



ANÁLISE CRÍTICA DA TEORIA DE VIGAS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS POR MEIO DA TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

Alex Oliveira da Silva

Márcio André Araújo Cavalcante

alex.oliveira@ctec.ufal.br

marcio.cavalcante@ctec.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas

Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Alagoas, Maceió, Brasil

Abstract. As vigas são elementos projetados para suportar carregamentos aplicados perpendicularmente ao seu eixo longitudinal e desempenham um papel importante em vários campos da engenharia. Além disso, conhecer como atuam as tensões nestes elementos estruturais é um fator determinante para realizar o projeto dos mesmos. O projeto estrutural deve atender a critérios de segurança e economia, assim, conhecer como atuam as tensões permite realizar um dimensionamento adequado, diminuindo a possibilidade de subdimensionamento ou superdimensionamento. Atualmente, a teoria de vigas mais empregada baseia-se na Resistência dos Materiais, sendo conhecida como Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli, desta forma, realizar uma análise crítica da mesma por meio da Teoria da Elasticidade Linear pode nos ajudar a compreender melhor suas limitações e indicar recomendações quanto ao emprego da mesma. Neste trabalho, utiliza-se uma solução analítica da Teoria da Elasticidade Linear baseada no emprego de séries de Fourier, permitindo-se obter os campos de tensões atuantes na viga de forma mais precisa, uma vez que não são consideradas as hipóteses simplificadoras e restritivas da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Assim, pode-se observar o fenômeno da concentração de tensões nas regiões próximas às cargas concentradas, algo não observável na Teoria de Vigas da Resistência dos Materiais. Além disso, a distribuição de tensão também se mostra diferente para algumas componentes de tensão, como é o caso da componente de tensão normal transversal, negligenciada na Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Destaca-se que a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli não se mostra adequada para determinação dos campos de tensões nas regiões com forças concentradas, mostrando resultados melhores em regiões mais distantes da carga aplicada, onde se verifica o princípio de Saint Venant. Ao negligenciar a componente de tensão normal transversal, a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli se mostra inadequada na caracterização do estado de tensão presente nas regiões de aplicação das cargas concentradas, justificando o emprego de consideráveis coeficientes de segurança nos projetos de dimensionamento de vigas baseados na Resistência dos Materiais.

Keywords: Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli, Teoria da Elasticidade Linear, Séries de Fourier, Análise de Tensões.

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC,
Brazil, November 5-8, 2017.

1 INTRODUÇÃO

As vigas são usualmente membros prismáticos, longos e retos, projetados para suportar carregamentos transversais aplicados ao longo dos vários pontos de seu eixo longitudinal. Ao realizar o projeto de uma viga, se faz necessário considerar muitos fatores, incluindo o tipo de estrutura em que a viga será empregada, dentre elas, a estrutura de um avião, de um automóvel, de uma ponte, de um edifício, dentre outros. Dentre esses fatores, podemos ainda citar o material constituinte a ser usado na confecção da viga, bem como as cargas que devem ser suportadas, as condições ambientais que se encontram e os custos envolvidos.

No entanto, no que diz respeito à análise de resistência, a tarefa compreende em selecionar uma forma e as dimensões da viga, de modo que as tensões não excedam as tensões admissíveis do material que compõem a viga. De forma geral, compreender o comportamento mecânico é essencial para projetar estruturas que sejam seguras (GERE e GOODNO, 2013).

As teorias de vigas baseadas na Resistência dos Materiais são extensivamente empregadas para analisar elementos esbeltos, como colunas, arcos e outros. A principal vantagem apresentada por estas teorias é a redução de um problema essencialmente tridimensional num modelo que só depende da coordenada axial da viga, ou seja, do seu eixo longitudinal. Os elementos estruturais unidimensionais são mais simples e computacionalmente mais eficientes do que elementos bidimensionais, como as placas e as cascas, e elementos tridimensionais, como os blocos, as sapatas de fundação e os consolos. Isso torna a teoria de vigas bastante atrativa para análises estáticas e dinâmicas de estruturas.

Dentre as teorias clássicas de vigas baseadas na Resistência dos Materiais, as que são frequentemente empregadas são a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli (EULER, 1744; BERNOULLI, 1751), a Teoria de Vigas de Saint-Venant (SAINT-VENANT 1856a,b) e a Teoria de Vigas de Timoshenko (TIMOSHENKO, 1921; TIMOSHENKO, 1922). As duas primeiras teorias não consideram as deformações de cisalhamento transversal, diferentemente do modelo de viga de Timoshenko, que considera uma distribuição uniforme de cisalhamento ao longo da seção transversal da viga. Contudo, nenhuma dessas teorias consegue levar em consideração efeitos como empenamento, deformações no plano e fora dele, acoplamento da flexão associada à torsão, ou condições de contorno localizadas, sejam elas geométricas ou mecânicas.

