



UNIFORM FEM-B-SPLIN NA ABORDAGEM DE PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES LIVRES E FORÇADAS EM CASCAS LAMINADAS

Daniel Alves de Andrade

Alexandre Faccini Michels

daandrade1@ucs.br

afmichels@ucs.br

Universidade de Caxias do Sul

Rua Francisco Getulio Vargas, 1130, 95070-560, Caxias do Sul, RS, Brasil.

Oscar Alfredo Garcia de Suarez

oagsuarez@ucs.br

Universidade de Caxias do Sul

Rua Francisco Getulio Vargas, 1130, 95070-560, Caxias do Sul, RS, Brasil.

Abstract. *Um dos desafios dos modelos de placas e cascas moderadamente espessa é aproximar o comportamento do modelo sólido elástico na abordagem de problemas estáticos e dinâmicos de componentes compostos por laminados. Dentro deste contexto, este trabalho apresenta um estudo das teorias cinemáticas de primeira ordem com deformação cisalhante (FSDT) e da teórica cinemática cúbica (TSDT) na abordagem de vibrações livres e forçadas em cascas axissimétricas compostas por laminados. Com o objetivo de melhorar a precisão na determinação das frequências relativamente altas (acima de dez por cento das frequências aproximadas numericamente) é utilizado um espaço de aproximação unidimensional de alta regularidade construído segundo o Uniform FEM B-Spline (U-FEM-BSpline) proposto por Burla (2008). O desempenho dos modelos numéricos obtidos por meio das teorias cinemáticas supracitadas e do U-FEM-BSpline são analisados através dos dois estudos de caso de cascas compostas por laminados: convergência para uma frequência alvo numa casca cilíndrica curta; resposta transiente do deslocamento e da aceleração no ponto central de uma casca esférica rasa sujeita a uma força impulsiva. As soluções dos modelos numéricos utilizados nos estudos de caso são comparadas com soluções de referência obtidas a partir do modelo sólido elástico e da regra geral de Dan Givoli (2008).*

Keywords: *cascas de revolução, material composto, FSDT, TSDT, U-FEM-B-Spline*

1. INTRODUÇÃO

A simulação de problemas dinâmicos de estruturas modeladas em cascas de material composto por laminados tem ganhado uma importância significativa a partir da segunda metade do século passado impulsionados pela indústria aeronáutica. Neste contexto a utilização de materiais compostos na indústria aeroespacial tem possibilitado a construção de componentes mais leves e resistentes, sendo capazes de contornar entre outros o problema auto excitado como é o caso do flutter aerodinâmico. No atual contexto a pesquisa aplicada a abordagem de problemas dinâmicos tem sido feita utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF) de aplicação amplamente difundida na abordagem de problemas de engenharia e multi-física. Os softwares comerciais atuais, baseados nesta metodologia tem abordado de forma satisfatória os problemas de componentes constituídos de materiais compostos. Por outro lado, a utilização de espaços de aproximação com regularidade C^0 , característicos do MEF convencional, apresenta limitações na abordagem numérica de problemas de autovalores e auto vetores. Este fato que é comentado em Hughes (1984) e Dan Givoli (2008) tem um impacto direto em problemas de vibrações livres e vibrações forçadas produzidas por forças impulsivas. A partir dos anos noventa são propostas metodologias alternativas aos chamados métodos numéricos convencionais como o MEF. Em princípio com o intuito de eliminar os problemas acarretados pela dependência da malha das funções de aproximação. De forma geral estas metodologias se agrupam com a denominação de métodos livres de malha.

Dentre as primeiras propostas para abordar problemas dinâmicos utilizando métodos sem malha estão: os trabalhos de Lu et al, (1995) que utilizaram o Element Free Galerkin Method, (EFGM), na abordagem do problema elástico de propagação de onda em 1D e dinâmica da fratura em 2D; Gu e Liu (2001) utilizam o Local Meshless Petrov-Galerkin Method (MLPG) na análise de vibrações livres e forçadas em problemas planos; G. Liu, (2003), utiliza o Moving Least Square (MLS) para aproximar problemas de deflexões e vibrações livres em placas finas com formas complexas. Liew et al. (2003) utilizam o Moving Least Square Differential Quadrature Method (MLSDQM) na abordagem de problemas de vibrações livres em placas compostas por laminados simétricos e modeladas com teoria de primeira ordem com deformação cisalhante (FSDT). Neste trabalho os autores utilizam distribuição uniforme e não uniforme de pontos na discretização do domínio do problema. Os resultados encontrados para as primeiras frequências mostraram-se compatíveis com os descritos na literatura. Ferreira et al (2005) utilizam o Radial Basis Function (RBF) na análise de frequências naturais em placas compostas por laminados modeladas com teoria cinemática de primeira ordem com deformação cisalhante (FSDT). Neste trabalho os autores aproximam de forma independente as deflexões das rotações. Os resultados obtidos para placas retangulares e rômbricas foram compatíveis como os encontrados na literatura para as primeiras frequências naturais. Os trabalhos supracitados foram inovadores para a época, contudo não se mostraram mais versáteis que o MEF apesar de sua limitação na obtenção de frequências relativamente altas.

Um dos fatores de maior incidência na baixa eficiência na aproximação numérica de problemas elípticos de autovalores está diretamente relacionado à baixa regularidade e a alta ordem das funções de forma polinomiais dos espaços de aproximação. Este fato pode ser constatado pela estimativa em norma euclidiana do erro nos autovalores para a versão “h” do MEF apresentada em Hughes (1987) e Dan Givoli (2008) para espaços de aproximação unidimensionais.

Neste contexto pesquisas envolvendo a construção de espaços de aproximação de alta regularidade como pode ser visto nos trabalhos de Cottrel et al, (2006), mostram resultados mais precisos do que os obtidos pelo MEF na determinação dos modos e frequências naturais relativamente altas (acima de dez por cento dos modos e frequências aproximadas numericamente) em problemas unidimensionais bidimensionais e de placas finas. O k -method, proposto pelos autores supracitados utilizam a análise isogeométrica que consiste em utilizar funções BSplines em 1D e Nurbs em 2D-3D para construir espaços de aproximação de alta ordem e com regularidade desejada. Os resultados obtidos com esta metodologia mostraram resultados mais precisos que o MEF na análise de frequências naturais de uma barra elástica vinculadas nas extremidades. As curvas para valores normalizados de frequência natural são suaves e a precisão aumenta à medida que é aumentada a ordem polinomial do espaço de aproximação (ver: Cottrel et al., 2007b).

