma treliça plana é um triângulo, as treliças espaciais são moduladas a partir de tetraedros formado por 6 barras e 4 nós. A união de mais formas elementares ao tetraedro proporciona uma estrutura rígida mais complexa, denominada treliça espacial simples (Hibbeler, 2012).

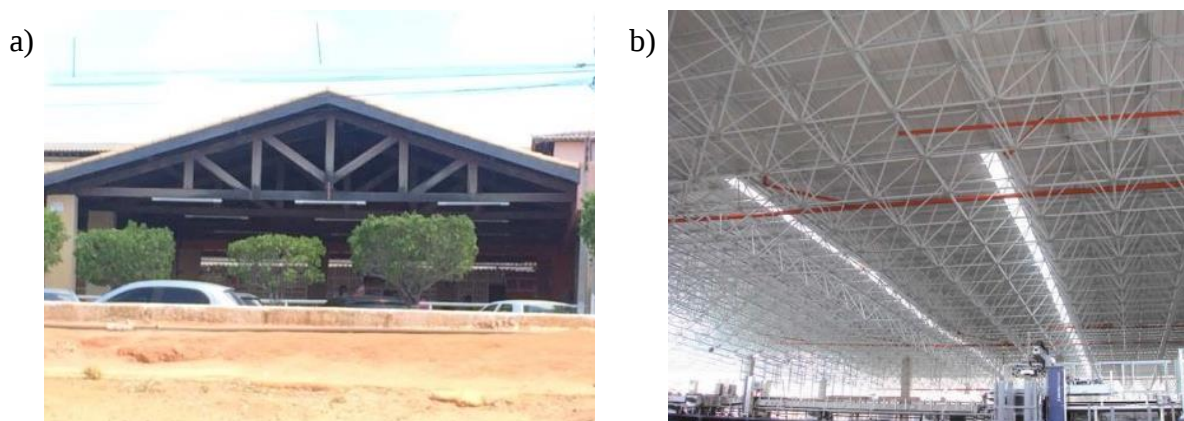


Figura 1. Aplicações de a) treliças planas e b) treliça espaciais.

3 ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA

Os problemas estruturais, em geral, buscam a solução das equações diferenciais governantes dos fenômenos que os descrevem. Ampliada a complexidade de uma estrutura, o tratamento analítico destas equações se torna inviável e, por vezes, impossível. Com a evolução e difusão dos computadores digitais eletrônicos, a utilização de métodos numéricos tornou-se substancial no tratamento da mecânica das estruturas. Nesse cenário, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tornou-se o método numérico mais utilizado na análise de estruturas atualmente (Fish; Belytschko, 2009).

O MEF é um método numérico versátil que, a partir da divisão do domínio de integração em um número finito de elementos, faz uma aproximação numérica no elemento para resolver as equações diferenciais de equilíbrio. O mesmo caracteriza-se como ferramenta fundamental na análise e projeto das estruturas, já que os programas computacionais baseados na sua premissa são amplamente utilizados em praticamente todos os campos da engenharia (Bathe, 1996).

A Fig. 2 apresenta um elemento finito genérico de treliça, delimitado por dois nós, 1 e 2, com um grau de liberdade em cada nó (u_1 e u_2), comprimento ℓ , área da seção transversal A e módulo de elasticidade longitudinal E .

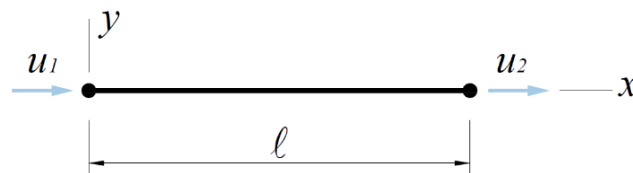


Figura 2. Elemento finito de treliça

De acordo com Cook et al. (2002), entre todas as configurações admissíveis de um sistema conservador, aqueles que satisfazem as condições de equilíbrio tornam a energia potencial (Π) estacionária em relação a pequenas variações admissíveis de deslocamento (u). Para um elemento de treliça com deslocamentos nodais contidos em um vetor $\mathbf{u}_e$ e as forças externas aplicadas nos nós contidas em um vetor $\mathbf{f}_e$, a energia potencial pode ser escrita na forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e. \quad (1)$$

onde $\mathbf{K}_e$ é a matriz de rigidez do elemento, que, usando uma interpolação linear para aproximar os deslocamentos e considerando EA constante, pode ser dada por:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^\ell \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} dx = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo $\mathbf{B}$ a matriz que transforma deslocamentos em deformações, que, baseada nas derivadas das funções lineares adotadas na interpolação dos deslocamentos, é obtida por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Dessa maneira, a estrutura estará em equilíbrio quando:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{f}_e = 0 \Rightarrow \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e. \quad (4)$$

Um elemento finito de treliça espacial pode assumir qualquer posição no espaço e cada nó pode se mover na direção dos três eixos. Sendo assim, para aplicar a soma dos coeficientes de rigidez de cada elemento diretamente para obter a matriz de rigidez global da estrutura, é necessário escrever os graus de liberdade do elemento no sistema local nas direções dos eixos globais. A Fig. 3 apresenta um elemento genérico de treliça 3D com indicação dos eixos coordenados locais e globais.

