



ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE TUBOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS SUBMETIDOS À PRESSÃO HIDROSTÁTICA

Rômulo Montalvão Silva

Márcio André Araújo Cavalcante

rmontalvao94@gmail.com

marcio.cavalcante@ctec.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas

Rodovia AL 145, Km 3, N° 3849, Cidade Universitária, Delmiro Gouveia, Alagoas, Brasil.

Resumo. Nos últimos anos, a busca por materiais com um melhor desempenho mecânico levou ao aumento de pesquisas e ao desenvolvimento de materiais compósitos, com ênfase naqueles reforçados por fibras longas unidirecionais. Estes materiais têm se destacado devido as suas elevadas relações rigidez/peso, resistência/peso e excelente resistência à fadiga e à corrosão, o que tem propiciado a sua utilização na produção de tubos submetidos a condições ambientais severas, como os tubos utilizados em risers na indústria offshore, em substituição ao aço. A modelagem do comportamento mecânico de estruturas de materiais compósitos tem encontrado dificuldades no que se relaciona a avaliação das propriedades efetivas destes materiais, o que requer o emprego de técnicas de homogeneização e estratégias de modelagem multi-escala. Frente a isso, o presente trabalho propõe a utilização do modelo auto-consistente generalizado na avaliação das propriedades elásticas efetivas das lâminas que compõem a parede de tubos de materiais compósitos laminados, respeitando as restrições cinemáticas impostas aos tubos de parede fina e empregando a Teoria Clássica da Laminação e a Teoria da Instabilidade Linear, permitindo a avaliação da pressão externa crítica, que pode levar o tubo à flambagem, e a pressão hidrostática interna que levaria o tubo à falha, segundo o critério de falha de Tsai-Hill. Ainda são realizadas análises de confiabilidade, com o intuito de verificar a sensibilidade da resistência do tubo com relação aos parâmetros definidores de sua configuração, com ênfase naqueles que podem ser controlados durante o processo de fabricação.

Palavras-Chave: Materiais Compósitos Reforçados por Fibras; Modelo Auto-Consistente Generalizado; Pressão Externa Crítica; Análise de Falhas; Tubo de Parede Fina; Análise de Confiabilidade.

1 Introdução

Os avanços científicos propiciaram o aparecimento de uma gama de materiais avançados, compósitos, que podem ser aplicados em diversos setores industriais, tais como, indústrias automotiva e de petróleo. Os referidos materiais possuem comportamentos diferenciados quando comparados aos materiais convencionais (homogêneos e isotrópicos), tornando necessária a adoção de técnicas de homogeneização, além de estratégias de modelagem multi-escala.

Nesta nova geração de materiais avançados, pode-se destacar os compósitos reforçados por fibras, que apresentam elevadas relações resistência/peso e rigidez/peso. O bom desempenho mecânico destes materiais tem impulsionado o seu emprego na confecção de tubos industriais submetidos a alta pressão e a condições ambientais desfavoráveis. Como exemplo, pode ser citada a sua aplicação como riser na indústria offshore, em substituição ao aço (Meniconi et al. 2001).

No caso de tubos confeccionados com o uso de Polímeros Reforçados por Fibras (PRF), diversos são os parâmetros definidores de sua configuração. Esses parâmetros, por sua vez, possuem diversas incertezas associadas às imperfeições que surgem durante o processo de fabricação, tornando o comportamento de tubos de PRF até certo ponto imprevisível.

Essa imprevisibilidade de comportamento resulta em valores elevados de coeficientes de minoração de carga que provocam uma subutilização da capacidade de carga dos tubos. Situações como essa podem ser amenizadas por meio de análises de confiabilidade estrutural, realizadas com o intuito de levar em consideração as incertezas durante a fase de projeto, possibilitando a estimativa da probabilidade da estrutura violar suas condições de estado limite, ou seja, sua probabilidade de falha.

Assim, este trabalho propõe uma Análise de Confiabilidade Estrutural de tubos de materiais compósitos de parede fina submetidos à pressões hidrostáticas, com o intuito de avaliar a sensibilidade da resistência do tubo com relação aos parâmetros que definem a sua configuração.

2 Metodologia

Para a realização do presente trabalho, inicialmente foi realizado um levantamento bibliográfico sobre análise de confiabilidade em materiais compósitos e seu emprego em tubos submetidos a situações de alto grau de agressividade ambiental. Posteriormente, com base no levantamento realizado, foram definidos os métodos de análise que seriam empregados.

Os detalhes da metodologia empregada e as hipóteses simplificadoras utilizadas são discutidos nas seções a seguir.

2.1 Análise de Lâminas de Material Compósito

2.1.1 Propriedades Elásticas Efetivas (Modelo de Três Fases)

O Modelo Auto-Consistente Generalizado (ACG) foi originalmente proposto e formulado por Christensen & Lo 1979, e depois analisado por Christensen 1990. Esse modelo considera a interação entre a inclusão e a matriz, assim como a interação entre as inclusões.

O Modelo ACG fornece os mesmos valores para as propriedades efetivas de lâminas reforçadas por fibras longas do modelo CCA (Hashin & Rosen 1964), com exceção do módulo

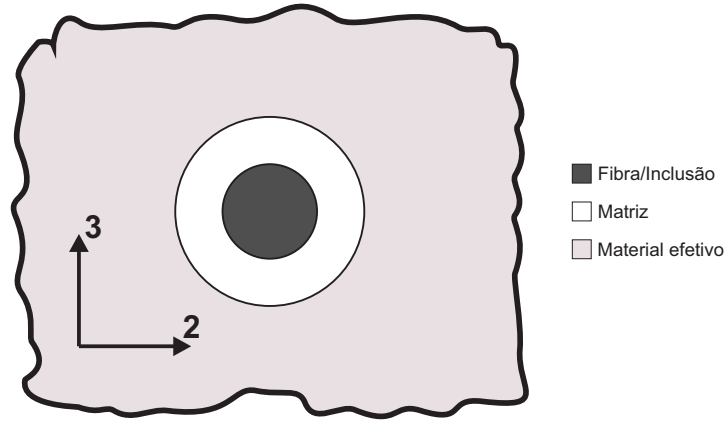


Figura 1: Esquema do Modelo Auto-Consistente Generalizado.

de elasticidade transversal angular. Por ser composto por três fases, inclusão, matriz e meio efetivo, esse modelo também é conhecido como o Modelo de Três Fases.

As expressões obtidas pelo modelo ACG para as propriedades efetivas do material compósito reforçado por fibras longas podem ser encontradas em Silva & Cavalcante (2016).

2.1.2 Parâmetros de Resistência das Lâminas

Na avaliação dos parâmetros de resistência das lâminas de material compósito, foram utilizadas expressões desenvolvidas com base na Resistência dos Materiais (Kaw 2005), sendo realizadas as devidas modificações para o caso de lâminas reforçadas por fibras transversalmente isotrópicas onde $(\varepsilon)_{ult}$ e $(\gamma)_{ult}$ representam as deformações normais e angulares últimas dos constituintes (Tabela 1).