Neste trabalho os autores mostram o desempenho dos espaços de aproximação construídos segundo a metodologia do FEM-BSpline apresentada em Burla (2008) com regularidades $C^k(\Sigma)$, $k=2,4$ na abordagem de problemas de vibrações mecânicas livres e forçadas em cascas de material homogêneo e compostas por laminados. Neste trabalho serão testadas duas teorias cinemáticas: a teoria de primeira ordem com deformação cisalhante denominada aqui de First Shear Deformation Theory, (FSDT) e a teoria cinemática cúbica apresentada por Reddy (1984) (Third Shear Deformation Theory) (TSDT). Os desempenhos dos modelos numéricos estudados são analisados através de dois estudos de caso. No primeiro é analisado o desempenho do modelo numérico construído segundo o Uniform FEM-B-Spline (U-FEM-B-Splin) juntamente com o modelo cinemático de primeira ordem (FSDT) na obtenção de uma frequência alvo para uma casca cilíndrica curta composta por laminados. No segundo estudo de caso é analisado o desempenho dos modelos numéricos obtidos segundo o U-FEM-B-Spline juntamente com as teorias cinemáticas FSDT e TSDT no problema de vibrações forçadas produzidas por força impulsiva numa casca esférica rasa de material composto por laminados. O escopo do trabalho é constituído de seis seções que sejam: espaço de aproximação gerados pelo U-FEM-B-Spline; Teorias cinemáticas aplicadas ao elemento de casca segundo o U-FEM-B-Spline; problemas de vibrações livres e forçadas; material composto por laminados; resultados numéricos e conclusões.

2. UNIFORM FEM-B-SPLINE EM 1D

A metodologia apresentada nesta seção na versão unidimensional foi apresentada por Burla (2008) na análise de problemas de elasticidade em 2D e 3D e será utilizada neste trabalho na construção dos espaços de aproximação unidimensionais. Nesta metodologia os espaços de aproximação são construídos a partir de funções B-Splines definidas sobre um grid unidimensional com distribuição uniforme dos nós. Esta sistemática, ao contrário que o MEF convencional, constrói diretamente os espaços de aproximação global com as características gerais citadas:

- i. As funções BSpline constituem uma PU constituída por funções periódicas sobre o domínio global Ω ;
- ii. Os espaços gerados pelas funções B-Spline não possuem a propriedade delta de Kronecker com relação as fronteiras de Dirichlet;

- iii. O grid nem sempre coincide com a geometria do problema mesmo em espaços de aproximação unidimensionais.
- iv. Os espaços de aproximação global são do tipo $C_0^k(\Omega)$, $k = p - 1$, onde p é a ordem polinomial das funções de aproximação e k a ordem de regularidade do espaço obtido no domínio global.

2.1. Construção da base de funções do B-Spline em 1D

A construção da base de funções B-Spline é levada a cabo sobre um grid definido num domínio paramétrico com $p + 1$ nós igualmente espaçados onde os nós extremos têm coordenadas paramétricas $r_i = -\frac{p+1}{2}$ e $r_f = \frac{p+1}{2}$. Para cada nó do grid se tem uma função da base associada porem os valores mapeados para o domínio físico são os valores das funções da PU no intervalo $-1 \leq r \leq 1$.

A construção das funções B-Spline definidas sobre um grid uniforme (de nós igualmente espaçados) são funções polinomiais definidas pela Eq. (1),

$$\phi_i(r) = \sum_{j=0}^p \alpha_{ij} r^j \quad (1)$$

Os coeficientes α_{ij} são determinadas a partir dos critérios de continuidade inter elementos que se quer da função aproximada $f_e(r)$ (função definida no domínio do elemento) obtida por combinação linear das funções da base definida pela Eq. (1).

$$f_e(r) = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^p \alpha_{ij} r^j \right) u_i \quad (2)$$

Para as funções de ordem p se obtém uma continuidade inter elementos do tipo $C^{p-1}(\Omega)$ sendo esta condição garantida pela continuidade da derivada generalizada entre os elementos e e $e + 1$ do grid como indicado na Eq. (3).

$$\frac{\partial^m f_e}{\partial r^m}(1) = \frac{\partial^m f_{e+1}}{\partial r^m}(-1), \quad m = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (3)$$

A continuidade da função entre os elementos para a função representada é obtida para a primeira equação correspondente a $m = 0$ definida por $f_e(1) = f_{e+1}(-1)$. A formulação explicita da Eq. (3) é descrita pela Eq. (4),

$$\left(\sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} a_{0j} \right) u_0 + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} a_{ij} - \sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} a_{ij} (-1)^{j-m} \right) u_i - \left(\sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} a_{p+1j} (-1)^{j-m} \right) u_{p+1} = 0 \quad (4)$$

Na Eq. (4), as constantes u_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p+1$, são arbitrárias, portanto para que esta equação seja nula cada um dos três termos entre parênteses deve-se anular. A partir da consideração supracitada aplicada à Eq. (4) para $m = 0, 2, \dots, p-1$ se obtém um sistema linear retangular homogêneo possuindo $p(p+2)$ equações linearmente independentes cujas incógnitas são as componentes do vetor de coeficientes $\{a_{ij}\}_{i,j=0}^{p+1}$. Uma forma de obter o sistema com solução única (portanto com matriz quadrada) consiste em adicionar ao sistema linear supracitado a propriedade de partição de unidade das funções definida na Eq. (5)

$$\sum_{i=0}^p \phi_i(r) = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^p a_{ij} r^j \right) = 1 \quad (5)$$

Desta forma se obtém o sistema linear com matriz quadrada com dimensão $\dim = p(p+2)+1 = (p+1)^2$.

