



DIMENSIONAMENTO DE UM COMPONENTE ESTRUTURAL AUTOMOTIVO VIA MÉTODO SORM DG

Emmanoel Guasti Ferreira^a

Marcílio Sousa da Rocha Freitas^b

egf1@bol.com.br^a - marcilio@em.ufop.br^b

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC)^{a, b} - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) - Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, CEP: 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil.

José Antônio da Rocha Pinto^c

Geraldo Rossoni Sisquini^d

jarpint@hotmail.com^c - geraldo.sisquini@ufes.br^d

Departamento de Matemática (DMAT)^c - Departamento de Engenharia Mecânica (DEM)^d - Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) - Campus Universitário de Maruípe, Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, CEP: 29000-000, Vitória, ES, Brasil.

Resumo. É apresentada a análise de confiabilidade de um componente estrutural automotivo (viga metálica biapoiada), que ocorre frequentemente em aplicações veiculares, tais como longarinas e reforços transversais, cuja falha, apresentará risco aos usuários do veículo automotor. Pelo fato de numa situação real as variáveis envolvidas, nesta análise, serem de natureza aleatória foi considerado um índice de confiabilidade alvo igual à 4.200 ($pf \cong 10^{-5}$), que, em conformidade com o Joint Committee on Structural Safety (JCSS) – 2001, representa uma consequência de falha moderada, bem como, custo relativo da medida de segurança normal. Foi estabelecida uma comparação das dimensões da seção transversal ($b \times h$), onde b é a espessura e $h=2b$ a altura, deste componente, cujos resultados fornecidos, pelo método que considera as variáveis envolvidas como determinísticas, foram $b=66.94$ mm e $h=133.88$ mm, e os resultados dos métodos que consideram estas variáveis como aleatórias, ou seja, os métodos semianalíticos FORM (First Order Reliability Method) e SORM DG (Second Order Reliability Method by Differential Geometry), cujos valores calculados foram $b=64.01$ mm e $h=128.02$ mm, sendo estes valores coincidentes com os valores estabelecidos pela Simulação Monte Carlo Simples, utilizada apenas como instrumento de aferição.

Palavras-chave. SORM DG, superfície de estado limite, FORM, curvaturas principais, geometria diferencial.

1 INTRODUÇÃO

Basicamente os diversos métodos existentes para avaliação da probabilidade de falha podem ser divididos em quatro categorias:

- a) Métodos de Integração Numérica;
- b) Simulação Monte Carlo e suas variações;
- c) Métodos Semianalíticos FORM (First Order Reliability Method), SORM (Second Order Reliability Method), no caso em tela, o SORM DG (Second Order Reliability Method by Differential Geometry);
- d) Métodos Híbridos.

Será apresentado somente o mais novo método semianalítico de confiabilidade de segunda ordem, o SORM DG, já o FORM será usado para fornecer ao SORM DG valores referentes à análise de confiabilidade de primeira ordem e a Simulação Monte Carlo será utilizada apenas para aferição dos resultados, visto que fornece valores confiáveis para a probabilidade de falha (SAGRILO, 1994).

1.1 Análise de confiabilidade de primeira ordem

No FORM, a função de falha, superfície de falha ou superfície de estado limite ($g(\mathbf{V})=0$) é aproximada por um hiperplano e o índice de confiabilidade (β) é interpretado como a distância mínima em relação à origem para a referida superfície no espaço normal padrão (espaço $\mathbf{V}$, espaço reduzido ou espaço das variáveis reduzidas) e o mais provável ponto de falha (ponto de maior densidade local de probabilidade), denominado ponto de projeto ($\mathbf{V}^*$), é procurado usando métodos matemáticos de programação.

A probabilidade de falha, utilizando as propriedades da distribuição normal multidimensional padrão, é dada por (MADSEN ET AL., 2006):

$$pf = \int_F f_u(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \int_F f_v(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \Phi(-\beta) \quad (1)$$

onde F representa o domínio de falha ($g(\mathbf{V}) < 0$), $\mathbf{U}$ o vetor das variáveis aleatórias do espaço original (espaço $\mathbf{U}$), $\mathbf{V}$ o vetor das variáveis aleatórias do espaço normal padrão ou espaço reduzido, $f_u(\mathbf{U})$ a função densidade de probabilidades de $\mathbf{U}$, $f_v(\mathbf{V})$ a função densidade de probabilidades de $\mathbf{V}$, β o índice de confiabilidade de primeira ordem e $\Phi(-\beta)$ é a distribuição cumulativa normal padrão de probabilidades de $-\beta$.