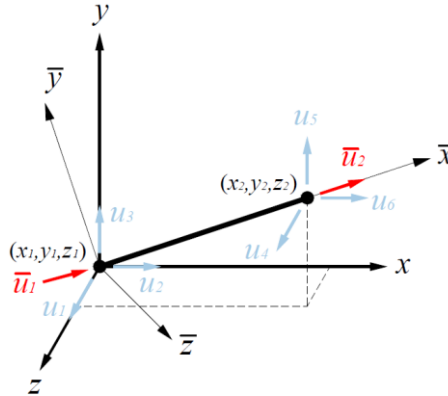


Figura 3. Elemento genérico tridimensional da treliça.

Os deslocamentos u_1 e u_2 no sistema local $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ podem ser decompostos nos eixos do sistema global (x, y, z) nas componentes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 e u_6 por meio da relação:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}_e = \mathbf{T} \mathbf{u}_e \quad (5)$$

onde $\mathbf{T}$ é a matriz que transforma os deslocamentos do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global e C_x, C_y e C_z os cossenos diretores, obtidos com base nas coordenadas globais dos nós 1 (x_1, y_1, z_1) e 2 (x_2, y_2, z_2) .

$$C_x = \cos \theta_x = \frac{x_2 - x_1}{\ell}; \quad C_y = \cos \theta_y = \frac{y_2 - y_1}{\ell}; \quad C_z = \cos \theta_z = \frac{z_2 - z_1}{\ell}. \quad (6)$$

De forma análoga ao que foi feito para os deslocamentos, as forças internas no sistema global podem ser obtidas a partir das forças no sistema local fazendo:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}}_e. \quad (7)$$

Sendo assim, a matriz de rigidez do elemento no sistema global pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{T}. \quad (8)$$

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL NO EXCEL

O ambiente de desenvolvimento do código em VBA (*VBA Editor*) armazena suas informações nos chamados módulos (*Module*). Sendo assim, a implementação do MEF e da forma deformada e indeformada da estrutura foram realizadas nestes. Além disso, nesse ambiente é possível trabalhar com formulários personalizáveis (*UserForms*), que compõem a interface da ferramenta e melhora a entrada de dados. Isto é, nos formulários serão introduzidos os dados de entrada, enquanto que os módulos processam estes dados para obter os resultados necessários. A ferramenta desenvolvida será compilada no *Excel*, usando, entretanto, outra interface. A ferramenta possibilita, ainda, que o usuário possa salvar todo o trabalho realizado em um arquivo .xlsx, além de exportá-lo através de relatório em formato PDF.

O *Excel* se mostra como uma ferramenta muito atrativa para implementação de problemas com enfoque matricial, já que seu próprio Ambiente Padrão de Controle (APC) é composto por uma grande matriz, em que cada elemento (célula) é mapeado por sua respectiva linha e coluna. Além disso, o *software* já detém algumas funções pré-programadas de operações com matrizes, tais como: cálculo do determinante, determinação da matriz inversa, determinação da matriz transporta, produto e soma de matrizes.

Em um primeiro momento, a ferramenta faz a leitura dos dados de entrada. Estes dados iniciais estão associados à geometria da treliça (área da seção transversal), ao material constituinte das barras (módulo de elasticidade longitudinal), ao carregamento nodal e às condições de vínculo. A partir da definição dos nós das barras, feito informando suas coordenadas no espaço, e das conectividades entre os elementos, o comprimento das barras são calculados automaticamente. Além disso, existem seções típicas implementadas (retangular, circular, I, etc.) que, com base nas dimensões inseridas, têm suas áreas também calculadas automaticamente. As unidades podem ser inseridas no SI ou no sistema americano. Os apoios são definidos através da inserção do valor nulo no grau de liberdade restrito na aba “Deslocamentos”. De forma análoga, as forças nodais podem ser aplicadas na aba “Forças”. A tela inicial, responsável pela interação do usuário com a ferramenta, é evidenciada na Fig. 4.