O que justifica o uso frequente dessas teorias, tendo em vista esses efeitos, é que os mesmos estão usualmente presentes em estruturas que apresentam um índice de esbeltez pequeno, como é o caso de vigas-parede, e quando do emprego de materiais anisotrópicos. Sabendo-se disso, muitos métodos foram propostos para superar as limitações das teorias clássicas de vigas e permitir a aplicação de modelos unidimensionais a qualquer geometria ou condição de contorno da viga, os quais se utilizam dos conceitos de Teoria da Elasticidade.

2 ANÁLISE DE TENSÕES EM VIGAS

A seguir, são apresentadas as análises de tensões em vigas empregando a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli e a Teoria da Elasticidade Linear, para uma viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão e uma viga simplesmente apoiada com um

carregamento uniformemente distribuído, como ilustradas na Fig. 1. Os carregamentos das vigas são estaticamente equivalentes, e são adotados os seguintes valores para os parâmetros geométricos: $2l_0 = 220 \text{ mm}$, $2l_1 = 180 \text{ mm}$, $2\varepsilon = 2 \text{ mm}$, $2\delta = 2 \text{ mm}$.

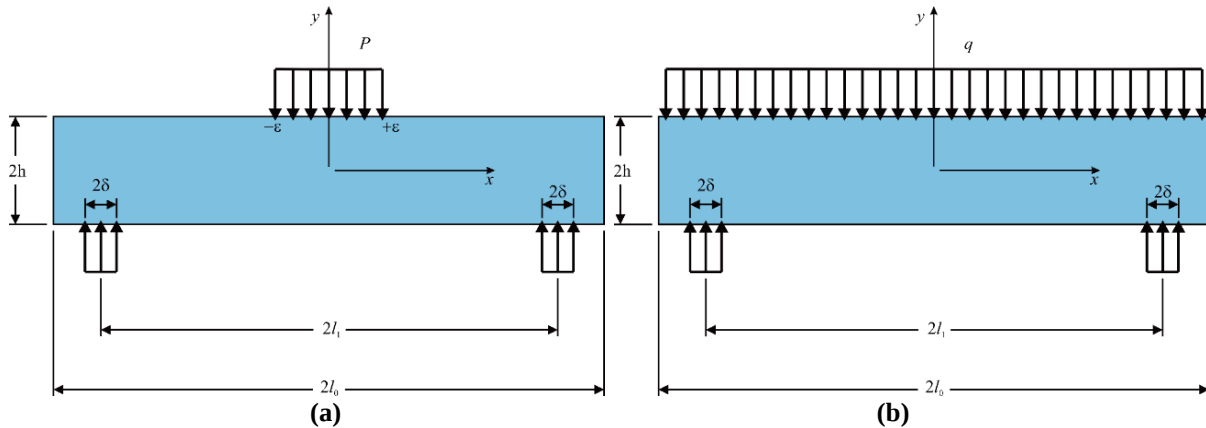


Figura 1. Vigas a serem analisadas: (a) viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão e (b) viga simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído.

2.1 Teoria de vigas de Euler-Bernoulli

Atualmente, a Teorias de Vigas de Euler-Bernoulli se apresenta como um dos modelos de referência para analisar estruturas esbeltas, homogêneas e isotrópicas, ou seja, estruturas lineares que apresentam as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo seu volume e em todas as direções, respectivamente. Na análise de um viga prismática reta submetida a momentos fletores atuando em torno dos seus eixos principais, algumas hipóteses cinemáticas são adotadas quanto ao modo como a tensão deforma o material. Estas hipóteses cinemáticas são as seguintes: o eixo longitudinal x , que se encontra no interior da superfície neutra, não sofre qualquer mudança no comprimento, todas as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal durante a deformação, e qualquer deformação da seção transversal dentro de seu próprio plano é desprezada.

Com base nas hipóteses cinemáticas definidas acima, chega-se na conclusão que a deformação normal longitudinal é proporcional à curvatura e varia linearmente com a distância y da superfície neutra. Partindo-se para desenvolvimento de uma equação que relaciona a distribuição de tensão normal longitudinal em uma viga com o momento fletor interno resultante que age na seção transversal da mesma, e adotando-se a premissa que o material satisfaz a lei de Hooke, ou seja, apresenta um comportamento elástico linear, é possível avaliar a variação de tensão de flexão através da fórmula da flexão, Eq. (1).

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{M(x)y}{I} \quad (1)$$

Em geral, as vigas suportam solicitações de esforço cortante e de momento fletor. Logo compreender o comportamento da tensão de cisalhamento transversal na viga também é importante para o seu dimensionamento. Assim, ao tentar avaliar a distribuição da deformação por cisalhamento ao longo da seção transversal de uma viga, verifica-se que ela não pode ser expressa facilmente em termos matemáticos (HIBBELER, 2014). Com isso, a análise da tensão de cisalhamento é desenvolvida de forma indireta, impondo o equilíbrio das forças horizontais em trechos da seção transversal da viga e a fórmula da flexão. A

distribuição da tensão de cisalhamento transversal pode ser expressa pela Eq. (2), que é conhecida como a fórmula do cisalhamento.