De acordo com Madsen et al. (2006), o índice de confiabilidade de primeira ordem se relaciona ao ponto de projeto através das Equações 2 e 3:

$$\beta = \|\mathbf{V}^*\| \quad (2)$$

e

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \frac{\nabla g(\mathbf{V}^*)}{\|\nabla g(\mathbf{V}^*)\|} = -\frac{\mathbf{V}^*}{\beta} \quad (3)$$

onde, α^* é o vetor gradiente unitário à superfície de falha no ponto V^* , como ilustrado na Fig. 1, e $\nabla g(V^*)$ é o gradiente da superfície de falha no espaço reduzido (espaço V), no referido ponto.

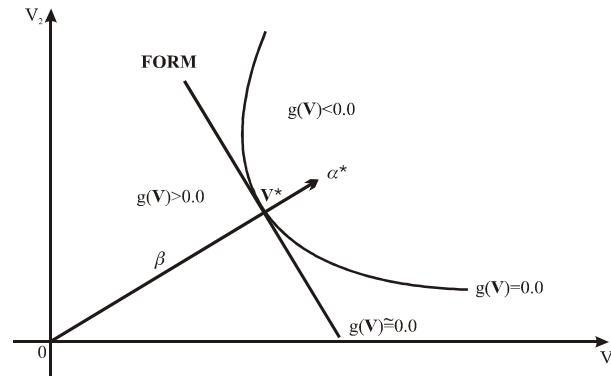


Figura 1. Aproximação de $g(V)=0$ realizada via FORM no espaço bidimensional.
Fonte: Adaptado de Sagrilo (1994).

1.2 Análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem

Com a finalidade de melhorar a aproximação, ilustrada na Fig. 1, da probabilidade de falha calculada pelo FORM será efetuada a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem, via método SORM DG, utilizando as equações de Breitung e Tvedt.

1.2.1 A equação de Breitung

Uma solução, baseada na teoria de aproximações assintóticas, que é muito precisa para um valor de $1 \leq \beta \rightarrow \infty$, foi apresentada por Breitung (1984) através da Equação 4:

$$pf_2 \approx \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{\eta-1} (1 + \beta k_j)^{-1/2} \quad (4)$$

onde $\Phi(-\beta)$ é a probabilidade de falha de primeira ordem (pf), pf_2 é a probabilidade de falha de segunda ordem, β é o índice de confiabilidade de primeira ordem fornecido pelo FORM, k_j são as curvaturas principais da superfície de estado limite no ponto de projeto (V^*), η é o número de variáveis aleatórias envolvidas na análise e Φ , a função cumulativa de probabilidades para a distribuição normal padronizada.

O índice de confiabilidade de segunda ordem ou índice de confiabilidade equivalente é calculado através da Equação 5 (MADSEN ET AL., 2006):

$$\beta^{EQ} = -\Phi^{-1}(pf_2) \quad (5)$$

1.2.2 A equação de Tvedt (fórmulas de Tvedt)

Tvedt (1990) apresentou as suas fórmulas, reunidas através da Equação 6 de acordo com Madsen et al. (2006), visando obter melhorias nos resultados fornecidos pela equação de Breitung (Equação 4), que faz uma aproximação assintótica, enquanto que a Equação 6

(equação de Tvedt) faz uma aproximação completa, no conteúdo de probabilidade no interior de uma hipersuperfície quadrática, sendo um procedimento exato para a aproximação por um hiperparabolóide (DER KIUREGHIAN E DE STEFANO, 1990).

$$Pf_2 \approx A_1 + A_2 + A_3 \quad (6)$$

$$A_1 \approx \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{\eta-1} (1 + \beta k_j)^{-1/2}$$

$$A_2 = [\beta \Phi(-\beta) - \phi(\beta)] \left\{ \prod_{j=1}^{\eta-1} (1 + \beta k_j)^{-1/2} - \prod_{j=1}^{\eta-1} (1 + (\beta + 1)k_j)^{-1/2} \right\}$$

$$A_3 = (\beta + 1) [\beta \Phi(-\beta) - \phi(-\beta)] \left\{ \prod_{j=1}^{\eta-1} (1 + \beta k_j)^{-1/2} - \operatorname{Re} \left[\prod_{j=1}^{\eta-1} (1 + (\beta + i)k_j)^{-1/2} \right] \right\}$$

onde β , k_j , η e $\Phi(-\beta)$ têm o mesmo significado que na Equação 4, $\operatorname{Re}[\]$ simboliza a parte real do argumento complexo, $i = \sqrt{-1}$, no terceiro termo, é uma unidade imaginária, Pf_2 é a probabilidade de falha de segunda ordem fornecida pelas fórmulas de Tvedt, A_1 é a aproximação assintótica de Breitung da probabilidade de falha de segunda ordem, A_2 e A_3 são termos de correção, ϕ é a função densidade de probabilidades para a distribuição normal padronizada. O primeiro termo da aproximação de Tvedt é o mesmo que o da aproximação de Breitung e os outros termos são as equações de modificação de ordem superior aplicadas nesse método.