Tabela 1: Parâmetros de Resistência das Lâminas

Resistência à tração na direção paralela às fibras (X_T)	
$X_T \leq$	$\begin{cases} E_{11} \cdot (\varepsilon_{11,f})_{ult} \\ E_{11} \cdot (\varepsilon_m)_{ult} \end{cases}$
Resistência à tração na direção perpendicular às fibras (Y_T)	
$Y_T \leq$	$\begin{cases} E_{22} \cdot \left[\frac{d}{s} \cdot \frac{E_m}{E_{22,f}} + \left(1 - \frac{d}{s}\right) \right] \cdot (\varepsilon_m)_{ult} \\ E_{22} \cdot \left[\frac{d}{s} + \left(1 - \frac{d}{s}\right) \cdot \frac{E_{22,f}}{E_m} \right] \cdot (\varepsilon_{22,f})_{ult} \end{cases}$
Resistência ao cisalhamento no plano da lâmina (S)	
$S \leq$	$\begin{cases} \mu_{12} \cdot (\gamma_m)_{ult} \cdot \left[\frac{d}{s} \cdot \frac{\mu_m}{\mu_{12,f}} + \left(1 - \frac{d}{s}\right) \right] \\ \mu_{12} \cdot (\gamma_{12,f})_{ult} \cdot \left[\frac{d}{s} + \left(1 - \frac{d}{s}\right) \cdot \frac{\mu_{12,f}}{\mu_m} \right] \end{cases}$

A relação d/s está relacionada à forma como as fibras estão distribuídas ao longo do plano de isotropia da lâmina (Kaw 2005). A Figura 2 ilustra dois possíveis arranjos de fibra encontrados na literatura, onde s representa o espaçamento entre os centroides de cada fibra e d o diâmetro das fibras. Neste trabalho, a relação d/s foi obtida assumindo que as fibras apresentam

um arranjo hexagonal, já que o mesmo reproduz melhor a forma como as fibras se distribuem no compósito, além de apresentar um plano de isotropia transversalmente às fibras, o que não acontece no arranjo quadrático. Para o caso de arranjos quadráticos, tem-se $d/s = (4f_f/\pi)^{1/2}$, enquanto que para arranjos hexagonais, tem-se $d/s = (2\sqrt{3}f_f/\pi)^{1/2}$, onde f_f representa a fração volumétrica de fibras.

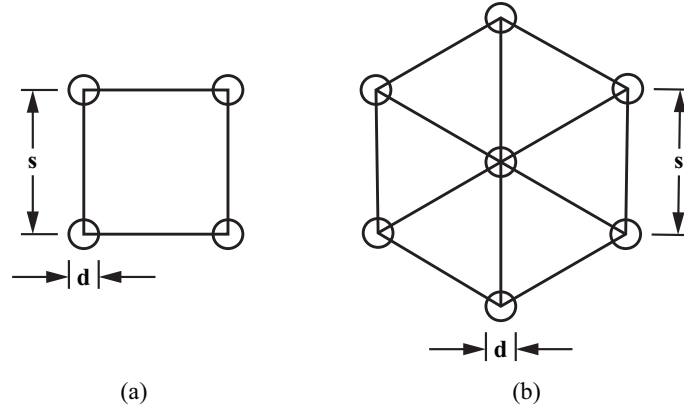


Figura 2: Espaçamento entre fibras para arranjos quadrático (a) e hexagonal (b).

2.1.3 Critério de Falha Macroscópico (Critério de Tsai-Hill)

O *Critério de Tsai-Hill* é um caso particular do critério da máxima energia de distorção aplicado à materiais ortotrópicos, para situações onde o elemento estrutural analisado encontra-se em *Estado Plano de Tensões*, que é o caso de lâminas e laminados de materiais compósitos (Kaw 2005), onde tem-se a seguinte expressão para a formulação clássica deste critério:

$$f(\sigma) = \left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X_T^2}\right) + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 \quad (1)$$

em que X_T , Y_T e S representam os parâmetros de resistência longitudinal, transversal e de cisalhamento no plano da lâmina, respectivamente, e σ_1 , σ_2 e σ_{12} são as tensões nas direções principais da lâmina. Assim, caso $f(\sigma) < 1$ o material não apresentará falhas, e caso $f(\sigma) \geq 1$ o material terá falhado. Para a realização da análise de primeira falha (*First Ply Failure*) de um laminado, faz-se necessária a avaliação do campo de tensões ao longo da espessura de todas as lâminas que compõem o laminado.

2.2 Análise de Tubos de Parede Fina de Material Compósito submetidos à Pressão Hidrostática

2.2.1 Teoria Clássica da Laminação

Geralmente, os materiais compósitos reforçados por fibras são utilizados na forma de laminados multidirecionais, constituídos por lâminas empilhadas e com orientações distintas. A Teoria Clássica da Laminação utiliza uma abordagem macromecânica para analisar o comportamento mecânico do laminado (Daniel & Ishai 1994).

Devido ao fato dos laminados apresentarem lâminas multidirecionais, é necessária a utilização de uma nomenclatura específica que possibilite a identificação adequada de cada lâmina que compõe o laminado, informando características como a localização de cada uma delas no laminado, seus materiais constituintes e o seu ângulo de orientação com relação a um eixo de referência. Esses itens são especificados pelo SLC (Standard Laminate Code) (Silva & Cavalcante 2016).

Para o desenvolvimento de expressões que permitem a análise de tensões e de deformações para cada lâmina que compõe o laminado, que está submetido à ação de momentos fletores (M_x e M_θ), momentos torçores ($M_{x\theta}$ e $M_{\theta x}$), esforços cisalhantes ($N_{x\theta}$ e $N_{\theta x}$) e carregamentos uniaxiais (N_x e N_θ), conforme a Figura 3, são adotadas algumas hipóteses simplificadoras (Daniel & Ishai 1994):

- Cada lâmina é ortotrópica, estatisticamente homogênea e apresenta um comportamento elástico linear.
- Pode-se admitir que a deformação e a tensão normal na direção da espessura do laminado são nulas ($\sigma_r = 0$ e $\varepsilon_r = 0$), pois a espessura é muito pequena.
- Não há deslocamento relativo entre as lâminas (aderência perfeita).
- Uma linha reta e perpendicular à superfície média do laminado permanece reta e perpendicular a esta superfície durante o processo de deformação ($\gamma_{xr} = \gamma_{\theta r} = 0$).
- Os esforços acontecem somente no plano do laminado ($\sigma_r = \tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0$).