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V(x)Q(y)}{It} \quad (2)$$

Visto que a fórmula do cisalhamento foi desenvolvida a partir da fórmula da flexão, é necessário que o material apresente um comportamento elástico linear e tenha o mesmo módulo de elasticidade sob tração e sob compressão.

Uma das premissas mais importantes utilizadas no desenvolvimento da fórmula do cisalhamento é que a tensão de cisalhamento é uniformemente distribuída ao longo da largura t da seção transversal da viga. Em outras palavras, a fórmula do cisalhamento permite a avaliação da tensão de cisalhamento média atuante na largura da viga. Contudo, em seções transversais mais achatadas, ou à medida que a relação b/h aumenta, pode-se verificar, a partir de uma análise tridimensional empregando a Teoria da Elasticidade Linear, que o erro ao determinar os valores de tensão através da fórmula do cisalhamento torna-se considerável. Outra limitação importante da fórmula do cisalhamento pode ser ilustrada para vigas que apresentam uma mudança brusca na largura t , como acontece para vigas com seção T ou I, onde surgem concentrações de tensões na região de transição entre a aba e a alma da viga, não consideradas na fórmula do cisalhamento, assim como as condições de bordo livre nas abas da viga, que também são desconsideradas.

Resumindo os pontos discutidos acima, a fórmula do cisalhamento não fornece resultados precisos quando aplicada a elementos cujas seções transversais são achatadas ou apresentam mudanças bruscas na largura t da seção transversal. Nesses casos, a tensão de cisalhamento deve ser determinada por métodos mais avançados baseados na Teoria da Elasticidade Linear.

2.2 Teoria da elasticidade linear por meio de séries de Fourier

Todos os materiais utilizados para fins estruturais apresentam, até um certo limite, um comportamento elástico. O comportamento elástico consiste no fenômeno da deformação de um corpo quando submetido à um carregamento externo, que retorna à sua forma original quando este carregamento é removido. Além disso, costuma-se considerar que o material é homogeneamente distribuído em todo o elemento estrutural e apresenta isotropia, ou seja, as propriedades elásticas não mudam com a direção. No que segue, tanto as medidas de tensão e de deformação quanto as equações de equilíbrio podem ser empregadas admitindo-se um regime de pequenos deslocamentos e deformações.

Para a completa caracterização do estado de tensão em torno de um ponto, são necessários 9 componentes de tensão para uma análise tridimensional, sendo 3 componentes de tensões normais (σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz}) e 6 componentes de tensões de cisalhamento (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} e τ_{zy}). No caso de uma análise bidimensional, o estado de tensão é caracterizado por 4 componentes de tensão, das quais 2 são componentes de tensões normais (σ_{xx} , σ_{yy}) e 2 são componentes de tensões de cisalhamento (τ_{xy} , τ_{yx}).

Para que um corpo, ou parte deste, esteja em equilíbrio, devem ser realizadas análises estáticas pontuais referentes a rotação e a translação, chegando-se na Eq. (3) e na Eq. (4), respectivamente.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad (4)$$

Realizando-se uma análise cinemática pontual, são obtidas relações entre deslocamentos e deformações. Admitindo-se um regime de pequenos deslocamentos e deformações, essas relações cinemáticas podem ser expressas pela Eq. (5).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

De forma a garantir a integrabilidade e a compatibilidade das componentes do campo de deformações, as equações de compatibilidade definidas pela Eq. (6) devem ser satisfeitas. Estas equações apresentam significados dos pontos de vista matemático e físico. No que diz respeito ao ponto de vista matemático, o processo de integração das componentes do campo de deformações devem resultar num campo de deslocamentos único e contínuo. Fisicamente, o conceito de compatibilidade procura verificar se no processo de deformação não são criadas descontinuidades, ou vazios, no corpo deformado.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} \quad (6)$$

A função $\phi(x, y)$ é conhecida na literatura como função de tensão de Airy, onde as componentes do tensor de tensão devem ser expressas em função de $\phi(x, y)$ tal como apresentado na Eq. (7), o que garante a satisfação das equações de equilíbrio na ausência de forças de corpo. Além disso, a função de tensão de Airy deve satisfazer a Eq. (8), conhecida como equação biarmônica, de forma a garantir a satisfação das equações de compatibilidade no plano.

$$\sigma_{xx} = \partial^2 \phi / \partial y^2, \sigma_{yy} = \partial^2 \phi / \partial x^2 \text{ e } \sigma_{xy} = -\partial^2 \phi / \partial x \partial y \quad (7)$$

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (8)$$

A função de tensão de Airy pode ser representada por meio de séries de Fourier, cujos coeficientes são avaliados a partir da aplicação da equação biarmônica, das condições de contorno na sua forma pontual ou forte nos bordos superior e inferior da viga e das condições de contorno na sua forma integral ou fraca nos bordos laterais da viga.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES

Seguem as análises de tensões das vigas definidas anteriormente, que correspondem a uma viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão e a uma viga simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído, cujo índice de esbeltez (L/h) varia entre 5 e 10. Os campos de tensão foram obtidos empregando a plataforma MATLAB, uma malha quadrada com um espaçamento de 0,2 mm entre os pontos nas direções horizontal e vertical e uma representação da função de tensão de Airy por meio de uma série de Fourier truncada com 500 termos.