O índice de confiabilidade de segunda ordem ou índice de confiabilidade equivalente é calculado através da Equação 7 (MADSEN ET AL., 2006):

$$\beta^{DG} = -\Phi^{-1}(Pf_2) \quad (7)$$

2. SUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^3$

Para que o SORM DG efetue a análise de confiabilidade de segunda ordem através das equações de Breitung (Equação 4) e Tvedt (Equação 6) é necessário que sejam determinadas as curvaturas principais (k_j) da superfície de estado limite. Na sequência deste artigo é apresentado um procedimento de cálculo, via geometria diferencial, destas curvaturas num ponto p qualquer em $\mathbb{R}^3$ e depois a sua generalização em $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.1 Parametrização de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$

O gráfico de uma equação da forma $F(x,y,z)=0$, onde F é uma função diferenciável e suas derivadas parciais não se anulam, simultaneamente, em nenhum ponto p , tal que $F(p)=0$, é um exemplo de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. Verifica-se que o gráfico de uma função diferenciável $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é também um exemplo de superfície regular.

De maneira mais geral, um subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ é denominado superfície regular se, para cada ponto $p \in S$, existir uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R}^3$ de p , um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e uma bijeção $\varphi: U \rightarrow V \cap S$, sendo φ da forma $\varphi(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$, com as propriedades descritas a seguir (RODRIGUES, 2001):

- φ é de classe C^∞ , ou seja, φ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens no ponto p ;
- φ é um homeomorfismo (ou seja, sua inversa é contínua); e
- para qualquer ponto $q \in U$ a matriz Jacobiana de φ tem posto dois. A referida matriz ter posto dois, significa que a imagem da transformação linear obtida pela mesma tem dimensão dois, ou ainda, eliminando-se uma linha, convenientemente escolhida, a matriz 2×2 resultante tem determinante diferente de zero. A matriz Jacobiana, no caso, tem dimensões 3×2 , sendo dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Nestas condições, diz-se que φ é uma parametrização para S , conforme ilustrado na Fig. 2:

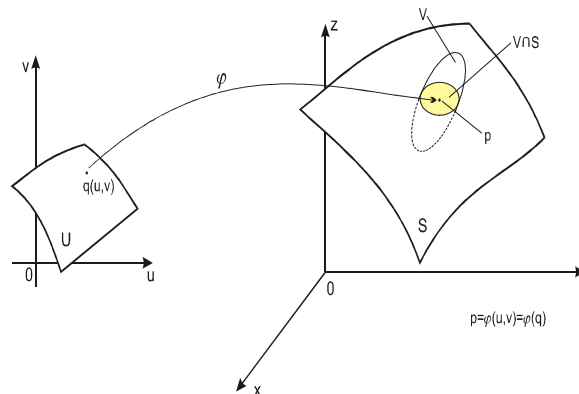


Figura 2. Parametrização de uma superfície regular.
Fonte: Adaptado de Carmo, 2006.

Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável, se e somente se existir um campo diferenciável $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S , segundo Carmo (2006).

2.2 Curvaturas de uma superfície em $\mathbb{R}^3$

Sendo S uma superfície orientável, a aplicação de Gauss é o campo de vetores normais $N: S \rightarrow S^2$, onde $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera de raio 1 e centro na origem. N é uma aplicação diferenciável e sua derivada $DN_p: T_p S \rightarrow T_p S^2$ é um endomorfismo (ou seja uma transformação linear $T: U \rightarrow V$, sendo $U=V$), onde $T_p S$ é o espaço (plano) tangente à superfície S no ponto $p = \varphi(u,v)$. Da definição de derivada (regra da cadeia), destacada por Araújo (1998), tem-se:

$$N_u = DN_{\varphi(u,v)} (\varphi_u) \quad (9)$$

e

$$\mathbf{N}_v = \mathbf{DN}_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) \quad (10)$$