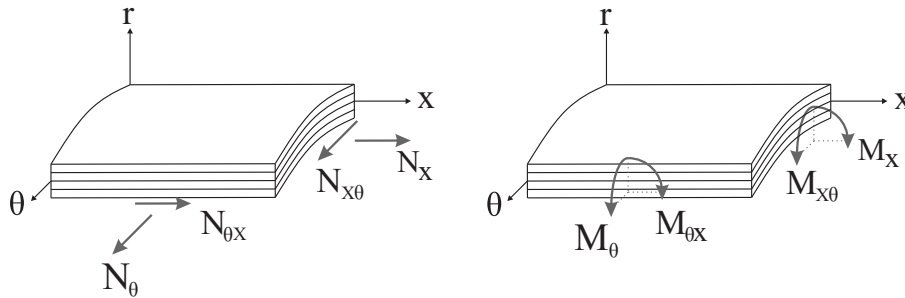


Figura 3: Esforços atuantes no plano do laminado.

Com base nas hipóteses cinemáticas mencionadas acima, é possível encontrar a seguinte expressão para as deformações de um laminado:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (r - r_0)\kappa \quad (2)$$

em que ε_0 representa as deformações e κ as curvaturas da superfície média do laminado. A superfície média do laminado da parede do tubo localiza-se em $r = r_0$.

A partir da Lei de Hooke e com base nas hipóteses cinemáticas e estáticas apresentadas acima, chega-se na seguinte relação entre as tensões e as deformações para cada lâmina que compõe o laminado:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} \text{ ou } \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

em que $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz constitutiva da lâmina, que pode ser avaliada a partir da matriz constitutiva da lâmina em suas direções principais da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T}, \text{ com } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que $m = \cos(\alpha)$ e $n = \sin(\alpha)$, sendo α o ângulo formado entre a direção longitudinal da lâmina e o eixo-x. As componentes da matriz constitutiva da lâmina nas suas direções principais são avaliadas a partir das propriedades efetivas da lâmina como segue:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \text{ e } Q_{66} = \mu_{12} \quad (5)$$

Como as lâminas são empilhadas possuindo orientações distintas, é necessário avaliar como cada uma delas irá trabalhar quando solicitadas nas direções principais do laminado (direções longitudinal e circunferencial do tubo), Figura 4.

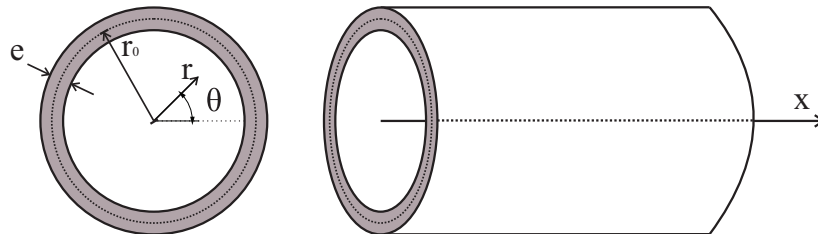


Figura 4: Sistema de coordenadas do tubo.

A relação entre forças e momentos resultantes com as deformações e curvaturas da superfície média do laminado é dada por:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

em que $A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$ (Matriz de Rigidez Extensional), $B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$ (Matriz de Rigidez Extensional-Flexional) e $D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$ (Matriz de Rigidez Flexional). Além disso, tem-se $t_k = z_k - z_{k-1}$ (espessura da k-ésima lâmina) e $z = r - r_0$, sendo r a coordenada radial, r_0 o raio médio do tubo e n o número de lâminas.

Nesse sentido, a matriz de flexibilidade de um laminado, contendo as submatrizes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$, pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}, \text{ onde } \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

2.2.2 Análise de Tensões

Ressalta-se que a formulação abaixo só se aplica para o caso de tubos de parede fina submetidos à pressões hidrostáticas interna e/ou externa, e que apresentam laminados balanceados na sua configuração, ou seja, sem acoplamento entre os esforços extensionais e flexionais. Assim, a deformação e a curvatura na direção circunferencial podem ser encontradas a partir das Equações (8).

$$\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{u_r}{r_0} \text{ e } \kappa_{\theta} = -\frac{u_r}{r_0^2} \quad (8)$$

A depender das condições de vinculação do tubo, o mesmo pode ser classificado como longo ou curto (anel), algo que interfere no deslocamento radial do tubo (u_r).

Para tubos longos. Nessa situação, as curvaturas e deformações ao longo da direção longitudinal do tubo são nulas, $\varepsilon_x^0 = \gamma_{x\theta}^0 = \kappa_x = \kappa_{x\theta}^0 = 0$, o que implica em:

$$u_r = \frac{(P_i \cdot r_i - P_e \cdot r_e) \cdot r_0}{A_{22} - B_{22}/r_0} \quad (9)$$

Desse modo, para a situação de tubos longos, pode-se obter os resultados para as Equações (8), além de estimar as componentes de tensão por meio da Equação (3).

Para tubos curtos. Nessa situação, os esforços atuantes nas extremidades do tubo são admitidos nulos, $N_x = N_{x\theta} = M_x = M_{x\theta} = 0$, ou seja, o tubo possui suas extremidades livres, o que implica em:

$$u_r = \frac{a_{22} \cdot d_{22} - b_{22}^2}{d_{22} + b_{22}/r_0} \cdot (P_i \cdot r_i - P_e \cdot r_e) \cdot r_0 \quad (10)$$

As demais componentes das deformações e curvaturas no plano médio do laminado para o caso de tubos curtos podem ser encontradas por meio da Equação (11).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{26} & b_{26} \\ b_{12} & d_{12} \\ b_{26} & d_{26} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \end{Bmatrix}, \text{ onde } \begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{22} \cdot d_{22} - b_{22}^2} \begin{bmatrix} d_{22} & -b_{22} \\ -b_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta^0 \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Nas Equações (9) e (10), r_i e r_e são os raios interno e externo do tubo, respectivamente, e P_i e P_e são as pressões interna e externa atuantes no tubo, nesta ordem.

2.2.3 Análise de Resistência

No procedimento de análise de resistência, são avaliados os níveis de tensão nas lâminas do laminado nas direções principais do tubo, considerando-se uma determinada pressão atuante ($P_{atuante}$). Então são avaliadas as componentes de tensão atuantes nas direções principais de cada lâmina, por meio da equação abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

A partir dessas componentes de tensão, é possível avaliar o índice de falha por meio da Equação (1), e assim obter um valor para a razão de resistência (λ), como segue:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{f(\sigma)}} \quad (13)$$

Para a estimativa da pressão de ruptura ($P_{ruptura}$), associada à primeira falha (*First Ply Failure*), deve-se utilizar o menor valor de λ , obtido ao longo da espessura do laminado.

$$P_{ruptura} = \lambda_{minimo} \cdot P_{atuante} \quad (14)$$

2.2.4 Pressão Externa Crítica

No caso do tubo estar submetido a ação de uma pressão externa uniforme, deve-se considerar que a falha pode ocorrer sem que haja uma falha do material, devido ao fenômeno da flambagem. Esse tipo de falha levará o tubo ao colapso e fará com que ele assuma uma nova forma para a seção transversal, devido a um processo de deflexão exagerada na direção radial provocado pela flambagem.