Através das Eq. (4) e (5) se obtém, em função da ordem polinomial p , as funções de aproximação definidas no domínio paramétrico do grid e com regularidade no domínio físico do problema de $C^{p-1}(\Omega)$. A descrição explícita das funções de aproximação uniforme B-Spline com ordens de $p = \{3, 5\}$ é apresentada nos itens a seguir;

- i. Funções cúbicas com regularidade $C^2(\Omega)$ definidas no intervalo paramétrico do grid $-2 \leq r \leq 2$ são descritas na Fig. 1(a)

$$\phi_1(r) = \frac{1}{48} (1 - 3r + 3r^2 - r^3) \quad (6a)$$

$$\phi_2(r) = \frac{1}{48} (23 - 15r + 3r^2 + 3r^3) \quad (6b)$$

$$\phi_3(r) = \frac{1}{48} (23 + 15r - 3r^2 - 3r^3) \quad (6c)$$

$$\phi_4(r) = \frac{1}{48}(23 + 15r + 3r^2 + 3r^3) \quad (6d)$$

ii. Funções de ordem $p = 5$ com regularidade $C^4(\Omega)$ definidas no intervalo paramétrico do grid $-3 \leq r \leq 3$ são descritas na Fig. 1(b).

$$\phi_1(r) = \frac{1}{3840}(1-r)^5 \quad (7a)$$

$$\phi_2(r) = \frac{1}{3840}[(3-r)^5 - 6(1-r)^5] \quad (7b)$$

$$\phi_3(r) = \frac{1}{3840}[(5-r)^5 - 6(3-r)^5 + 15(1-r)^5] \quad (7c)$$

$$\phi_4(r) = \frac{1}{3840}[(5+r)^5 + 6(3+r)^5 + 15(1+r)^5] \quad (7d)$$

$$\phi_5(r) = \frac{1}{3840}[(3+r)^5 - 6(1+r)^5] \quad (7e)$$

$$\phi_6(r) = \frac{1}{3840}(1+r)^5 \quad (7f)$$

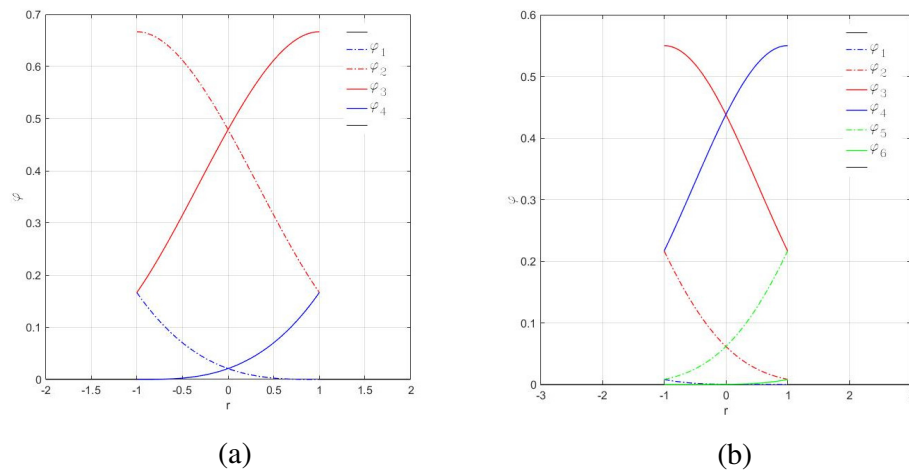


Figura 1: a) funções B-Spline cúbicas; b) funções B-Spline de quinta ordem.

3. DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO O UNIFORM FEM-B-SPLINE

No U-FEM-B-Spline as funções de forma são definidas sobre um grid uniforme que não está ajustado ao domínio do problema físico. Em outras palavras estas funções não tem a

propriedade delta de kronecker. Para contornar este problema pode-se forçar a condição de contorno essencial na fronteira de Dirichlet utilizando multiplicadores de Lagrange, método de penalidade por barreiras ou funções de fronteira como foi apresentado em Burla (2008). Por tratar-se da abordagem de problemas de autovalores e auto vetores foi descartada a utilização de funções de fronteira. Neste trabalho optou-se por não alterar a regularidade do espaço de aproximação impondo as condições de contorno essenciais de forma fraca por meio do método de penalidades.

A formulação discreta é descrita para as duas teorias utilizadas neste trabalho através das matrizes de funções de forma e da matriz de penalidade associadas às componentes de deslocamentos.

3.1. Teoria de primeira ordem com deformação cisalhante (FSDT)

A teoria de primeira ordem com deformação cisalhante apresentando neste trabalho corresponde ao modelo cinemática de Reissner-Mindlin. O campo de deslocamento descrito, para pontos de um elemento de casca descrito no plano radial na Fig.2 através das funções de forma do U-FEM-B-Spline é descrito pelas Eqs. 8(a)-(b).

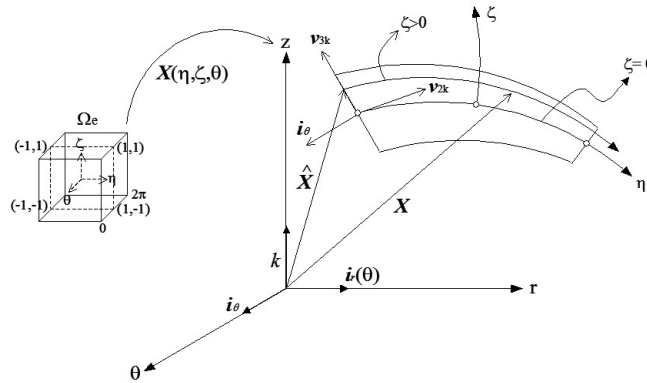


Figura 2: elemento de casca no plano de simetria radial.

$$\mathbf{u}_{eh}(r, \zeta) = \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \dots & \phi_i^k & 0 & \phi_i^k \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^r & \dots \\ \dots & 0 & \phi_i^k & \phi_i^k \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^z & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^k \\ w_i^k \\ \phi_i^k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad i = 1, \dots, nk, \quad k = 1, 2 \quad (8a)$$

Na Eq. 8(a) nk é o número de funções de forma associadas ao nó k do elemento.

Por outro lado, na Eq. (8a) ϕ_i^k é a função de forma i associada ao nó k do elemento; t_k é espessura do elemento no nó k ; ζ é a coordenada natural do elemento que parametriza coordenadas z

local e $\{v_{2k}^r, v_{2k}^z\}$ são as coordenadas do vetor do elemento na direção radial global associado ao nó local k do elemento. A descrição matricial compacta da Eq. (8a) é feita pela Eq. (8b).