Os vetores $\mathbf{N}$ e φ_u são ortogonais. O mesmo vale para $\mathbf{N}$ e φ_v . Derivando os produtos escalares $\langle \varphi_u, \mathbf{N} \rangle = 0$ e $\langle \varphi_v, \mathbf{N} \rangle = 0$, conclui-se que $-\mathbf{DN}_p$ é uma aplicação linear auto adjunta de $T_p\mathbf{S}$ em $T_p\mathbf{S}$. Ainda, de acordo com Araújo (1998), os autovalores $k_1(p) \geq k_2(p)$ do operador linear $(-\mathbf{DN}_p)$, são chamados de curvaturas principais de $\mathbf{S}$ no ponto p ; e, se $k_1(p) \geq k_2(p)$, chamam-se de direções principais as direções ortogonais definidas em $T_p\mathbf{S}$ pelos autovalores $k_1(p)$ e $k_2(p)$.

Segundo Gray (2006), o determinante K de $-\mathbf{DN}_p$ é chamado de curvatura Gaussiana de $\mathbf{S}$ em p , podendo ser obtida pelo produto das curvaturas principais

$$K = k_1(p) \cdot k_2(p) \quad (11)$$

Este procedimento é válido também para o caso de uma hipersuperfície, onde

$$K = k_1(p) \cdot k_2(p) \dots k_n(p) \quad (12)$$

passa a ser denominada de curvatura de Gauss-Kronecker, segundo Carmo (2011).

2.3 Curvatura normal

Seja $\alpha: (a,b) \rightarrow \mathbf{S}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A curvatura normal de α em $\alpha(s)$ é a componente de $\alpha''(s)$ segundo a normal a $\mathbf{S}$ nesse ponto e é dada por $k_n(\alpha, s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{N} \circ \alpha(s) \rangle$ (produto escalar entre $\alpha''(s)$ e $\mathbf{N}$, com $\mathbf{N}$ aplicado no ponto $\alpha(s)$) e ilustrada conforme Fig. 3. Se a curva não estiver parametrizada pelo comprimento de arco, a fórmula da curvatura normal passa, de acordo com Rodrigues (2001), a ser:

$$k_n(\alpha, t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \langle \alpha''(t), \mathbf{N} \circ \alpha(t) \rangle \quad (13)$$

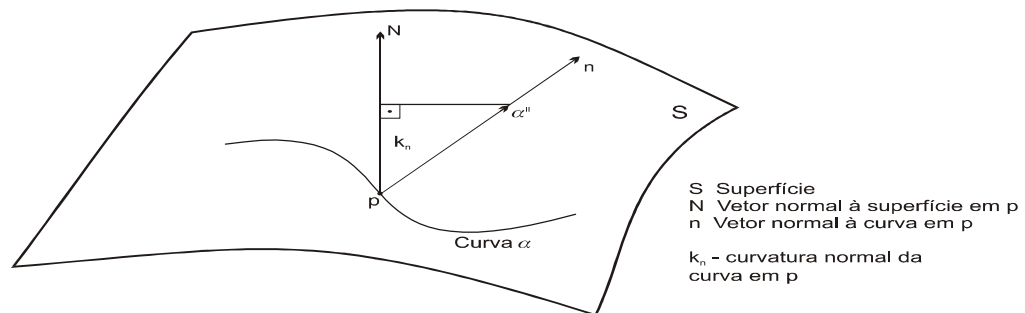


Figura 3. Curvatura normal no ponto p.

De acordo com Rodrigues (2001), o valor máximo e o valor mínimo das curvaturas normais das seções normais em p são as curvaturas principais da superfície no ponto p , conforme ilustrado na Fig. 4.

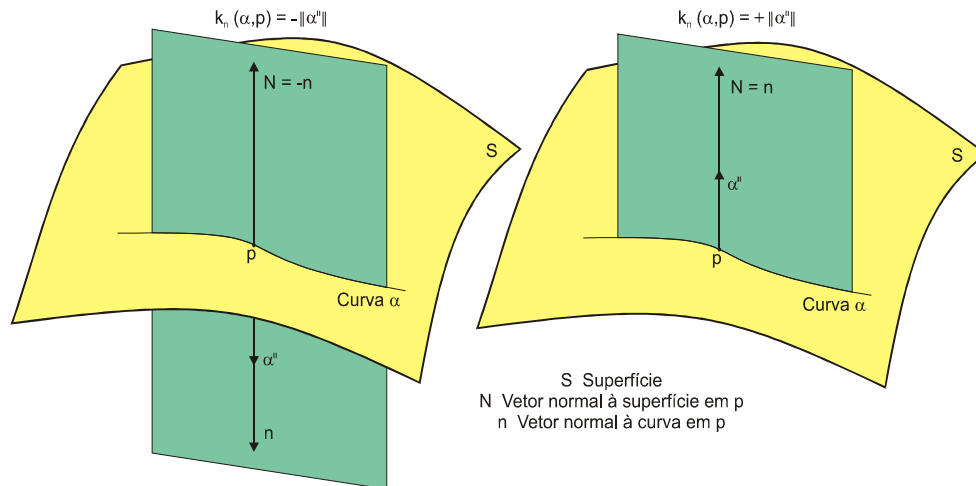


Figura 4. Curvatura normal quando α é uma seção normal no ponto p .

3. PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DAS CURVATURAS PRINCIPAIS DE UMA SUPERFÍCIE $g(V)=0$ EM R^{n+1} (FERREIRA, 2015)

A maioria da literatura sobre geometria diferencial apresenta os coeficientes da 1ª e 2ª forma fundamental para simplificar o cálculo das curvaturas em uma superfície e também para obter outras informações importantes, como por exemplo, a área de uma superfície. Neste artigo, como o interesse recai sobre a generalização da ideia de superfície (hipersuperfície), tal simplificação pelo uso desses coeficientes não foi possível, tendo em vista a complexidade das operações matemáticas envolvidas no cálculo das curvaturas, optando-se por utilizar o operador linear $(-DN_p)$.

Para facilitar o cálculo do vetor (campo) normal à superfície, esta foi descrita como o gráfico de uma função diferenciável $f: R^n \rightarrow R$, onde $n = \eta - 1$.

3.1 Parametrização da superfície $g(V)=0$

Uma parametrização para a superfície nessa vizinhança pode ser dada por:

$$\varphi_{(p)}(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n) = [V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n, f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)] \quad (14)$$

A função $f(V)$, com $V = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n) \in R^n$, é obtida explicitando quaisquer das variáveis V da função $g(V)=0$, onde $V = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}) \in R^{n+1}$. Considerando, por exemplo, a explicitação da última variável de $g(V)=0$ tem-se $V_{n+1} = f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)$.

3.2 Obtenção dos vetores tangentes à superfície $g(V)=0$

Os vetores tangentes, que correspondem às derivadas parciais da Equação 14, são calculados no ponto p de acordo com as Equações 15, 16 e 17:

$$\varphi_{V_1}(p) = (1, 0, \dots, 0, f_{V_1}(p)) = \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f(p)}{\partial V_1}\right) \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{V_i}(p) = (0, \dots, 1, \dots, 0, f_{V_i}(p)) = \left(0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial f(p)}{\partial V_i}\right); 1 < i < n \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{V_n}(p) = (0, 0, \dots, 0, 1, f_{V_n}(p)) = \left(0, 0, \dots, 1, \frac{\partial f(p)}{\partial V_n}\right) \quad (17)$$

3.3 Obtenção do vetor normal à superfície $g(V)=0$ e de suas derivadas parciais

O vetor normal no ponto p é calculado fazendo uma extensão na equação apresentada em Carmo (2006) para esse vetor, de acordo com a Equação 18:

$$\mathbf{N}(p) = \frac{(-f_{V_1}(p), -f_{V_2}(p), \dots, -f_{V_n}(p), 1)}{\sqrt{(f_{V_1}(p))^2 + (f_{V_2}(p))^2 + \dots + (f_{V_n}(p))^2 + 1}} \quad (18)$$

Já as derivadas parciais do vetor normal são obtidas através da Equação 19:

$$\mathbf{N}_{V_j}(p) = \frac{\partial \mathbf{N}(p)}{\partial V_j}, j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

3.4 Obtenção das curvaturas principais da superfície $g(V)=0$

Efetuada o cálculo do vetor normal e de suas derivadas parciais $\mathbf{N}_{V_j}$, basta escrevê-las como uma combinação linear dos vetores, $\boldsymbol{\varphi}_{V_1}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{V_n}$, do plano tangente, obtendo a matriz ($\mathbf{M}$) do operador linear $-\mathbf{DN}_p$, cujos autovalores são as curvaturas principais. Fazendo uma extensão na equação apresentada por Araújo (1998) para o referido operador linear, tem-se:

$$(-\mathbf{DN}_p)(\boldsymbol{\varphi}_{V_j}) = -\mathbf{N}_{V_j}, j = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

logo:

$$\begin{aligned} -\mathbf{N}_{V_1} &= (-N_{1,1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_1} + \dots + (-N_{1,n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_n} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (21)$$

$$-\mathbf{N}_{V_n} = (-N_{n,1}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_1} + \dots + (-N_{n,n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{V_n}$$

e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -N_{1,1} & \cdot & \cdot & -N_{1,n} \\ -N_{2,1} & -N_{2,2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -N_{n,1} & -N_{n,2} & \cdot & -N_{n,n} \end{bmatrix} \quad (22)$$