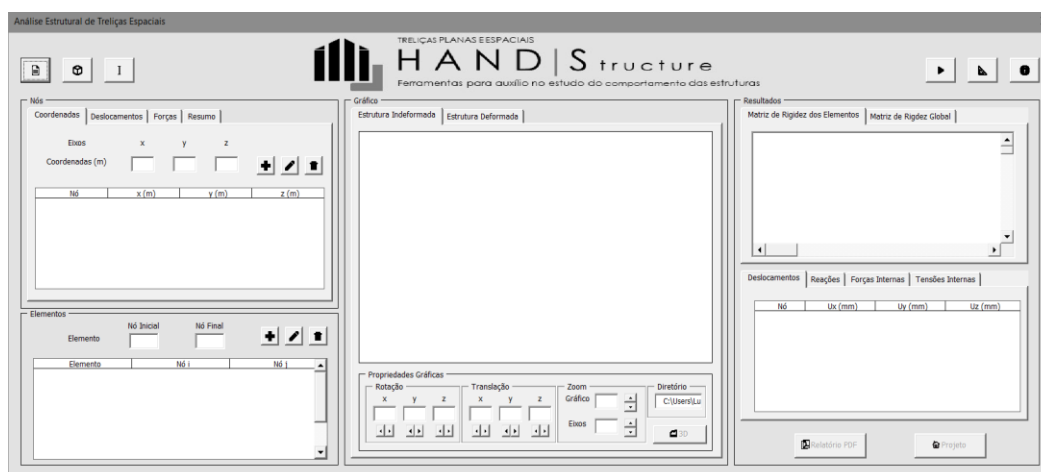


Figura 4. Tela inicial.

Após a leitura dos dados de entrada, são feitas a montagem do vetor de forças e da matriz de rigidez de cada elemento já no sistema global. Considerando os graus de liberdade para cada nó e a localização de cada um dentro da estrutura, toma-se o primeiro como referência e os

demais seguem sequencialmente a numeração de seus graus de liberdade, definindo, dessa forma, a posição dos coeficientes de rigidez de cada elemento dentro da matriz ampliada.

De posse das matrizes ampliadas para cada elemento, pode-se gerar a matriz de rigidez global da estrutura por meio da soma de todas as matrizes ampliadas dos elementos. Em seguida, é feita a eliminação das linhas e colunas correspondentes à direção que apresente restrição ao deslocamento. Ao término deste processo, estará sendo determinada a matriz de rigidez compacta da estrutura, não mais singular, que será invertida para que seja posteriormente multiplicada pela matriz das forças atuantes, obtendo, assim, o vetor dos deslocamentos globais da estrutura.

O vetor dos deslocamentos nodais é multiplicado pela matriz de rigidez ampliada de cada elemento, resultando em um vetor de forças e reações da estrutura no sistema global de coordenadas. Após isso, são determinados os deslocamentos dos elementos no sistema local que, multiplicados pela matriz de rigidez local de cada elemento, conduz à determinação das forças internas nos elementos. Conhecidos os esforços internos e a área da seção transversal, pode-se calcular as tensões nas barras.

O usuário poderá visualizar a estrutura na sua forma deformada e indeformada. As ferramentas de visualização *zoom*, *orbit* e *pan*, além da escala dos deslocamentos, podem ser empregadas para manipular e melhorar a visualização. O *software* já está pré-configurado para armazenar todas as saídas de resultados, sejam elas gráficas ou em forma de relatório, no diretório em que o *software* foi previamente guardado no computador.

5 APLICAÇÃO NUMÉRICA

Objetivando validar o *Hand-Trusses* e destacar sua eficiência na resolução de treliças espaciais, será solucionando um problema proposto por Hibbeler (2011) (Fig. 5) e os seus resultados serão comparados com SAP2000®. Todas as barras da treliça possuem $E = 13 \text{ GPa}$ e $A = 1000 \text{ mm}^2$. No ponto A, os deslocamentos são restritos nas três direções. Em B, são restritos os deslocamentos em x e y e em C o deslocamento em y.

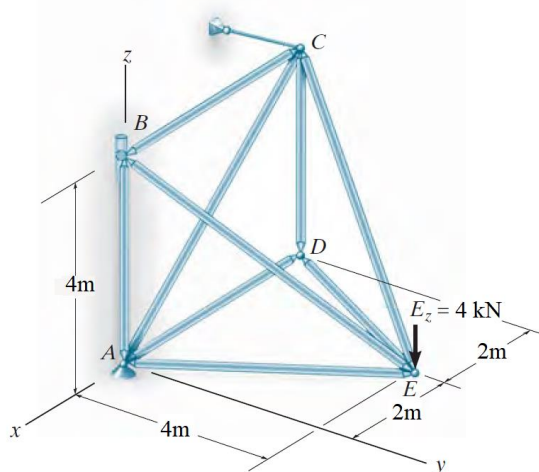


Figure 5. Problema proposto. Fonte: Hibbeler (2011).