A expressão analítica mostrada abaixo para o cálculo da pressão externa crítica de tubos laminados de materiais compósitos foi proposta por Rasheed & Yousif (2005). Esta expressão

baseia-se na Teoria Clássica da Laminação e na Teoria da Instabilidade Linear (Bazant & Cedolin 2010), logo, só se aplica a tubos de parede fina e não considera a existência de imperfeições geométricas ou nos materiais que compõem a parede do tubo.

$$p_{cr} = 3 \left(\frac{D_{ani}}{r_0^3} \right) \left(\frac{1 - \Psi^2/\alpha}{1 + \alpha + 2\Psi} \right), \text{ onde } \Psi = \left(\frac{1}{r_0} \right) \left(\frac{B_{ani}}{A_{ani}} \right) \text{ e } \alpha = \left(\frac{1}{r_0^2} \right) \left(\frac{D_{ani}}{A_{ani}} \right) \quad (15)$$

Assim como na formulação para análise de tensões apresentada na seção anterior, são impostas as mesmas condições de vinculação ou de extremidade livre para tubos longos e curtos no processo de análise da pressão crítica. Os coeficientes A_{ani} , B_{ani} e D_{ani} são encontrados como indicado em Rasheed & Yousif (2005).

Na prática, os tubos sem a atuação de carregamentos nas suas extremidades, encontram-se em condições intermediárias as admitidas acima para tubos curtos (anéis) e longos.

2.3 Confiabilidade Estrutural

Algo bastante desejável em um projeto estrutural é que a estrutura possua um desempenho satisfatório ao longo de toda sua vida útil e que a mesma não venha a falhar (Barbosa 2004).

O estudo da probabilidade da violação de um estado limite em um sistema estrutural está relacionado ao estudo da confiabilidade estrutural, levando-se em consideração as falhas associadas à toda a estrutura, bem como aquelas associadas aos colapsos parciais da mesma (Estado Limite Último). Também devem ser levadas em consideração as disfunções provocadas no uso da estrutura (Estado Limite de Utilização) (Castanheira 2004).

2.3.1 Metodologia de Análise da Confiabilidade Estrutural

No processo de avaliação da *Confiabilidade Estrutural*, pode-se armazenar as variáveis de projeto (variáveis aleatórias) em um vetor, chamado de *vetor aleatório* (Equação (16)).

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (16)$$

Deste modo, a probabilidade de falha da estrutura é avaliada a partir das incertezas associadas às variáveis aleatórias de projeto. Inicialmente, é necessário considerar as variáveis de projeto do sistema em questão, estabelecendo-se uma relação entre o nível de solicitação da estrutura e sua resistência, obtendo-se, assim, a chamada *Função do Estado Limite* (Equação (17)).

$$G(\mathbf{X}) = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (17)$$

O problema fundamental da confiabilidade estrutural pode ser expresso em termos da resistência e da solicitação atuante sobre a estrutura (Equação (18)):

$$G(R, S) = R - S \quad (18)$$

onde R representa a resistência da estrutura, e S representa as solicitações a ela impostas, e ambas as variáveis (resistência e solicitação) são variáveis aleatórias. A superfície de falha é então definida como $G(\mathbf{X}) = 0$, que restringe as regiões de falha e de segurança. Caso $G(\mathbf{X}) > 0$ (Resistência maior que a Solicitação) a estrutura se encontra em uma zona de segurança e caso $G(\mathbf{X}) \leq 0$ (Solicitação maior ou igual à Resistência) a estrutura se encontra na zona de falha. A Figura 5 ilustra esta situação para o caso onde existem duas variáveis aleatórias ($\mathbf{X} = (X_1, X_2)$).

Outra possível abordagem para o *problema fundamental da confiabilidade estrutural* se utiliza da definição de *Margem de Segurança* (M).

$$M = R - S \quad (19)$$

Onde valores negativos da margem de segurança indicam falha da estrutura, valores positivos indicam segurança e valores nulos indicam a condição de estado limite.

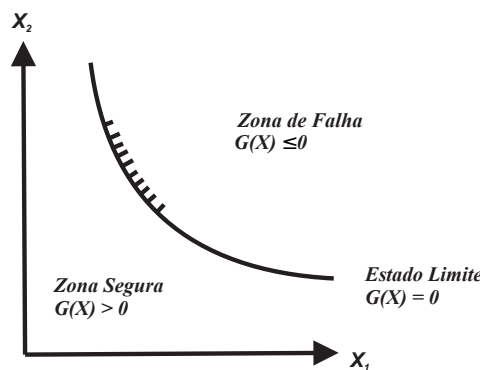


Figura 5: Domínios de Falha e de Segurança das Variáveis Aleatórias.

2.3.2 Probabilidade de Falha e Índice de Confiabilidade

O grande interesse da *Confiabilidade Estrutural* está na avaliação da probabilidade da *Função do Estado Limite* atingir valores pertencentes à zona de falha, $G(\mathbf{X}) \leq 0$ (Santos 2012).

Deste modo, a probabilidade de falha pode ser obtida por meio da equação abaixo:

$$P_f = \int \dots \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (20)$$

onde $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa a Função Densidade de Probabilidade (Probability Density Function - PDF) conjunta das variáveis aleatórias, que seria a probabilidade relativa de ocorrer um evento definido pelo vetor aleatório $\mathbf{X}$. A integração deve ser realizada sobre todo o domínio de falha definido por $G(\mathbf{x}) \leq 0$.

Pode-se ainda definir o parâmetro denominado de Confiança. Este parâmetro indica a probabilidade de uma estrutura não violar um determinado Estado Limite, no entanto, o seu emprego passa a ser problemático quando do uso de técnicas numéricas, pois seu valor se aproxima muito de 1, uma vez que costuma-se adotar valores muito pequenos para a Probabilidade de Falha. Assim, por uma questão de limitação de representação numérica nos problemas resolvidos numericamente, geralmente opta-se por utilizar a Probabilidade de Falha em detrimento do parâmetro que mede a Confiança. O mesmo pode ser tratado como o evento complementar à Probabilidade de Falha, como segue:

$$C = 1 - P_f \quad (21)$$

Em termos da *Margem de Segurança* é possível encontrar a probabilidade de falha (Figura 6(a)) por meio da Equação (22):

$$P_f = P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \quad (22)$$

Admitindo-se R e S como variáveis aleatórias com distribuição normal, a distribuição de M também será do tipo normal. Caso seja assumida a hipótese de independência entre R e S , o valor médio (μ_M) e o desvio padrão (σ_M) de M podem ser calculados a partir dos valores médios (μ_R e μ_S) e dos desvios padrões de R e S (σ_R e σ_S), Equações (23) e (24).