Dessa forma, para as vigas mencionadas acima, adotando-se um índice de esbeltez de 5, tratando-se de uma viga curta, foi possível obter os seguintes campos de tensão, Fig. 2 e Fig. 3.

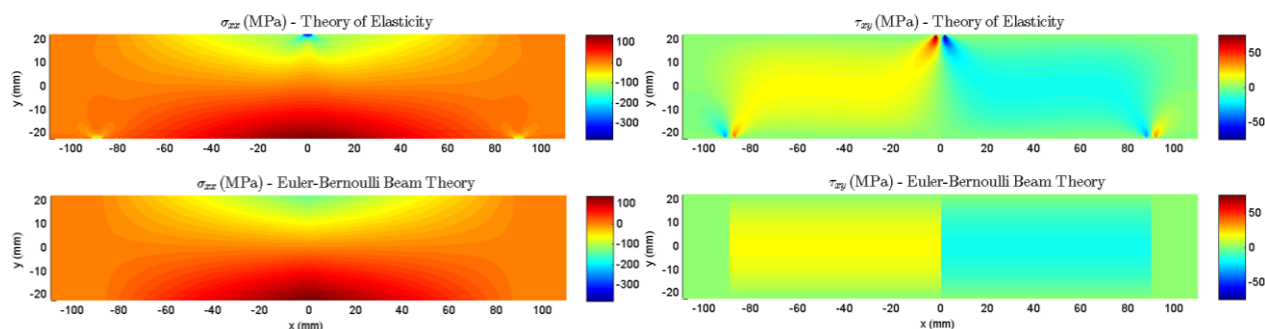


Figura 2. Campos de tensão σ_{xx} e τ_{xy} para uma viga curta simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão.

Através da Fig. 2, verifica-se que os campos de tensão σ_{xx} e τ_{xy} obtidos pela Teoria da Elasticidade Linear apresenta pontos com elevados níveis de tensão na região em que a carga concentrada é aplicada, assim como nas regiões onde estão os apoios. Níveis de tensão que não são observados nos resultados advindos da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Quanto a distribuição de tensão, nota-se que σ_{xx} obtido pela Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli apresenta um comportamento bastante próximo daquele obtido pela Teoria da Elasticidade Linear. A mesma situação não ocorre para a componente de cisalhamento τ_{xy} , onde não existe tal semelhança, apenas em seções suficientemente afastadas da carga concentrada e dos apoios.

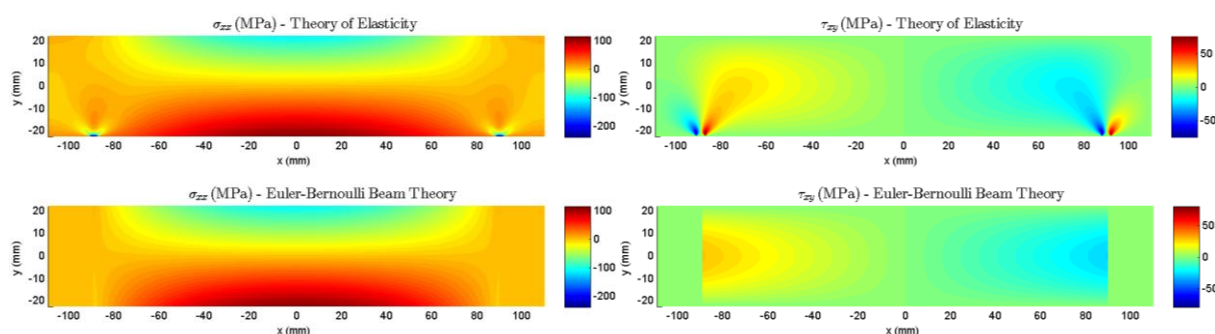


Figura 3. Campos de tensão σ_{xx} e τ_{xy} para uma viga curta simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído.

Quanto a Fig. 3, verifica-se que o campo de tensão σ_{xx} obtido pela Teoria da Elasticidade Linear apresenta uma distribuição muito semelhante àquela apresentada pela Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Contudo, pode-se observar pontos de concentração de tensão nas regiões próximas aos apoios. No caso do campo de tensão τ_{xy} , a distribuição de tensão obtida pela Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli apresenta, no geral, um comportamento diferente daquele encontrado pela Teoria da Elasticidade Linear, onde pode-se notar concentrações de tensão nas regiões próximas aos apoios. No entanto, uma boa concordância entre as teorias pode ser observada nas seções suficientemente afastadas dos apoios.

No caso dos campos de tensão σ_{yy} obtidos pela Teoria da Elasticidade Linear, Fig. 4, os mesmos apresentam pontos com elevados níveis de tensão na região em que a carga concentrada é aplicada, assim como nas regiões onde estão os apoios. Cabe salientar que esta tensão apresenta valor nulo para grande parte da viga. Por fim, ressalta-se que esse campo de tensão é totalmente negligenciado pela Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli.