4. O MÉTODO SORM DG (FERREIRA, 2015)

O vetor normal $\mathbf{N}^*$ calculado através da Equação 18, no ponto $p=\mathbf{V}^*$, pelo procedimento matemático supramencionado e que fornece as curvaturas principais da superfície ao SORM DG, deve ter a mesma orientação do vetor $\boldsymbol{\alpha}^*$, uma vez que, também, é o vetor normal à superfície estado limite no ponto de projeto ($\mathbf{V}^*$). Como os métodos de cálculo são distintos é necessário fazer essa verificação, quanto à orientação, para uma correta utilização das equações de Breitung (Equação 4) e Tvedt (Equação 6), através do produto interno entre os referidos vetores. Se o produto interno entre $\mathbf{N}^*$ e $\boldsymbol{\alpha}^*$ for negativo eles possuirão orientações diferentes e o uso do operador linear $-\mathbf{DN}_p$ deve ser mantido, caso contrário deve ser substituído pelo operador linear $\mathbf{DN}_p$.

4.1 Algoritmo para aplicação do SORM DG

- Os valores de $\mathbf{V}^*$, $\boldsymbol{\alpha}^*$ e β são fornecidos pelo método semianalítico FORM;
- A função $f(\mathbf{V})$, com $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n) \in \mathbb{R}^n$, é obtida explicitando quaisquer das variáveis $\mathbf{V}$ da função $g(\mathbf{V})=0$, onde $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Considerando, por exemplo, a explicitação da última variável de $g(\mathbf{V})=0$ tem-se $V_{n+1} = f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)$. Além disso, as variáveis $\mathbf{V}$ da função $f(\mathbf{V})$ são as variáveis reduzidas ($\mathbf{V}$), que substituíram as variáveis originais ($\mathbf{U}$) correspondentes, na função de falha ($G(\mathbf{U})$) avaliada através do método semianalítico FORM;
- A partir da função $V_{n+1} = f(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)$, gerar na vizinhança de $p=\mathbf{V}^*$ a parametrização de acordo com a Equação 14;
- Calcular as derivadas parciais da parametrização a fim de obter os vetores tangentes à superfície, no ponto $p = \mathbf{V}^*$, utilizando as Equações 15, 16 e 17;
- Obter o vetor normal à superfície, no ponto $p = \mathbf{V}^*$, de acordo com a Equação 18;
- Calcular as derivadas parciais do vetor normal à superfície, no ponto $p = \mathbf{V}^*$, através da Equação 19;
- Obter os autovalores da matriz ($\mathbf{M}$) do operador linear $-\mathbf{DN}_p$ (Equação 22), tendo em vista que eles correspondem às curvaturas principais da superfície $g(\mathbf{V})=0$ no ponto $p = \mathbf{V}^*$;
- Realizar o produto interno entre $\mathbf{N}^*$ e $\boldsymbol{\alpha}^*$, para garantir que a orientação de $\mathbf{N}^*$ seja a mesma de $\boldsymbol{\alpha}^*$, a fim de que as curvaturas principais da superfície, calculadas no item anterior, sejam aplicadas com a orientação correta na equação Breitung (Equação 4) e na equação de Tvedt (Equação 6);
- Efetuar a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem através da equação de Breitung (Equação 4) e da equação de Tvedt (Equação 6).

5. RESULTADOS

O exemplo apresentado foi calculado no ambiente MATLAB R2012b (GILAT, 2012), cujos programas estão instalados num microcomputador com processador Intel de 2.93 GHz, memória de RAM de 2 Gb e sistema operacional Windows 7 de 32 bits.

Exemplo: Este exemplo foi apresentado em Filho (2011) e refere-se a um componente estrutural automotivo (viga metálica biapoiada com seção transversal $b \times h$, sendo $h=2b$, cujo material é o aço Arcelor-Mittal DP-980HY), ilustrado na Fig. 5, que ocorre muito frequentemente em aplicações veiculares, como em longarinas e reforços transversais. O exemplo proposto visa obter o dimensionamento da espessura b e da altura $h=2b$ do componente estrutural, supramencionado, para uma confiabilidade estrutural desejável de 99.999 % (probabilidade de falha $\cong 10^{-5}$) e compará-lo com o resultado fornecido por Filho (2011) para o dimensionamento pelo método determinístico, cujo valor foi $b=66.94$ mm e $h=133.80$ mm.