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}_e \mathbf{U}_e \quad (8b)$$

Onde,

$$\mathbf{U}_e^T = \{\cdots \quad v_k^i \quad w_k^i \quad \phi_k^i \quad \cdots\}$$

3.2. Teoria cinemática cúbica de Reddy (TSDT)

A teoria cinemática cúbica utilizada neste trabalho foi apresentada no trabalho de Reddy et al. (1984). Nesta teoria, pela consideração das componentes membranais do campo de deslocamento estar definido por uma polynomial cúbica da variável z local, a deformação cisalhante apresenta distribuição parabólica na direção da espessura. Na teoria original de Reddy, desenvolvida para placas retangulares, a condição de tensão cisalhante nula nas superfície superior e inferior da placa foi considerada nula. Na adaptação que foi feita para este trabalho em modelos com restrições de deslocamentos e deformações, como é o caso dos modelos axissimétricos, não foi considerada a restrição de tensão cisalhante nula nas superfícies inferior e superior da casca.

A descrição do campo de deslocamento, no sistema global de coordenadas, para pontos no plano de simetria radial (ver: Fig. 1) é definida a partir das Eqs. (9a)-(9b).

$$\mathbf{u}_{eh}(r, \zeta) = \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \cdots & \phi_i^k & 0 & \phi_i^k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & \phi_i^k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^r & \phi_i^k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & \phi_i^k & \phi_i^k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^z & \phi_i^k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^z & \phi_i^k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^k \\ w_i^k \\ \phi_i^k \\ \alpha_i^k \\ \beta_i^k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (9a)$$

A descrição matricial compacta da Eq. (9a) é idêntica à da Eq. 8(b) com a diferença que este modelo cinemático tem cinco graus de liberdade sendo α_i^k e β_i^k os graus de liberdade responsáveis pela variação da rotação na direção z local. A distribuição da componente v de deslocamentos com a variável z local no plano de simetria radial é descrito na Fig.3.

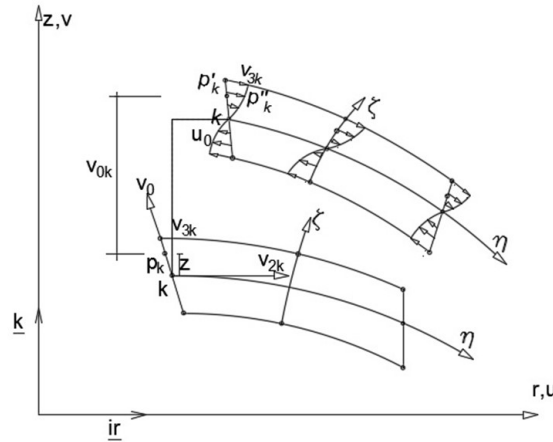


Figura 3: cinemática cúbica no elemento de casca no plano de simetria radial (r, z)

4. VIBRAÇÕES LIVRES DE FORÇADAS

Nesta seção serão apresentadas as formulações discretizadas para o problema de vibrações livres e forçadas com os espaços de aproximação obtidos a partir do Uniform FEM-BSpline. As formulações utilizadas estão descritas na forma matricial compacta válida, portanto, para todas as teorias cinemáticas apresentadas neste trabalho. As equações de equilíbrio dinâmico e do problema de vibrações livres são obtidas para o elemento teórico de casca descrito no plano de simetria radial pela Fig.4.

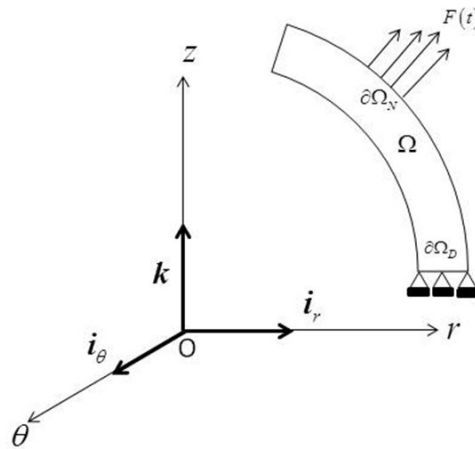


Figura 4: elemento teórico de casca descrito no plano de simetria radial.

4.1. Vibrações forçadas não amortecidas

Nesta subsecção é apresentada a formulação semi discreta para o problema de vibração forçada não amortecida. A formulação semi discreta utiliza o método de Bubnov Galerkin para discretizar o problema no domínio geométrico ficando os vetores de parâmetros de deslocamentos e acelerações em função do tempo. Por se tratar de espaços de aproximação onde as funções da PU não possuem a propriedade delta de Kronecker as condições de contorno essenciais serão obtidas utilizando o método de penalidades. Para o problema teórico de equilíbrio dinâmico descrito na Fig.4 a equação de equilíbrio é definida pela Eq. (10).

$$\int_{\partial\Omega_N} N_e^T p d\partial\Omega - \int_{\Omega} B_e^T D B_e d\Omega U_e(t) - \int_{\partial\Omega_D} \gamma N_{\varphi}^T (N_{\varphi} U_e(t) - N_{\varphi} \bar{U}_e(t)) d\partial\Omega - \int_{\Omega} \rho N_e^T N_e d\Omega \ddot{U}_e(t) = 0 \quad (10)$$

Na Eq. (10) N_e é a matriz de funções de forma que dependem do modelo cinemático conforme as equações 8(a) e 9(a). Por outro lado, a matrizes B_e estão associadas as deformações e dependem do modelo cinemático utilizado sendo descrita de forma compacta pela Eq. (11).

$$B_e = H \left(H_r R J G_{\xi} + N_r \right) \quad (11)$$

Na Eq. (11) J , R , H e H_r são o operador jacobiano o operador de rotação e as matrizes booleanas para obter o vetor final de deformações. Por outro lado, na mesma equação G_{ξ} é o operador do gradiente de deslocamento descrito na forma vetorial e N_r a matriz que leva em conta a componente de deformação ε_{θ} na direção normal ao plano de simetria radial.