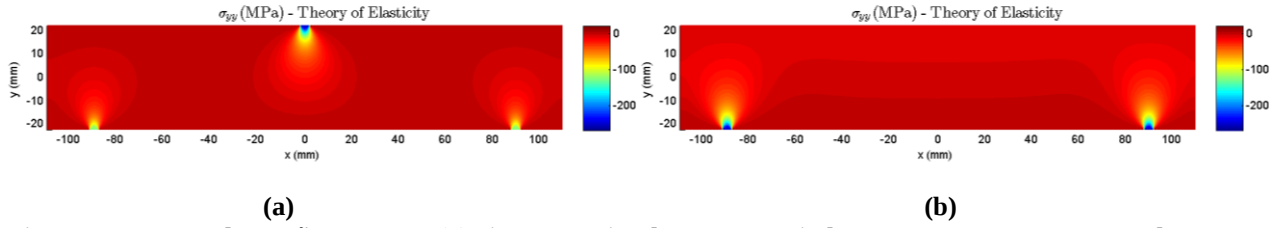


Figura 4. Campos de tensão σ_{yy} para (a) viga curta simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão e (b) viga curta simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído.

Os diagramas de tensão σ_{xx} para vigas curta ($L/h = 5$) e esbelta ($L/h = 10$), para uma seção transversal no meio do vão ($x = 0$), são apresentados na Fig. 5. A partir desses diagramas, verifica-se que a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli consegue representar muito bem a tensão σ_{xx} para uma viga com carregamento uniformemente distribuído, com base na comparação com a solução encontrada pela Teoria da Elasticidade Linear. Contudo, no caso de uma viga com carga concentrada, a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli não consegue representar a concentração de tensão σ_{xx} na região de aplicação da carga concentrada, apresentando uma maior discordância com os resultados encontrados pela Teoria da Elasticidade Linear para a viga curta.

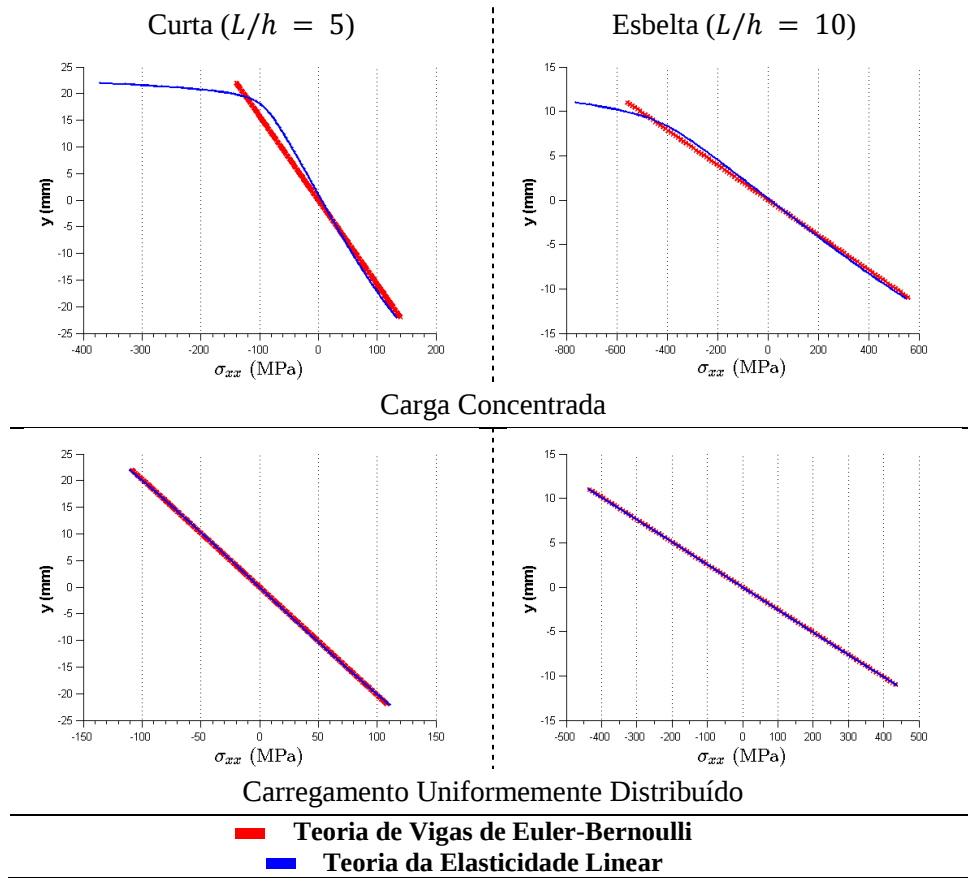


Figura 5. Diagramas de tensão σ_{xx} no meio do vão para vigas curta e esbelta.