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (23)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (24)$$

Transformando M em uma variável normal padrão Y , para avaliação das probabilidades associadas à variável M , tem-se:

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (25)$$

Nota-se que a variável Y possui média nula e desvio-padrão unitário, e a partir da mesma pode-se definir uma medida da probabilidade de falha. Esta medida corresponde à distância entre o ponto $M = 0$ e a origem (valor da média) da distribuição da variável Y , Figura 6(b), ou seja, a distância entre o limite da falha e o valor médio assumido pela variável normal padrão da margem de segurança. Essa medida é denominada *Índice de Confiabilidade*, sendo representada pela letra grega β , podendo ser obtida por meio da Equação (26).

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (26)$$

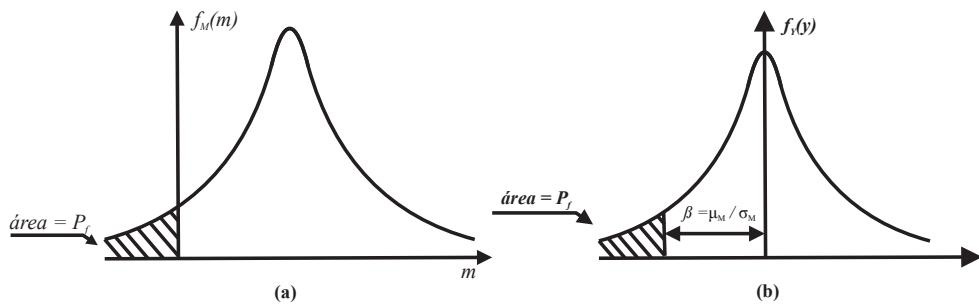


Figura 6: Probabilidade de falha em função da margem de segurança (a) e da variável normal padrão da margem de segurança y (b).

Contudo, o cálculo da probabilidade de falha por meio da Equação (20) é uma tarefa bastante complexa, já que em praticamente todos os casos não se tem posse da PDF conjunta das variáveis aleatórias, levando-se à necessidade da utilização de outras técnicas analíticas e/ou numéricas (Santos & Gouveia 2015).

- **Métodos Numéricos** - Um dos métodos numéricos utilizados na solução de problemas de confiabilidade é o *Método Monte Carlo*, o qual consiste na geração randômica de valores para as variáveis aleatórias, seguida pela combinação desses valores na *Função do Estado Limite* do modelo em questão. Deste modo, são simulados os possíveis valores da *Função do Estado Limite*, levando-se à estimativa da probabilidade de falha por meio do percentual de valores inferiores a zero em relação à quantidade total de amostras.
- **Métodos Analíticos** - Estes métodos possibilitam o uso de todas as informações das variáveis aleatórias do problema, existindo a possibilidade de lidar com quaisquer tipos de distribuições estatísticas. Pode-se citar como exemplos de métodos analíticos os métodos *First Order Reliability Method* (FORM), *Second Order Reliability Method* (SORM) e *First Order Second Moment* (FOSM). Nos métodos listados, as variáveis aleatórias originais são transformadas em variáveis normais padrão, para que a solução da integral múltipla de grande complexidade (Equação (20)) se torne mais simples devido às propriedades de simetria e decaimento exponencial gaussiano no espaço normal reduzido (Santos & Gouveia 2015). Assim, o cálculo da probabilidade de falha é analisado como sendo um problema de otimização não linear com restrição, sendo resolvido de forma iterativa pelo algoritmo desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aperfeiçoado por Rackwitz e Fiessler (1978), denominado de *Algoritmo HLRF*.

2.4 Método Monte Carlo

Este método tem sido utilizado na solução de problemas complexos, podendo prever o comportamento de sistemas de qualquer natureza, não impondo limite quanto ao número de variáveis do problema ou à complexidade do modelo, permitindo a solução dos problemas com uma certa facilidade do ponto de vista teórico e computacional.

O método consiste na avaliação dos possíveis cenários em que se encontra um sistema, por meio da geração de um grande número de amostras a partir de diferentes valores assumidos pelas variáveis aleatórias.

Conforme apresentado nas Equação (20), a estimativa da probabilidade de falha de um sistema estrutural envolve uma integral sobre todo o domínio de falha (D_f), onde $G(\mathbf{X}) \leq 0$.

Pode-se ainda representar o domínio de falha com o auxílio de uma função indicadora ($I[\mathbf{X}]$), onde:

$$\begin{aligned} I[\mathbf{X}] &= 1 \text{ se } x \in D_f \text{ (falha)} \\ I[\mathbf{X}] &= 0 \text{ se } x \notin D_f \text{ (sobrevivência)} \end{aligned}$$

Deste modo, pode-se calcular as integrais das Equações (20) e (22) sobre todo o domínio, permitindo que a função indicadora restrinja o valor das integrais ao próprio domínio de falha. Escrevendo a Equação (20) de forma simplificada, integrando sobre todo o domínio (Ω) da função do estado limite e incluindo a função indicadora, tem-se:

$$P_f = \int_{\Omega} I[\mathbf{X}] f_X(\mathbf{x}) d\Omega \quad (27)$$

Assim, o valor da probabilidade de falha pode ser aproximado com base em uma amostra de tamanho finito, como segue:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{n_{si}} \sum_{i=1}^{n_{si}} I[\mathbf{X}_i] \quad (28)$$

onde a barra indica o valor médio de P_f e n_{si} é o número de simulações, sendo este um estimador não-tendencioso da probabilidade de falha.

Devido à probabilidade de falha ser estimada com base em um número finito de amostras, a mesma está sujeita a um erro estatístico. A variância da probabilidade de falha pode ser estimada por meio da Equação (29).

$$Var[P_f] = \frac{1}{n_{si} - 1} \sum_{i=1}^{n_{si}} (I[\mathbf{X}_i] - \overline{P_f})^2 \quad (29)$$

É possível notar que a Equação (29) converge à zero quando $n_{si} \rightarrow \infty$, e que seu valor aumenta a medida em que n_{si} diminui. Quanto menor for a ordem de grandeza da probabilidade de falha, maior será o número de amostras geradas necessário para obter uma mesma variância. É possível estimar o número mínimo de amostras geradas para uma ordem de grandeza da probabilidade de falha e do seu coeficiente de variação desejado por meio da Equação (30).

$$n_{si} = \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{(1 - P_f)}{P_f} \quad (30)$$

em que δ representa $cov[P_f]$ e P_f indica a ordem de grandeza da probabilidade de falha.

Deste modo, nota-se que o Método Monte Carlo consiste na geração de n_{si} amostras e da verificação da ocorrência de falha por meio da função indicadora para estimativa da probabilidade de falha.