Deve-se ressaltar aqui que a formulação descrita pela Eq. (10) leva em conta as condições de contorno de forma fraca sendo as mesmas forçadas nas fronteiras de Dirichlet utilizando o método de penalidades. A partir do exposto na Eq. (11) γ é o coeficiente de penalidade e $\bar{U}_e(t)$ é o deslocamento prescrito na fronteira de Dirichlet. A formulação padrão de descrever a Eq. (10) utilizada em problemas dinâmicos é definida pela Eq. (12).

$$M_e \ddot{U}_e(t) + K_e U_e(t) = F_e(t) \quad (12)$$

Na Eq. (12) se tem:

$$K_e = \int_{\Omega_e} B_e^T D B_e d\Omega + \int_{\partial\Omega_D} \gamma N_{\varphi}^T N_{\varphi} d\partial\Omega \quad (13a)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \quad (13b)$$

$$\mathbf{F}_e(t) = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}_e^T \mathbf{p}(t) d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_D} \gamma \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_{\varphi} d\partial\Omega \bar{\mathbf{U}}(t) \quad (13c)$$

Nas Eq. (13c), $\mathbf{N}_{\varphi}$ é a matriz de penalidade descrita na Eq. (13d) para o modelo de primeira ordem (FSDT).

$$\mathbf{N}_{\varphi} = \begin{bmatrix} \dots & S_v \phi_i^k & 0 & S_{\varphi} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & \dots \\ \dots & 0 & S_w \phi_i^k & S_{\varphi} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^z & \dots \end{bmatrix} \quad (13d)$$

Onde

$$S_v, S_w, S_{\varphi} = \begin{cases} 0, & n / \text{prescrito} \\ 1 & \text{prescrito} \end{cases}$$

4.2. Vibrações livres

O problema discretizado de vibrações livres para modos harmônicos é obtido a partir da Eq. (10) considerando a força de excitação nula e obtendo o modo de deslocamento no tempo ou autofunção como um produto de funções descrito na Eq. (14a).

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x) e^{i\omega t}, \quad (14a)$$

A Eq. (14b) é a forma discretizada da Eq. (14a).

$$\mathbf{U}_e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_e(\mathbf{x}) \mathbf{U}_e e^{i\omega t} \quad (14b)$$

Considerando na Eq. (11) $\mathbf{p}(t) = 0$, $\bar{\mathbf{U}}_e(t) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U}_e(t)$ conforme definido em (14) se obtém a Eq. (15)

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega + \int_{\partial\Omega_D} \gamma \mathbf{N}_{\varphi}^T \mathbf{N}_{\varphi} d\partial\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \right) \mathbf{U}_e e^{i\omega t} = 0 \quad (15)$$

A Eq. (15) dá origem à equação de autovalores e auto vetores descritos na Eq. (16).

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega + \int_{\partial\Omega_D} \gamma \mathbf{N}_{\varphi}^T \mathbf{N}_{\varphi} d\partial\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \right) \mathbf{U}_e = \mathbf{0} \quad (16)$$

A Eq. (16) descrita na forma matricial usual para um problema de vibrações livres é definida na Eq. (17).

$$(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Em (17) se tem:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega + \int_{\partial\Omega_D} \gamma \mathbf{N}_{\varphi}^T \mathbf{N}_{\varphi} d\partial\Omega \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \quad (19)$$

5. MATERIAL COMPOSTO POR LAMINADOS

Dentro do contexto dos materiais compostos por laminados o qual constitui um tema muito amplo, esta seção limita-se à abordagem sucinta de compostos por laminados constituídos por empilhamento simétrico de lâminas com orientações $\theta = [0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ e $\theta = [90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ]$ com relação ao sistema principal de coordenadas definido pela direção da fibra em cada lamina conforme Fig.5. A análise nas orientações supracitadas se deve ao fato de que os empilhamentos não devem produzir empenamentos de forma a que $\gamma_{\theta t} \neq 0$ e $\gamma_{\theta n} \neq 0$

Esta seção se restringe à abordagem macro mecânica, ou seja, cada lamina se comporta com um material ortótropo com propriedades mecânicas aparentes médias em sua forma macroscópica.

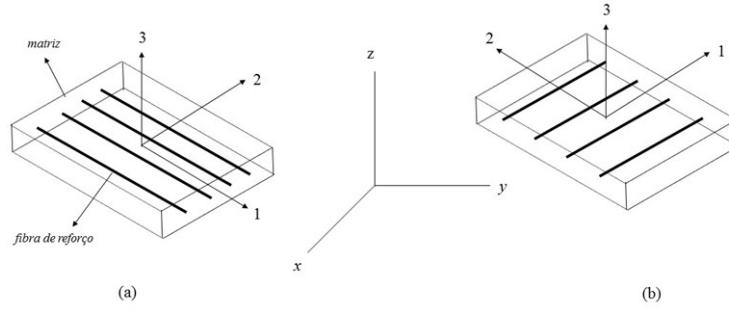


Figura 5: Laminado composto com fibras unidirecionais.

Em função da brevidade serão apresentadas as matrizes constitutivas para uma lamina composta de matriz polimérica e fibras unidirecionais que neste trabalho serão fibras de vidro com propriedades indicadas na Fig.6.

Para as teorias de primeira ordem FSDT e a TSDT as relações constitutivas para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$ são descritas nas Eqs. (20a) e (20b)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(D_{11} - \frac{D_{13}^2}{D_{33}} \right) & 0 & \left(D_{12} - \frac{D_{13} D_{23}}{D_{33}} \right) \\ 0 & \kappa D_{55} & 0 \\ \left(D_{12} - \frac{D_{23} D_{13}}{D_{33}} \right) & 0 & \left(D_{22} - \frac{D_{23}^2}{D_{33}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (20a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(D_{22} - \frac{D_{23}^2}{D_{33}} \right) & 0 & \left(D_{12} - \frac{D_{23} D_{13}}{D_{33}} \right) \\ 0 & \kappa D_{44} & 0 \\ \left(D_{12} - \frac{D_{23} D_{13}}{D_{33}} \right) & 0 & \left(D_{11} - \frac{D_{13}^2}{D_{33}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (20b)$$