Os diagramas de tensão τ_{xy} para vigas curta ($L/h = 5$) e esbelta ($L/h = 10$), para uma seção transversal próxima ao apoio ($x = -l_1 + 2\delta$), podem ser observados na Fig. 6. A partir desses diagramas, verifica-se que a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli não representa muito bem a tensão τ_{xy} numa seção transversal próxima aos apoios, com base na solução encontrada

pela Teoria da Elasticidade Linear. Nota-se uma maior diferença para a viga curta, onde uma maior concentração de tensão pode ser observada.

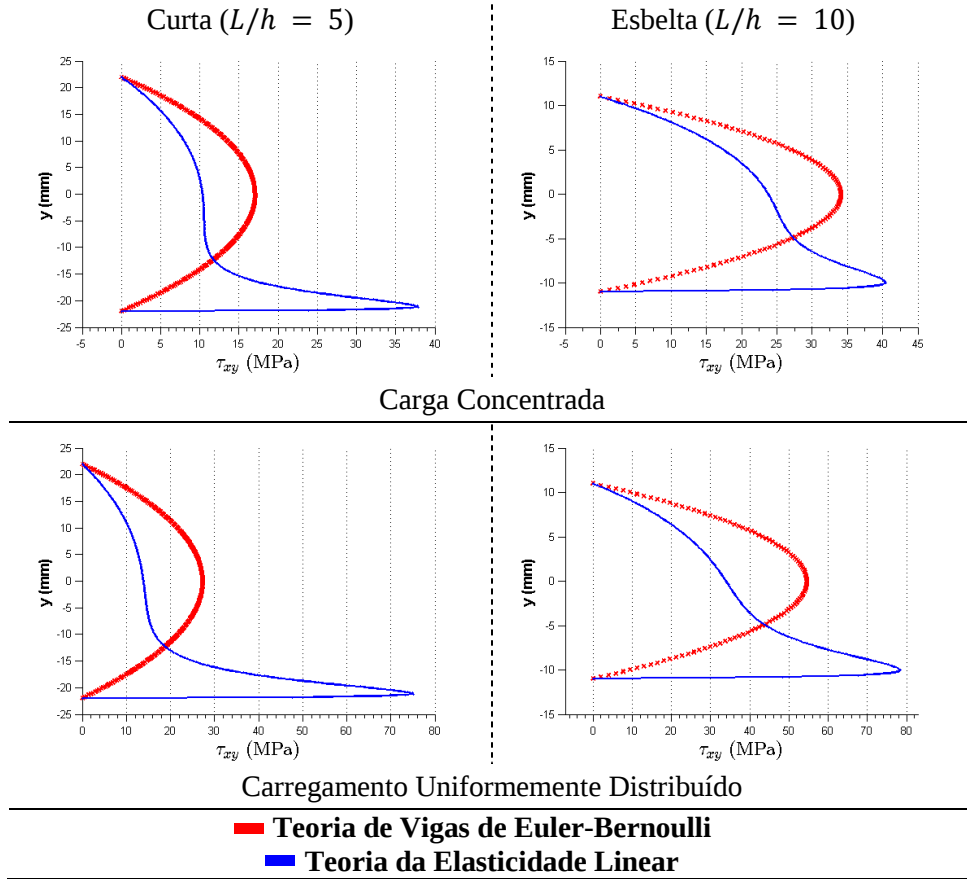


Figura 6. Diagramas de tensão τ_{xy} numa seção transversal próxima ao apoio para vigas curta e esbelta.

Outros diagramas foram gerados para a viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão, Fig. 7, na região de aplicação da carga concentrada ($y = h - \epsilon$), onde é possível verificar a concentração de tensão na solução obtida pela Teoria da Elasticidade Linear. A concentração de tensão não é representada pela Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli.

Para analisar, em termos médios, o erro relativo da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli em relação a solução em séries de Fourier baseada na Teoria da Elasticidade Linear, foi utilizado o erro relativo definido na Eq. (9). Na Figura 8, nota-se que para valores menores da relação L/h , o erro relativo médio apresenta valores maiores, e com o aumento dessa relação, este erro diminui. Para a viga curta ($L/h = 5$), a componente de tensão τ_{xy} apresenta um erro relativo maior, em torno de 21%, em comparação com a componente de tensão σ_{xx} , cujo erro relativo fica em torno de 6,6%. No caso de uma viga esbelta ($L/h = 10$), a componente de tensão τ_{xy} também apresenta um erro relativo maior, em torno de 10%, em comparação com a componente de tensão σ_{xx} , cujo erro relativo fica em torno de 1,6%. Assim, mesmo para a viga esbelta, o erro relativo médio apresentado pela componente de tensão τ_{xy} se mostrou considerável, o mesmo não ocorrendo para a componente de tensão σ_{xx} .

$$\text{Erro relativo } [\sigma_{ij}] = \frac{\int_V \left| \sigma_{ij}^{\text{Beam Theory}} - \sigma_{ij}^{\text{Theory of Elasticity}} \right| dV}{\int_V \left| \sigma_{ij}^{\text{Theory of Elasticity}} \right| dV} \quad (9)$$