A Fig. 6 mostra a solução do problema obtida pelo *Hand-Trusses*, enquanto a Fig. 7 mostra os resultados gráficos obtidos pelo *SAP2000*. Neste último, a formulação é feita para um elemento finito com 6 graus de liberdade por nó, denominado *frame*, que representa os efeitos de flexão biaxial, torção, deformação axial e deformação por cisalhamento biaxial. Como o *Hand-Trusses* só considera a rigidez axial das barras na sua formulação (3 graus de liberdade de translação por nó), todas as ligações dos elementos da treliça modeladas no *SAP2000* foram consideradas articuladas para que no interior do elemento só fossem desenvolvidos esforços axiais e, com isso, os resultados pudessem ser adequadamente comparados.

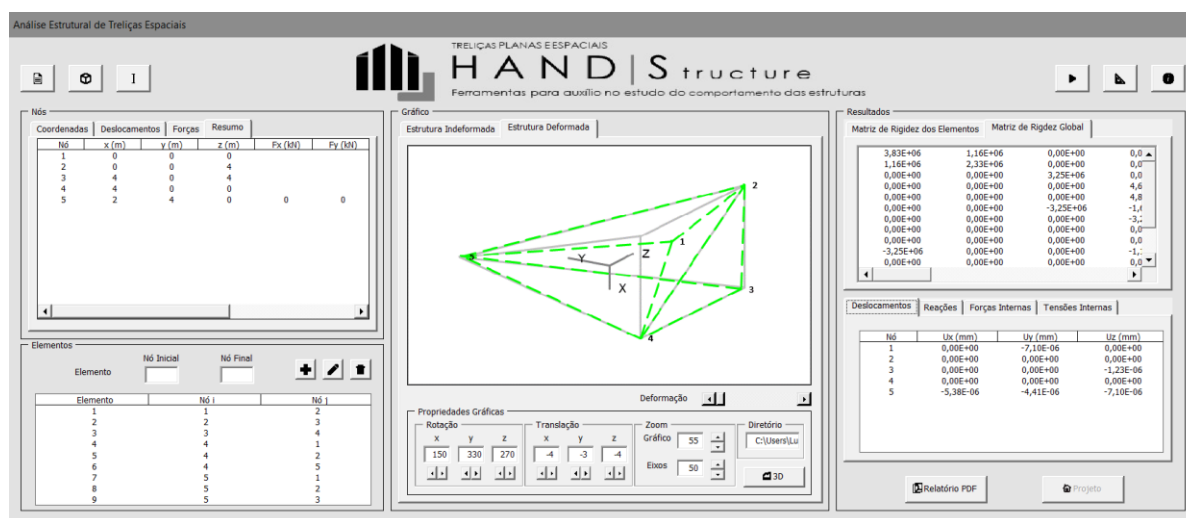


Figura 6. Saída de dados do *Hand-Trusses*.

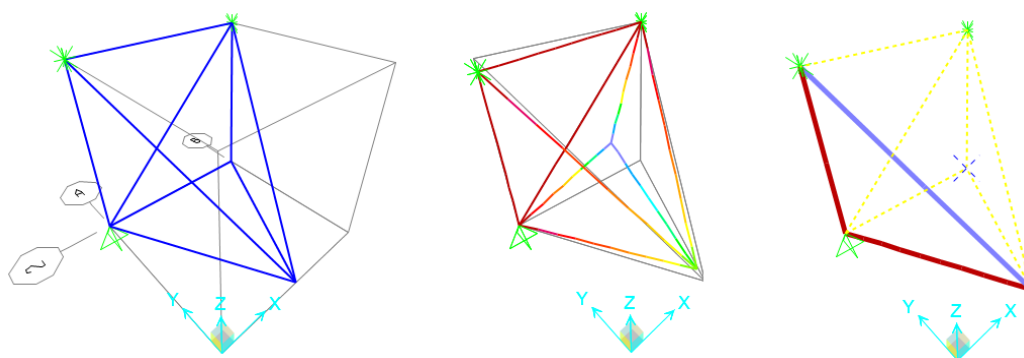


Figura 7. Solução da treliça pelo *SAP2000*.