Nas Eqs. (20a) e (20b), $\kappa = 5/6$ para a teoria FSDT e $\kappa = 1$ para a teoria TSDT. As constantes D_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$ são obtidas a partir da matriz de rigidez global do laminado ortótropo conforme Reddy (2000). Por outro lado, as Eqs. (20a) e (20b) são obtidas a partir da equação para o sólido tridimensional aplicando as restrições de deformação normal na direção da espessura nula e deformação cisalhante normal ao plano de simetria radial também nula.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são analisados dois aspectos da problemática estudada: o primeiro trata do desempenho dos espaços de aproximação obtidos a partir da metodologia Uniform FEM-B-Splin na obtenção de uma frequência alvo relativamente alta (aqui será considerada uma frequência relativamente alta aquela acima de dez por cento das frequências obtidas pelo problema numérico de autovalores e autovetores utilizados) num cilindro curto composto por laminado; o segundo aspecto trata do desempenho dos modelos cinemáticos de primeira ordem FSDT e o de Terceira ordem de TSDT na abordagem de um problema de vibrações forçadas numa casca esférica rasa composta por laminados. Nos estudos de caso deste trabalho que utilizam espaços de aproximação obtidos segundo o U-FEM-B-Splin é adotado um fator de penalidade $\gamma = 5 \times 10^4$ tanto para os deslocamentos como para as rotações. Este fator de penalidade foi adotado por ser um valor próximo do maior módulo de elasticidade do material ortótropo (Glass-epoxi) indicado na Fig.6. Por brevidade não foram apresentados neste documento os testes de sensibilidade entorno do valor supracitado para γ feitos através do número de condição da matriz de rigidez.

6.1. Resultados para frequência alvo

O estudo de caso proposto tem como finalidade analisar o desempenho do modelo numérico obtido com teoria cinemática de primeira ordem (FSDT) juntamente com espaços de aproximação construídos a partir da versão p do MEF e do Uniform FEM-B-Spline, na obtenção de uma frequência alvo relativamente alta. O estudo realizado para um cilindro curto com propriedades geométricas mecânicas e condições de contorno indicadas na Fig.6. Os resultados são mostrados através do erro relativo indicado na Eq. (21) considerado o cilindro constituído por laminados com esquema simétrico de laminação do tipo $[0/90]_s$ e $[90/0]_s$.

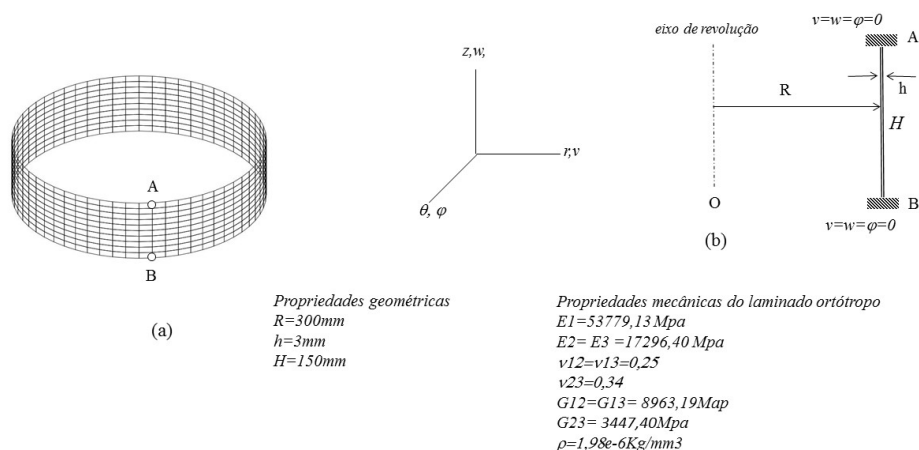


Figura 6: a) cilindro curto; b) dimensões e condições de contorno.

$$E_r = \frac{|\omega_M - \omega_r|}{|\omega_r|} \quad (21)$$

Na Eq. (21), ω_M é a frequência alvo correspondente ao modo de ordem M e ω_r é o valor de referência. É importante ressaltar aqui que a ordem associada ao modo está relacionada com o autovalor do problema e não necessariamente com a frequência de identificação. Em virtude da dificuldade de se encontrar uma solução analítica para o modelo vibrações livres de cascas moderadamente espessas foi utilizada uma solução de referência. A solução de referência foi obtida através da regra geral proposta, na Eq. (22), por Dan Givoli (2008).

$$M = r_o \varepsilon^{d/(2p)} N \quad (22)$$

Na Eq. (22) $r_o = 1$, d é a dimensão do espaço de aproximação que para este caso é $d=1$, ε é o erro de aproximação desejado, p é a ordem polinomial do espaço de aproximação e N é o número de graus de liberdade utilizados para aproximar o problema elíptico de autovalores e auto vetores. Deve-se ressaltar aqui que esta solução de referência foi proposta para materiais isotrópicos e homogêneos. Para este estudo de caso é utilizada como uma aproximação.

Neste exemplo a solução de referência é obtida a partir de um espaço de aproximação com regularidade $C^0(\Omega)$ construída com cinquenta elementos lagrangeanos unidimensionais de quinta ordem (seis nós) que aproximam a solução com 747 graus de liberdade.

As frequências alvo $\omega_{M=62} = 7274.023148\text{Hz}$ para o esquema de laminação $[0/90]_s$, e $\omega_{M=64} = 6847.340220\text{Hz}$ para o esquema de laminação $[90/0]_s$ foram obtidos a partir da Eq. (22) para um erro $\varepsilon = 1 \times 10^{-12}$ associadas aos modos $M_1 = 62$ e $M_2 = 64$ respectivamente. Deve-se ressaltar aqui que a ordem M destes modos são os obtidos do problema de autovalores auto vetores e não de um método de identificação específico. Em outras palavras $\omega_{M=62}$ e $\omega_{M=64}$ são as raízes reais associadas aos autovalores e de ordens M_1 e M_2 .

O erro relativo indicado na Eq. (21) é obtido para as estratégias A e B discriminadas a seguir e mostrado na Fig. (7).