2.4.1 Geração de amostras de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão

Grande parte do Método Monte Carlo consiste na geração das amostras, onde cada amostra contem n variáveis aleatórias. Em situações onde não se possui informações sobre o tipo de distribuição das variáveis aleatórias, é comum admitir que as mesmas possuem distribuição normal padrão.

O método mais utilizado para a geração de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão é o proposto por Box e Muller (1958) (Landau & Binder 2005), onde um par de amostras da variável aleatória X pode ser estimada por meio da Equação (31).

$$X_k = \mu + \sigma \cdot Z_k \quad (31)$$

de modo que μ representa a média da variável aleatória, σ representa seu desvio padrão, e Z_1 e Z_2 são obtidos por meio das Equações (32) a seguir:

$$Z_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln U_2} \cdot \cos(2\pi U_1) \text{ e } Z_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln U_2} \cdot \sin(2\pi U_1) \quad (32)$$

onde U_1 e U_2 são variáveis aleatórias com distribuição uniforme [0,1].

2.4.2 Avaliação do coeficiente de minoração de carga

O presente trabalho faz uso da função *fzero* do MATLAB[®] para resolver o problema de zero de funções a seguir, onde o propósito é avaliar a pressão hidrostática que minimizaria a diferença entre a Probabilidade de Falha de Projeto ($P_{f,projeto}$), definida previamente, e a Probabilidade de Falha provocada pela pressão hidrostática a ser determinada (P_f).

$$\delta_{P_f} = P_f - P_{f,projeto} \quad (33)$$

Deste modo, objetiva-se encontrar uma pressão hidrostática aplicada que aproxima de zero o valor de δ_{P_f} , possibilitando a estimativa de um coeficiente de minoração de carga (γ_{carga}), como mostrado a seguir:

$$\gamma_{carga} = \frac{P_{i,e}^{max}}{\bar{P}_{i,e}} \quad (34)$$

onde $P_{i,e}^{max}$ indica o maior valor de pressão interna ou externa que pode ser aplicada ao tubo, que seria a pressão hidrostática de resistência calculada a partir da solução do problema de zero de funções apresentado acima, considerando-se o caráter estatístico das variáveis aleatórias, e $\bar{P}_{i,e}$ indica o valor da pressão interna ou externa de resistência associada aos valores médios das variáveis aleatórias, que seria a pressão hidrostática que poderia ser aplicada ao tubo, caso as variáveis aleatórias apresentassem um caráter determinístico, adotando-se para as mesmas os seus valores médios.

3 Resultados e Discussões

3.1 Análises de Sensibilidade da Resistência do Tubo

Nas análises a seguir, foram utilizados valores encontrados na literatura e em relatórios técnicos para as propriedades mecânicas médias dos materiais constituintes, Tabela 2. No processo de análise de sensibilidade, onde se deseja avaliar a influência de cada parâmetro na confiabilidade do tubo de forma individual, foram assumidos valores de coeficiente de variação para estes parâmetros variando de 0 a 5%, além disso, foi adotado um valor para a probabilidade de falha de projeto ($P_{f,projeto} = 10^{-3}$) de ordem próxima aos valores normalmente empregados na construção civil (por conta de não existirem normas determinando faixas de valores para esse parâmetro), analisando-se, assim, os valores de pressão hidrostática que poderiam ser aplicados adotando-se diferentes valores para o coeficiente de variação dentro deste intervalo.

Tabela 2: Propriedades mecânicas médias dos materiais constituintes

Parâmetro	Vidro-E	Epoxy 8551-7
$\rho(kg/m^3)$	2540	1273.3
$E(MPa)$	72395	4080
$\mu(MPa)$	30336.9	1478
$\nu(MPa)$	0.2	0.38
$(\sigma_{11})_{ult}(MPa)$	2150	98.9
$(\sigma_{12})_{ult}(MPa)$	-	110.8
$(\varepsilon_{11})_{ult}(\%)$	2.97	2.42
$(\gamma_{12})_{ult}$	-	0.075

Ressalta-se que em casos onde não se conhece o tipo de distribuição estatística das variáveis aleatórias, é comum assumir que estas possuem distribuição normal.

Os resultados exibidos na Figura 7 foram obtidos assumindo-se que os tubos se enquadram na categoria de tubos longos, e que estes possuem um diâmetro interno médio igual a 317,5mm (12,5”), e que suas paredes são constituídas por 12 lâminas, apresentando 0,55mm de espessura média, cada lâmina.

Por meio da Equação (30), foi estimado o número de simulações via Método Monte Carlo necessárias para obtenção de resultados com $\delta = 0.0466$ e probabilidade de falha com ordem de grandeza de 10^{-3} , resultando em um total de 460517 simulações.

3.2 Análise de Sensibilidade da Pressão Externa Crítica

Com base nos resultados apresentados por Silva & Cavalcante (2016), quando submetidos à uma pressão hidrostática externa, os tubos de materiais compósitos reforçados por fibras de vidro falharão por conta do fenômeno da flambagem antes que ocorra uma falha por ruptura,

ou seja, falha no material, fato que ocorre para quaisquer configurações do laminado (orientação das lâminas, sequência das lâminas e fração volumétrica de fibras) confeccionado com os constituintes apresentados na Tabela 2.

Deste modo, como os tubos analisados nesta seção estão submetidos à ação de pressões hidrostáticas externas, a função do estado limite será avaliada levando-se em consideração apenas a pressão externa crítica de flambagem.

Aqui são apresentados os resultados e discussões para o caso de tubos submetidos à pressões hidrostáticas externas.