Com base nas Tabelas 1, 2 e 3, que expõem, respectivamente, os deslocamentos nodais, os esforços normais e as tensões nos elementos, é possível notar que as soluções encontradas pelo *Hand-Trusses* são exatamente iguais às obtidas pelo *SAP2000*. O *Hand-Trusses* expõe todos os cálculos efetuados para chegar nesses resultados (matriz de rigidez dos elementos, vetor dos deslocamentos, etc.) com a sistemática do método. Isso faz com que a ferramenta possa ser facilmente empregada no ensino das disciplinas de análise matricial de estruturas.

Tabela 1. Deslocamentos nodais em *mm*.

Nó	SAP2000®			Hand-Trusses		
	u_x	u_y	u_z	u_x	u_y	u_z
1	0,00	-7,10E-06	0,00	0,00	-7,10E-06	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	-1,23E-06	0,00	0,00	-1,23E-06
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	-5,38E-06	-4,41E-06	-7,10E-06	-5,38E-06	-4,41E-06	-7,10E-06

Tabela 2. Esforços normais nos elementos em *kN*.

Elemento	SAP2000®	Hand-Trusses
1	0,00	0,00
2	0,00	0,00
3	-4,00	-4,00
4	0,00	0,00
5	0,00	0,00
6	-4,47	-4,47
7	0,00	0,00
8	0,00	0,00
9	6,00	6,00

Tabela 3. Tensões normais nos elementos em *kPa*.

Elemento	SAP2000®	Hand-Trusses
1	0,00	0,00
2	0,00	0,00
3	-4,00	-4,00
4	0,00	0,00
5	0,00	0,00
6	-4,47	-4,47
7	0,00	0,00
8	0,00	0,00
9	6,00	6,00

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho obteve êxito nas metas propostas, uma vez que a ferramenta desenvolvida no mesmo foi capaz de obter os esforços, deslocamentos e tensões em elementos de treliças espaciais com os mesmos valores numéricos obtidos por uma ferramenta computacional consolidada no âmbito acadêmico e científico. Como o *Excel* é um *software* presente na grande maioria dos computadores pessoais, o *Hand-Trusses* pode ser acessado por muitos usuários sem necessitar a instalação de um outro programa específico. Embora use o *Excel* para executar suas operações, foi criada uma interface usando os formulários do VBA que

melhorou a estética da ferramenta e racionalizou a exposição das informações, melhorando, significativamente, a interação com o usuário, que pode fornecer, ler e interpretar os resultados com maior facilidade e de uma forma extremamente intuitiva.

É válido destacar a importância da utilização de ferramentas para auxiliar não só no projeto, mas no ensino do comportamento das estruturas. O desenvolvimento destas deve ser estimulado, pois aumenta as alternativas e, naturalmente, o acesso a elas. Além disso, a familiarização com estas é imprescindível na formação dos engenheiros, já que estarão presentes na maioria das suas atividades profissionais. O desenvolvimento de ferramentas para auxiliar uma atividade específica, como a análise de uma treliça, por exemplo, simplifica a ferramenta e demanda menos capacidade de processamento da máquina do que um *software* com abordagem mais ampla.

O produto deste trabalho faz parte de um pacote de ferramentas computacionais gratuitas, implementadas no âmbito da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, que objetiva subsidiar alunos e profissionais da engenharia no desenvolvimento de suas atividades. O mesmo, denominado *HAND Structure*, contempla planilhas eletrônicas (como o *Hand-Trusses*, por exemplo), aplicativos para dispositivos móveis com sistema operacional *Android* e uma plataforma *web* que podem ser usadas no tratamento dos problemas de estruturas.

7 REFERÊNCIAS

- Bathe, K-J, 1996. *Finite element procedures*. 1ª ed. Pearson Prentice Hall.
- Beer, F. B., Johnston, E. R., Mazurek, D. F. & Eisenberg, E. R., 2012. *Mecânica vetorial para engenheiros: estática*. 9ª ed. McGraw Hill.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. & Witt, R. J., 2012. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4ª ed. John Wiley & Sons.
- Fish, J. & Belytschko, T., 2009. *Um primeiro curso em elementos finitos*. LTC.
- Hibbeler, R. C., 2011. *Estática: mecânica para engenharia*. 12ª ed. Pearson Prentice Hall.
- Leet, K. M., Uang, C. & Gilbert, A. M., 2009. *Fundamentos da análise estrutural*. 3ª ed. McGraw-Hill.
- Martha, L. F., 2010. *Análise de Estruturas*. 1ª ed. Campus.