- A. Espaço de aproximação com regularidade $C^0(\Omega)$ obtido a partir do Método de Elementos Finitos com um grid uniforme de vinte elementos unidimensionais lagrangeanos com ordens polinomiais $p = \{2, 3, 4, 5\}$;
- B. Neste item são utilizados dois espaços de aproximação obtidos a partir da metodologia do U-FEM-B-Spline:
 - B1. Espaço constituído de um grid de sessenta nós com ordem polinomial $p=3$ e regularidade $C^2(\Omega)$;

B2. Espaço constituído de um grid com oitenta nós com ordem polinomial $p=5$ e regularidade $C^4(\Omega)$.

O fato de se alterar a dimensão do grid quando é utilizado o U-FEM-B-Spline consiste em manter um número de graus de liberdade próximos aos utilizados pela estratégia utilizada no item A para as ordens polinomiais $p=3$ e $p=5$ respectivamente.

Analisando pela ótica da influência da regularidade dos espaços de aproximação, na obtenção de frequências relativamente altas, nota-se que a estratégia B mostra uma taxa de convergência significativamente maior do que a estratégia A além da elevada precisão mostrada com relação à solução de referência. Estes resultados ratificam a expectativa do estimador a priori apresentados em Dan Givoli (2008) para problemas elípticos de autovalores e auto vetores.

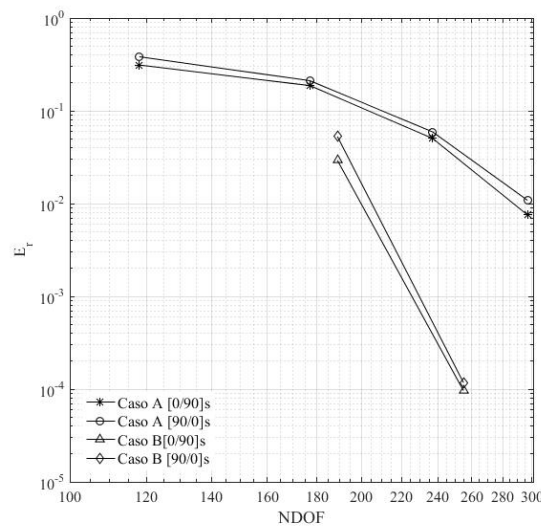


Figura 7: Resultados de E_r da frequência alvo correspondente ao modo de ordem $M=62$ e $M=64$ para os esquemas simétricos de laminação $[0/90]_s$ e $[90/0]_s$

6.2. Vibrações forçadas

Este estudo de caso tem como objetivo comparar o desempenho dos modelos numéricos obtidos a partir dos modelos cinemáticos FSDT e o modelo cúbico TSDT juntamente com o U-FEM-B-Spline na abordagem de um problema de vibrações forçadas produzida por uma força impulsiva. O objeto de estudo é uma casca rasa de material composto por laminados com esquema de laminação simétrico $[0/90]_s$.

A casca estudada, com relação a $a/h=16$, tem propriedades geométricas, propriedades mecânicas, condições de contorno e força aplicada indicada na Fig.8. As lâminas são constituídas do material ortótropo com propriedades mecânicas indicadas na Fig.6. Os resultados são obtidos para a variação do deslocamento e da velocidade do ponto A para as seguintes estratégias:

- A. Modelo numérico obtido a partir do modelo sólido elástico de revolução discretizado no plano de simetria radial com 20×4 elementos lagrangeanos de dezesseis nós (elemento de ordem cúbica). O modelo numérico foi obtido com 1547 graus de liberdade.
- B. Modelo numérico obtido a partir do modelo cinemático de primeira ordem (FSDT) juntamente com o espaço de aproximação construído por uma PU de funções B-Spline cúbicas sobre um grid de 21 nós. O modelo numérico é obtido com 69 graus de liberdade.
- C. Modelo numérico obtido com a teoria cinemática cúbica de Reddy (TSDT) sendo as funções da PU é o grid idênticos ao do modelo B. Por outro lado, por este modelo utilizar cinco graus de liberdade por nó o modelo numérico foi obtido com 115 graus de liberdade.

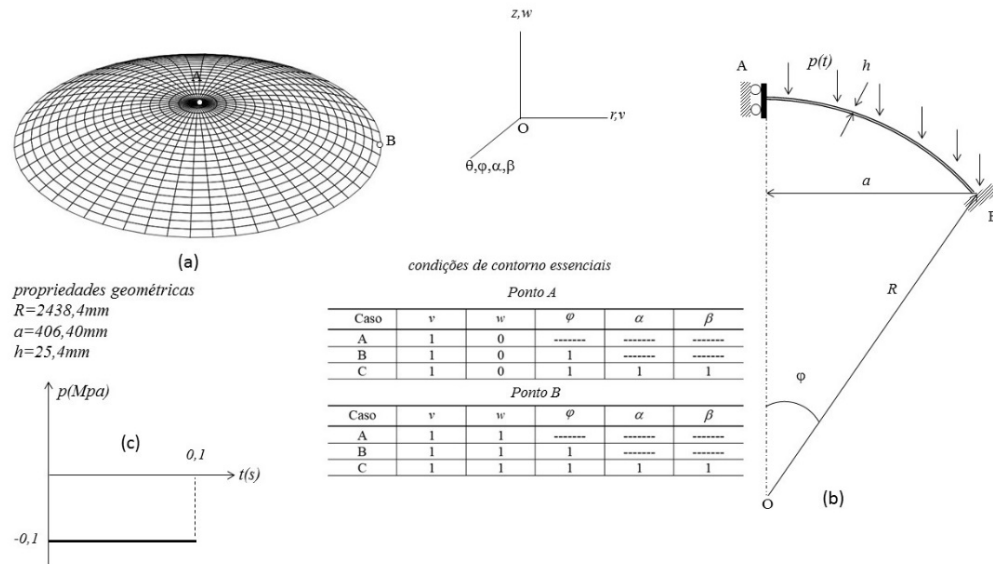


Figura 8: casca esférica rasa; b) carregamento e propriedades geométricas no plano de simetria radial; c) força impulsiva no tempo.

A integração no tempo da equação de equilíbrio global obtida a partir de Eq. (13) é realizada pelo método implícito de Newmark para um $\Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$. Os resultados em deslocamentos e velocidades para o ponto central A são mostrados nas Figuras. 10 (a) e 10(b).