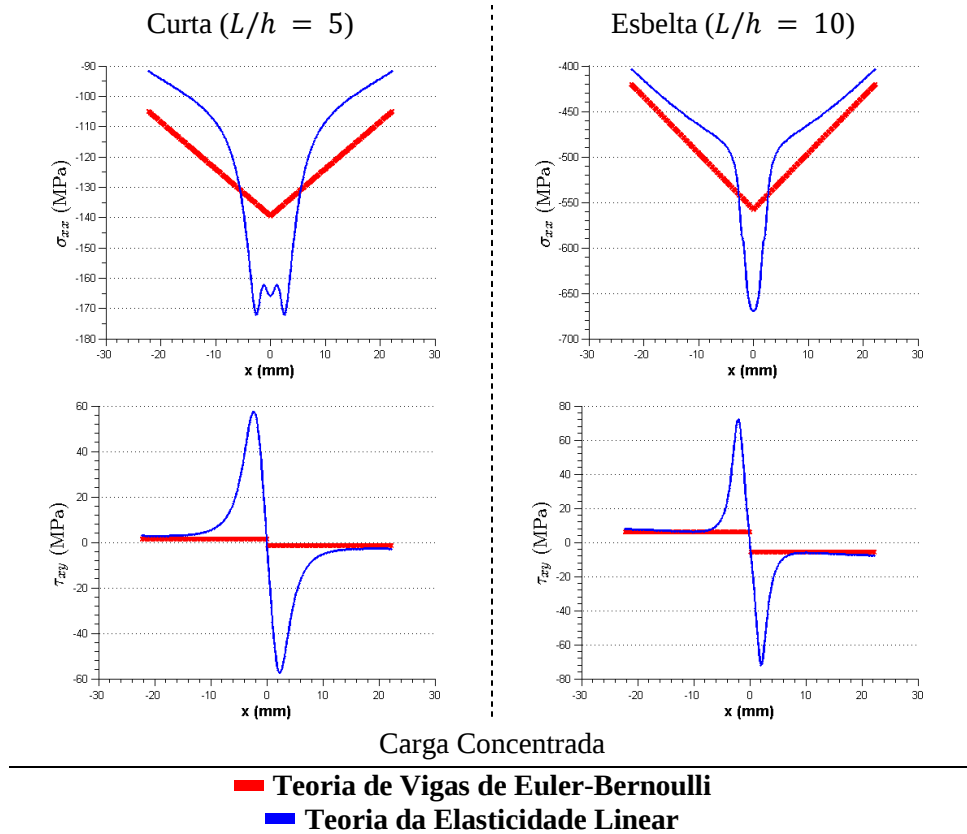


Figura 7. Diagramas de tensão σ_{xx} e τ_{xy} para a viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão (na região de aplicação da carga concentrada).

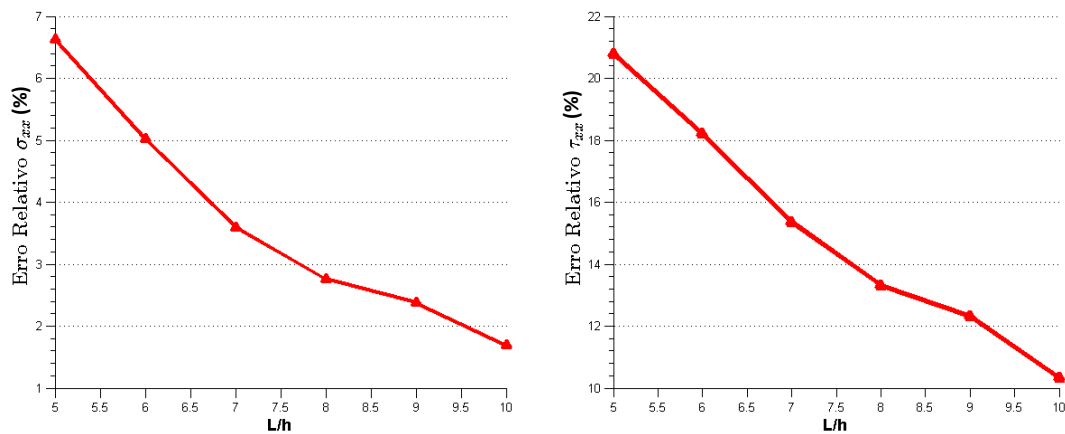


Figura 8. Erro relativo médio das tensões σ_{xx} e τ_{xy} para a viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, pode-se concluir que a teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli consegue representar muito bem a tensão σ_{xx} para a viga simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído, principalmente em regiões distantes dos apoios. No caso da viga

simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão, esta teoria também não consegue representar os efeitos da concentração de tensão para a componente σ_{xx} nas seções próximas à carga concentrada, sendo este erro ainda maior para a viga curta.

Para a componente de tensão τ_{xy} , a distribuição de tensão obtida pela Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli se mostra diferente daquela encontrada pela Teoria da Elasticidade Linear empregando séries de Fourier, principalmente nas regiões próximas à carga concentrada e aos apoios, para ambas as vigas em estudo. Apresentando uma diferença significativa para o valor máximo da tensão τ_{xy} , sendo esta diferença ainda maior para a viga curta.