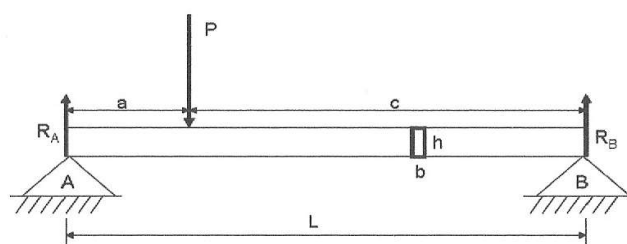


Figura 5. Viga metálica biapoiada submetida a uma carga concentrada P .

Fonte: Filho (2011).

A superfície de estado limite do componente estrutural automotivo (Fig. 5), de acordo com Filho (2011), é representada pela Equação 23:

$$G(U) = \frac{YS}{2} - \frac{3Pa(L-a)}{2Lb^3} \quad (23)$$

onde

$$U = (b, a, L, P, YS), \quad (24)$$

denota o vetor das variáveis aleatórias Gaussianas, quais sejam:

b = espessura da viga;

a = distância da carga concentrada P ao apoio A da viga;

L = comprimento da viga;

P = carga concentrada a que a viga está submetida;

YS = limite de escoamento do material (aço Arcelor-Mittal DP-980HY) da viga.

As características das variáveis aleatórias (independentes) estão sumarizadas na Tabela 1 e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 2, 3 e 4.

Tabela 1. Características das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média	Desvio Padrão
b (m)	Normal	64.01×10^{-3} *	1.28×10^{-3}
a (m)	Normal	2	0.02
L (m)	Normal	6	0.02
P (N)	Normal	400×10^2	400
YS (Mpa)	Normal	800	8

Nota: *Espessura ($b=64.01$ mm) dimensionada via método semianalítico SORM DG para o componente automotivo para um $\beta_{alvo}=4.200$.

De acordo com Filho (2011), para o componente estrutural em tela, o valor do índice de confiabilidade alvo (β_{alvo}) fornecido pelo Joint Committee on Structural Safety (JCSS) – 2001, ou seja, $\beta_{\text{alvo}}=4.200$ ($pf \cong 10^{-5}$) é o mais usual para situações de projetos estruturais automotivos, onde o principal mecanismo de falha não põe em risco demasiado a vida do usuário. Para evitar risco o usuário pode parar o veículo e providenciar para que o reparo apropriado seja efetuado. Pode-se então considerar a consequência de falha moderada. Já o custo da medida de segurança (reparo) pode ser considerado normal, tendo em vista que não mobilizará recursos maiores que mão de obra e peça sobressalente.

A variável aleatória b , por apresentar o maior fator de importância (I^*), conforme mostrado na Tabela 2, é a que dispensa maior atenção em termos de análise de confiabilidade estrutural, porque é a que mais influência no valor do índice de confiabilidade e da probabilidade de falha, indicando onde o engenheiro projetista e a equipe de manutenção devem dispensar maior atenção visando o bom desempenho da segurança do componente automotivo estrutural em análise.

Tabela 2 – Resultados obtidos via FORM (Algoritmo HL-RF)

Variável	V^*_i	α^*_i	$I^* = \alpha^*_i{}^2$
b (m)	-4.1014	0.9744	0.9494
a (m)	0.3115	-0.0740	0.0055
L (m)	0.1050	-0.0249	0.0006
P (N)	0.6236	-0.1482	0.0220
YS (MPa)	-0.6315	0.1500	0.0225

Nota: V^*_i = Coordenadas do ponto de projeto no espaço reduzido; α^*_i = coordenadas do vetor normal, no ponto de projeto, no espaço reduzido.