Os resultados da propagação de onda do deslocamento no tempo do ponto A mostram similitude tanto no modo quanto nos valores de amplitude de onda como pode ser visto na Fig.10(a). Por outro lado para a variação do deslocamento no tempo a propagação da onda no ponto A mostra resultados mais próximos entre os modelos A e C. Visto que os modelos numéricos B e C foram

gerados pela mesma discretização do espaço o que não permite concluir que o modelo C represente melhor a propagação. Neste caso os mecanismos mais complexos de deslocamentos e deformações do modelo C acabam sendo determinantes nas respostas das variações no tempo do deslocamento. Deve-se ressaltar aqui que foi escolhido o modelo sólido pelo fato que as teorias de primeira ordem FSDT e a TSDT foram idealizadas para representar o comportamento do sólido elástico.

7. CONCLUSÕES

Os resultados deste artigo serão analisados sobre o foco das problemáticas aqui estudadas reconhecendo que se trata de tema muito complexo para poder tirar conclusões categóricas. No que diz respeito ao problema elíptico de autovalores abordado neste trabalho através do problema de vibrações livres os resultados observados corroboram os já observados na literatura supracitada neste texto. Neste caso a alta regularidade dos espaços de aproximação construídos segundo U-FEM-BSpline tem uma alta relevância na precisão dos resultados de modos e frequências relativamente altas como pode ser constatado na literatura em (Hughes, 1987), (Dan Givoli, 2008), (Cottrel et al., 2006).

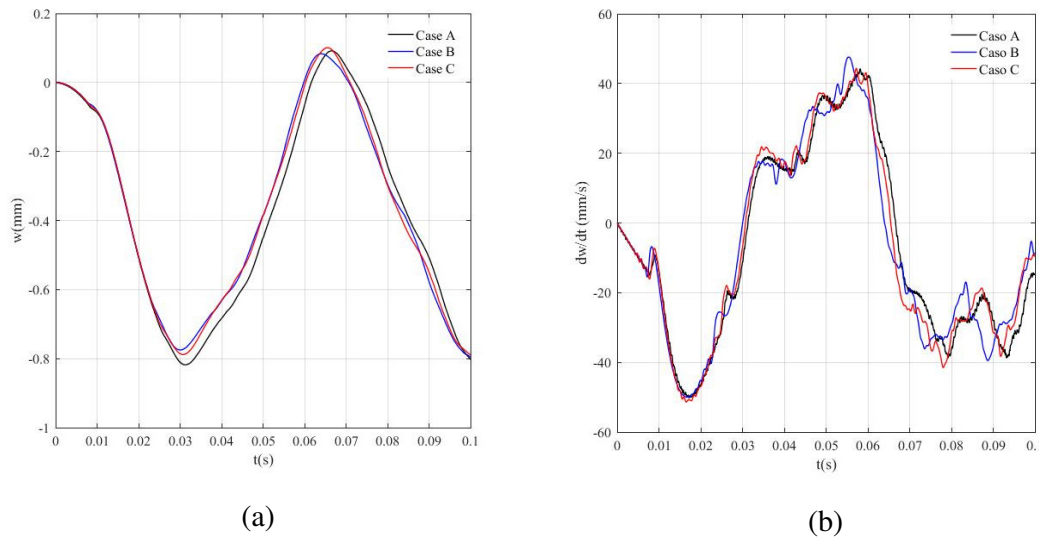


Figura 10: a) deslocamento w_A ; b) velocidade $\frac{dw_A}{dt}$.

Por outro lado, os resultados da análise da influência das teorias cinemáticas nas respostas do problema de vibrações forçadas, evidenciou um comportamento pouco expressivo para o modelo numérico construído com a teoria cinemática cúbica. Os resultados observados para o comportamento do deslocamento evidenciam resultados próximos dos modelos B e C e ambos distantes dos obtidos pelo modelo do sólido de revolução. Neste caso para o esquema de

laminação utilizado e a relação $a/h = 16$, caracterizando a casca moderadamente espessa, seria esperado um comportamento mais próximo da teoria cúbica com o modelo sólido de revolução. Entretanto esta expectativa se confirma no comportamento da velocidade onde acredita-se que o comportamento mais próximo do modelo sólido se deva a complexidade do modelo cinemático utilizado na estratégia C, visto que o espaço de aproximação utilizado nas estratégias B e C é o mesmo. De forma geral conclui-se que os resultados apresentados tanto para os espaço de aproximação utilizando o Uniform FEM-B-Spline quanto para a análise dos modelos cinemáticos foram satisfatórios com relação a solução de referência e a resposta do sólido de revolução.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Burla, R. K., 2008. Finite Element Analysis Using Uniform B-Spline Approximation and Implicit Boundary Method. Phd Thesis University of Florida, UEA.

Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., Reali, A., 2006. Isogeometric Analysis of Structural Vibrations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.195, pp5257-5296.

Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., Reali, A., 2007. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.196, pp4160-4183.

Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., 2005. Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions. Composite Structures, vol. 77, pp 296-305.

Givoli, D., 2008. On the number of reliable finite-element eigenmodes. Communications in Numerical Methods in Engineering, pp241967-1977.

Gu, Y. T., Liu, G. R., 2001. A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analysis for solid, Computational Mechanics, vol.27, pp 188-198.

Hughes, T. J. R., 1987. The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications.

Kant, T., 1982. Numerical Analysis of thick plates. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering. Vol 31, pp 1-18.

Lu, Y. Y., Belytschko, T., Tabbara, M., 1995. Element-Free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture, Vol. 126, pp 131-153, 1995.

Liu, G. R., Chen, X. L., 2001. A mesh-free method for static and free vibration analysis of thin plates of complicated shape, *Journal of Sound and Vibration*, vol.241, pp 839-855.

Liu, L., Liu, G. R., Tan, V. B. C., 2002. Element Free Method for static and free vibration analysis of spatial thin shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.191, pp 5923-5924.

Liew, K. M., Huang, Y Q., Reddy, J. N., 2003. Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, vol.192, pp 2203-2222.

Reddy, J. N., 1984. A simple Higher-Order Theory for Laminated Composited Plates. *Journal of Applied Mechanics* 51(4) pp 745-752.

Reddy, J. N., 2000. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*. CRC Press LLC, N.W. Corporate Blvd., Boca Raton, Florida 33431 UEA.