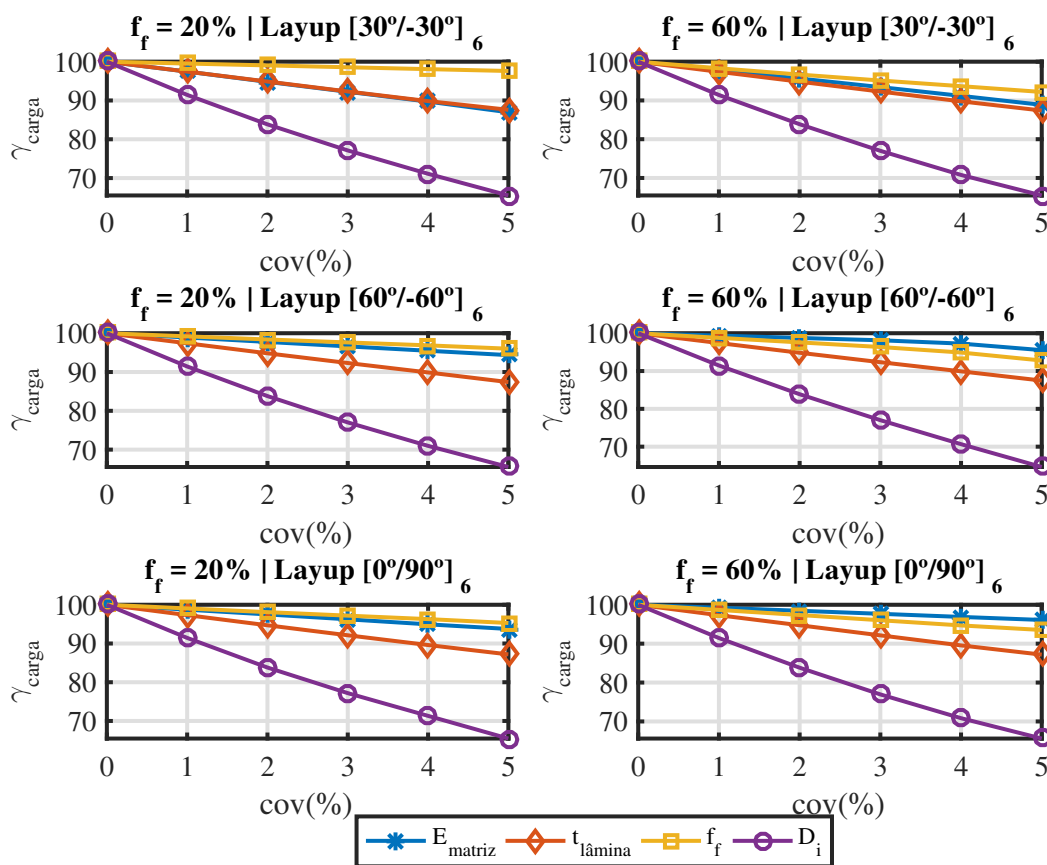


Figura 7: Análise de sensibilidade da pressão externa crítica.

3.2.1 Análise de sensibilidade da pressão externa crítica (assumindo-se um comportamento aleatório apenas para o Módulo de Elasticidade da Matriz)

Com base nos resultados apresentados na Figura 7, para as configurações com fração volumétrica de fibras igual a 20%, nota-se que os valores dos coeficientes de minoração da pressão externa crítica são inferiores àqueles para uma fração volumétrica de fibras igual a 60%. Isto ocorre por conta das lâminas possuírem um maior teor de matriz para o primeiro caso, logo, o laminado é afetado de forma mais intensa quando levadas em consideração as incertezas associadas ao Módulo de Elasticidade da Matriz (E_{matriz}).

Nota-se, ainda, que para a situação onde o ângulo de orientação de fibras é igual a 30° , o coeficiente de minoração de carga foi inferior aos demais casos. Isso ocorre por conta dos maiores níveis de esforços atuarem na direção circunferencial do tubo, logo, ângulos de orientação de fibras mais próximos a 0° acabam por diminuir a rigidez do tubo na direção mais solicitada (circunferencial).

Uma diminuição do carregamento máximo que pode ser imposto aos tubos ocorre a medida em que a incerteza de E_{matriz} aumenta.

3.2.2 Análise de sensibilidade da pressão externa crítica (assumindo-se um comportamento aleatório apenas para as Espessuras das Lâminas)

Com base nos resultados apresentados na Figura 7, para todos os valores de fração volumétrica e de ângulos de orientação de fibras, os coeficientes de minoração de carga (γ_{carga}) foram iguais. Assim, torna-se necessária a análise deste parâmetro para laminados com diferentes quantidades de lâminas para uma avaliação de sua influência sobre as características mecânicas do tubo. Contudo, a diminuição do carregamento máximo que pode ser imposto ao tubo ocorre a medida em que a incerteza de t_{lamina} aumenta.

Vale ressaltar, que as soluções analíticas nas quais se baseiam a metodologia empregada no presente trabalho, impossibilitam considerar a variação da espessura das lâminas ao longo das direções circunferencial e longitudinal do tubo.

3.2.3 Análise de sensibilidade da pressão externa crítica (assumindo-se um comportamento aleatório apenas para a Fração Volumétrica de Fibras)

A Figura 7 indica que variações nas menores frações volumétricas de fibras possuem menor influência sobre o desempenho do tubo quando comparadas às configurações com maiores frações volumétricas de fibras.

Uma diminuição do carregamento máximo que pode ser imposto ao tubo ocorre a medida em que a incerteza associada à f_f aumenta.

3.2.4 Análise de sensibilidade da pressão externa crítica (assumindo-se um comportamento aleatório apenas para o Diâmetro Interno do Tubo)

Com base nos resultados apresentados na Figura 7, nota-se que todas as configurações apresentam um comportamento semelhante quando levadas em consideração as incertezas associadas ao diâmetro interno do tubo. O grande empecilho da metodologia empregada é a impossibilidade de considerar variações do diâmetro interno ao longo das direções longitudinal e circunferencial do tubo (situações onde o tubo apresentaria uma seção transversal ovalizada antes da aplicação do carregamento).

Percebe-se, ainda, que a medida em que o coeficiente de variação aumenta, o desempenho dos tubos cai de forma mais brusca na comparação com os resultados onde os demais parâmetros avaliados sofreram variações nas amostras geradas, ou seja, a pressão externa crítica é mais sensível à variação do diâmetro em relação aos demais parâmetros.

3.3 Análise de Sensibilidade da Pressão Interna de Ruptura

Os resultados a seguir foram obtidos para uma configuração do tubo com fração volumétrica de fibras em cada lâmina igual a 40% e orientação das fibras ao longo das direções longitudinal e circunferencial $[0^\circ/90^\circ]$, submetido à ação de uma pressão hidrostática interna, onde assume-se que a ruptura do tubo ocorre quando da primeira falha (First Ply Failure) de uma das lâminas que compõem o laminado da parede do tubo.

Com base na Figura 8, percebe-se um decaimento da carga que pode ser aplicada com o aumento do coeficiente de variação para o Módulo de Elasticidade da Matriz. Isso ocorre por conta da dependência da resistência à tração na direção paralela às fibras (Y_T) em relação ao Módulo de Elasticidade da Matriz.

Para o caso de variações na espessura das lâminas, o desempenho diminui por conta da influência das espessuras das lâminas nos coeficientes de rigidez do laminado (A_{ij} , B_{ij} e D_{ij}).

Quanto à fração volumétrica de fibras, esta provocou grande influência no desempenho dos tubos, já que afeta tanto os parâmetros de resistência quanto os de rigidez.

Assim como no caso de tubos submetidos à pressão externa, variações no diâmetro possuem grande influência na confiabilidade dos tubos. Neste caso, isso ocorre por conta de uma variação percentual de 5% no diâmetro afetar consideravelmente as dimensões totais do tubo, o que não acontece com os demais parâmetros avaliados neste trabalho. Os resultados são apresentados na Figura 8.