Tabela 3. Curvaturas principais (k_j) calculadas via geometria diferencial

-0.0021
0.0001
0.0010
0.0019

Tabela 4. Resultados obtidos na análise de confiabilidade para $b=64.01$ mm

	FORM Algoritmo HL-RF	SORM Breitung DG	SORM Tvedt DG	SMCS
i	8	-	-	-
β	4.209	-	-	-
pf	1.34×10^{-5}	-	-	-
pf_2	-	1.35×10^{-5}	1.35×10^{-5}	1.35×10^{-5}
β^{EQ}	-	4.200	4.200	4.200
N	*	*	*	10^7
t	0.05	0.94	1.00	118.43

Nota: i =número de iterações; pf =probabilidade de falha de primeira ordem; pf_2 =probabilidade de falha de segunda ordem; β =índice de confiabilidade de primeira ordem; β^{EQ} =índice de confiabilidade equivalente; N =número de simulações; t =consumo computacional em segundos; SMCS=Simulação Monte Carlo Simples; * derivadas parciais obtidas analiticamente

Conforme ilustrado na Tabela 4, o FORM apresentou resultados próximos dos calculados pela SMCS, para p_f e β , pelo fato das curvaturas principais da superfície de estado limite, no ponto V^* , apresentarem valores muito pequenos, como mostrado na Tabela 3. Apesar disso, o SORM DG, que forneceu resultados iguais aos da SMCS, para p_{f2} e β^{EQ} , porém de maneira mais eficiente, como mostrado na Tabela 4 (menor consumo computacional que a SMCS), refinou os resultados apresentados pelo FORM estabelecendo uma probabilidade de falha de segunda ordem igual à 1.35×10^{-5} para o índice de confiabilidade alvo (β_{alvo}) de 4.200, fornecendo um valor para a espessura (b) do componente automotivo igual à 64.01mm e para altura ($h=2b$) 128.02 mm, estabelecendo uma redução de 2.93 mm na espessura (b) e de 5.86 mm na altura ($h=2b$) da seção transversal retangular (b x h) do componente automotivo em relação ao valor da espessura (b) calculado pelo método determinístico de dimensionamento, ou seja, $b=66.94$ mm e $h=2b=133.88$ mm.

6. CONCLUSÕES

Através dos resultados, que foram alcançados neste artigo, foi demonstrado que o SORM DG além de efetuar o dimensionamento do componente automotivo, reduzindo as dimensões de sua seção transversal, realizou a análise de confiabilidade estrutural de segunda ordem com acurácia e eficiência para o exemplo apresentado. De maneira geral o método SORM DG será mais acurado e menos eficiente que o método FORM e menos acurado e mais eficiente que a Simulação Monte Carlo e suas variações.

Além disso, a versão do método SORM DG apresentada neste artigo é válida quando a superfície de estado limite for orientável, cuja função de falha, que é uma função implícita, possuir pelo menos uma variável que possa ser explicitada.

Para trabalhos futuros seria importante o estabelecimento de uma nova equação para calcular a probabilidade de falha de segunda ordem, tendo em vista que as equações de Breitung e Tvedt não fornecem esta probabilidade quando a condição $\beta.k_j > -1$, para a Equação 4 e para a Equação 6, não for obedecida.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), à FAPEMIG e ao CNPq pela colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, P. V., 1998. *Geometria diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária).
- BREITUNG, K., Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, v. 110, n. 3, p. 357, 1984.
- CARMO, M. P., 2006. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: SBM.
- CARMO, M.P., 2011 ; Flaherty, F. *Riemannian geometry*. Boston: Birkhauser.
- _____. *Differential forms and applications*. New York: Springer Verlag, 2011.

- DER KIUREGHIAN, A.; DE STEFANO, M. *An efficient algorithm for second-order reliability analysis*. Berkeley: Department of Civil Engineering/ University of California, 1990. Report n°. UCB/SEMM – 90/20.
- FERREIRA, E. G. Análise de confiabilidade estrutural via método SORM DG, 2015. 212 f. Tese (Doutorado em Ciências da Engenharia Civil) – UFOP, Ouro Preto-MG, 2015.
- FILHO, A. C. C. N. *Análise de confiabilidade de um componente estrutural automotivo*, 2011. 133 f. Dissertação (Mestrado em Gestão e Tecnologia Industrial) – Faculdade de Tecnologia SENAI – CIMATEC, Salvador-BA, 2011.
- GILAT, A., 2012. *MATLAB: An introduction with applications*. 4 ed. Ohio: Bookman.
- GRAY, A., 2006. *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica*. 3. ed. Boca Raton: CRC Press.
- MADSEN, H. O.; KRENK, S.; LIND, N. C., 2006. *Methods of structural safety*. New Jersey: Prentice Hall, Englewoods Cliffs.
- RODRIGUES, P.R., 2001. *Introdução às curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense.
- SAGRILO, L.V.S. Análise da confiabilidade estrutural utilizando os métodos analíticos FORM e SORM. 1994. 138 f. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, 1994.
- TVEDT, L. Distribution of quadratic forms in normal space - application to structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, Amsterdam, v. 116, n. 6, p. 1183-119, 1990.