No que se refere a tensão σ_{yy} , a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli negligencia totalmente sua existência, fato que compromete consideravelmente a análise de tensões em regiões próximas à carga concentrada e aos apoios. Juntamente com as diferenças encontradas para a componente τ_{xy} , este fato justifica o emprego de consideráveis coeficientes de segurança no projeto de dimensionamento de vigas, o que geralmente leva a um projeto de vigas ineficaz.

De forma geral, o uso da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli para vigas curtas, cuja relação $L/h = 5$, apresenta erros maiores do que para vigas esbeltas, com relação $L/h = 10$, tanto para σ_{xx} quanto para τ_{xy} , sendo ainda maiores para a componente τ_{xy} . Logo, ressalta-se que o uso dessa teoria para vigas com baixo índice de esbeltez e com cargas concentradas apresenta erros significativos, algo que afeta diretamente e negativamente o projeto desses elementos estruturais com base nesta teoria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERNOULLI, D., 1751. De vibrationibus et sono laminarum elasticarum. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, v. 13, pp. 105-120.
- EULER, L., 1744. De Curvis Elasticis. In *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes, Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Lattissimo Sensu Accepti*. Laussane & Geneve.
- GERE, J. M.; GOODNO, B. J., 2013. *Mechanics of Materials*. Stamford – Connecticut: Cengage Learning.
- HIBBELER, R. C., 2014. *Mechanics of Materials*. Upper Saddle River – New Jersey: Prentice Hall.
- SAINT-VENANT, A J. C. B., 1856. Mémoire sur la flexion des prismes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 1, pp. 89–189.
- SAINT-VENANT, A J. C. B., 1856. Mémoire sur la torsion des prismes. *Académie des Sciences de l'Institut Impérial de Frances*, v. 14, pp. 233–560.
- TIMOSHENKO, S. P., 1921. On the corrections for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, v. 41, pp. 744-746.
- TIMOSHENKO, S. P., 1922. On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. *Philosophical Magazine*, v. 43, pp. 125-131.

APÊNDICE

Expressões para as componentes de tensão obtidas pela Teoria da Elasticidade Linear empregando séries de Fourier para a viga com carga concentrada no meio do vão:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) \left[2 A_{2m} \sinh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) + \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) (A_{1m} + A_{2m} y) \cosh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) \right. \\ \left. + 2 A_{4m} \cosh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) + \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) (A_{3m} + A_{4m} y) \sinh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) \right] \cos \left(\frac{m\pi x}{l_0} \right) A_{10} y + A_{20} \quad (A1)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) \left[A_{2m} \cosh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) + \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) (A_{1m} + A_{2m} y) \sinh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) + A_{4m} \sinh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{m\pi}{l_0} \right) (A_{3m} + A_{4m} y) \cosh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{l_0} \right) \quad (A2)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = - \frac{P}{2l_0} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l_0} \right)^2 \left[(A_{1m} + A_{2m} y) \cosh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) + (A_{3m} + A_{4m} y) \sinh \left(\frac{m\pi y}{l_0} \right) \right] \cos \left(\frac{m\pi x}{l_0} \right) \quad (A3)$$

onde:

$$A_{10} = - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{3}{h^3} \left(\frac{m\pi h^2}{l_0} A_{2m} - A_{3m} \right) \sinh \left(\frac{m\pi h}{l_0} \right) + 3 \frac{m\pi}{h^2 l_0} A_{3m} \cosh \left(\frac{m\pi h}{l_0} \right) \right] \cos(m\pi) \quad (A4)$$

$$A_{20} = - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{m\pi}{l_0} A_{1m} + A_{4m} \right) \sinh \left(\frac{m\pi h}{l_0} \right) + \frac{m\pi}{l_0} A_{4m} \cosh \left(\frac{m\pi h}{l_0} \right) \right] \cos(m\pi) \quad (A5)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ A_{3m} \\ A_{4m} \end{Bmatrix} = - \left(\frac{l_0}{m\pi} \right)^2 \begin{bmatrix} C_m & hC_m & S_m & hS_m \\ C_m & -hC_m & -S_m & hS_m \\ S_m & \frac{l_0}{m\pi} C_m + hS_m & C_m & \frac{l_0}{m\pi} S_m + hC_m \\ -S_m & \frac{l_0}{m\pi} C_m + hS_m & C_m & -\frac{l_0}{m\pi} S_m - hC_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} B_m \\ B'_m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A6)$$

$$B_m = - \frac{P}{\varepsilon} \frac{1}{m\pi} \sin \left(\frac{m\pi \varepsilon}{l_0} \right) \text{ e } B'_m = - \frac{P}{\delta} \frac{1}{m\pi} \cos \left(\frac{m\pi l_1}{l_0} \right) \sin \left(\frac{m\pi \delta}{l_0} \right) \quad (A7)$$

$$C_m = \cosh \left(\frac{m\pi h}{l_0} \right) \text{ e } S_m = \sinh \left(\frac{m\pi h}{l_0} \right) \quad (A8)$$