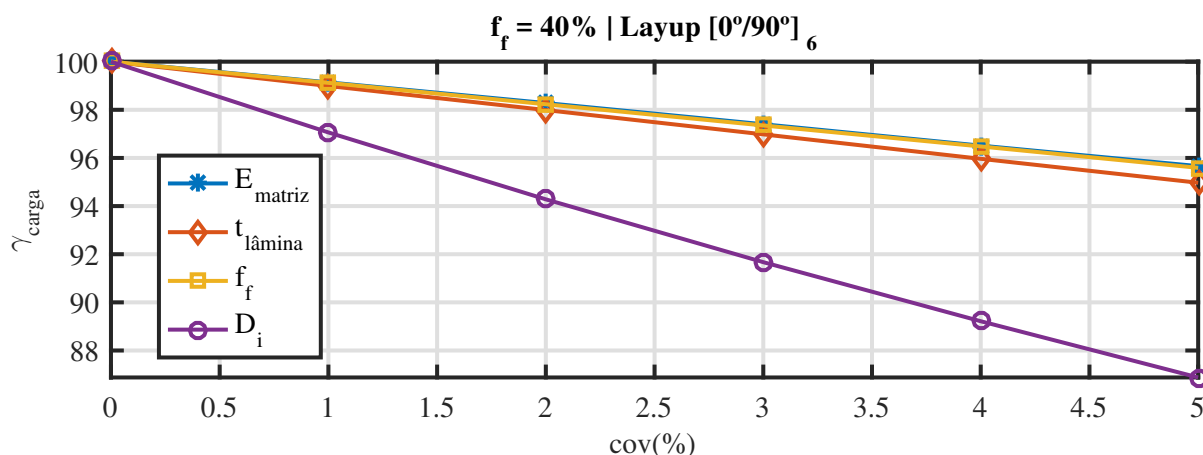


Figura 8: Análise de sensibilidade da pressão interna de ruptura.

4 Conclusões

A partir dos resultados apresentados, nota-se que o parâmetro com maior influência no desempenho dos tubos é o diâmetro interno. Contudo, devido ao fato da metodologia aqui empregada impossibilitar a avaliação de configurações de tubo com seções transversais ovalizadas antes mesmo de sofrer deformações por conta dos carregamentos aplicados, os resultados levam a crer que a grande influência deste parâmetro no caso de tubos submetidos à pressões externas está associada à variação da esbelteza dos mesmos, uma vez que variações no diâmetro

mantendo fixa a espessura das paredes dos tubos podem implicar em tubos mais esbeltos e mais susceptíveis à flambagem.

Para tubos submetidos à pressões externas, variações na espessura das lâminas podem levar a uma situação semelhante à variação do diâmetro. Contudo, o diâmetro é um parâmetro com uma ordem de grandeza muito superior à espessura das lâminas e termina por influenciar de forma mais significativa na esbeltez dos tubos e, conseqüentemente, no seu desempenho. Já para o caso de tubos sob a ação de pressões internas, a espessura tem grande influência por afetar os parâmetros de rigidez do laminado.

Para o caso da variação do Módulo de Elasticidade da Matriz, deve-se adotar um controle rigoroso no processo de fabricação, mais especificamente quanto aos processos de impregnação da resina sobre as fibras, adição de catalisadores e tensionamento das fibras durante o processo de Enrolamento Filamentar, já que em algumas configurações uma variação de 5% neste parâmetro pode representar uma redução de aproximadamente 13% sobre a pressão crítica média desses tubos. A pressão interna de ruptura também é afetada por esse parâmetro, devido à dependência do do parâmetro de resistência Y_T com relação ao Módulo de Elasticidade da Matriz.

Quanto à fração volumétrica de fibras, nota-se uma redução de desempenho maior em casos onde o parâmetro em questão possui valores mais altos. Isso ocorre por conta da análise ter sido feita com base no coeficiente de variação, o que implica em menores valores de incertezas para parâmetros com menores valores médios.

A Tabela 3 mostra os maiores valores de redução de carga encontrados entre todas as situações para cada um dos parâmetros avaliados para o caso de tubos submetidos à pressões hidrostáticas externas e internas.

Tabela 3: Valores máximos de redução de carga para os casos analisados.

Parâmetro	Redução - P_{crit} (%)	Redução - P_{int} (%)
E_{matriz}	13.04	4.34
t_{lamina}	12.82	5.03
f_f	7.81	4.41
D_i	35.37	13.12

Agradecimentos

Ao LCCV (Laboratório de Computação Científica e Visualização) do Campus do Sertão - AL, por disponibilizar a infra-estrutura necessária à realização desta pesquisa.

Referências

- Barbosa, A. H. (2004), ‘Análise de confiabilidade estrutural utilizando o método de monte carlo e redes neurais’.
- Bazant, Z. P. & Cedolin, L. (2010), *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, 1 edn, World Scientific Publishing Company.

- Box, G. E., Muller, M. E. et al. (1958), 'A note on the generation of random normal deviates', *The annals of mathematical statistics* **29**(2), 610–611.
- Castanheira, A. M. (2004), 'Avaliação da Confiabilidade de Vigas Metálicas Dimensionadas pela NBR 8800'.
- Christensen, R. M. (1990), 'A critical evaluation for a class of micro-mechanics models', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **38**(3), 379–404.
- Christensen, R. M. & Lo, K. H. (1979), 'Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **27**(4), 315–330.
- Daniel, I. & Ishai, O. (1994), 'Engineering mechanics of composite materials'.
- Hashin, Z. & Rosen, B. W. (1964), 'The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials', *Journal of Applied Mechanics* **31**(2), 223–232.
- Kaw, A. (2005), *Mechanics of Composite Materials*, Mechanical and Aerospace Engineering Series, Taylor & Francis.
- Landau, D. P. & Binder, K. (2005), *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Second Edition, Vol. 38.
- M. Hasofer, A. & Lind, N. (1974), 'Exact and invariant second moment code format', **100**, 111–121.
- Meniconi, L. C. M., Reid, S. R. & Soden, P. D. (2001), 'Preliminary design of composite riser stress joints', *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **32**(5), 597–605.
- Rackwitz, R. & Fiessler, B. (1978), 'Non-normal vectors in structural reliability', *SFB* **96**, 1–22.
- Rasheed, H. a. & Yousif, O. H. (2005), 'Stability of Anisotropic Laminated Rings and Long Cylinders Subjected to External Hydrostatic Pressure', *Journal of Aerospace Engineering* **18**(3), 129–138.
- Santos, R. V. d. & Gouveia, L. P. d. (2015), 'Influência do Truncamento das Variáveis Aleatórias na Confiabilidade de Tubos de Revestimento sujeitos à Pressão Interna', in 'Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering'.
- Santos, S. R. d. (2012), 'Desenvolvimento de algoritmos matemáticos aplicados a confiabilidade estrutural', PhD thesis, Universidade Federal do Paraná.
- Silva, R. M. & Cavalcante, M. A. A. (2016), 'Estudo Comparativo de Tubos de Materiais Compósitos e de Materiais Homogêneos submetidos à Pressão Hidrostática', in 'Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering', Brasília.