



OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL DE PÓRTICOS BIDIMENSIONAIS SUJEITOS À RESTRIÇÃO DE FLEXÃO, TRAÇÃO E COMPRESSÃO

Eloisa Strauss Felippin

elostrauss@hotmail.com

Universidade Positivo, Curitiba, Brasil

Eduardo Senff, 241 – Porto União, 89400-000, Santa Catarina, Brasil

Resumo. *Pórticos são estruturas compostas basicamente por barras verticais (pilares) e horizontais (vigas). Um edifício, por exemplo, constitui de um conjunto de pórticos. Profissionais de engenharia procuram desenvolver projetos que não sejam apenas seguros, mas também otimizados. O objetivo deste estudo é aplicar o método Algoritmos Genéticos na otimização dimensional de pórticos bidimensionais com restrições quanto à falha por flexão, tração e compressão, tendo como referência perfis de aço comerciais de seção circular vazada. A função objetivo busca otimizar a massa da estrutura, utilizando como variáveis de projeto a área da seção transversal dos elementos. Um sistema de penalização adaptativo capaz de se ajustar durante o processo do algoritmo é aplicado na função objetivo original e gerando uma função modificada. Para reduzir a área de busca pelas variáveis de projeto, opta-se pelo agrupamento dos elementos. O estudo de caso apresentado considera um pórtico com dez, quinze ou dezoito elementos com carregamento em nós específicos. Utiliza-se a formulação numérica com programação em MATLAB®, obtendo resultado satisfatório.*

Palavras-chave: *Algoritmos Genéticos, Otimização dimensional, Pórticos bidimensionais, Redução de massa.*

1 INTRODUÇÃO

Ao estar em posição de tomada de decisão, deseja-se escolher a melhor opção dentre as várias disponíveis. Este processo pode ser através da otimização definido por uma função objetivo ou um índice de desempenho. A partir disto, a teoria e os métodos de otimização auxiliam na escolha da melhor opção (Chong e Zak, 2001).

Dentre os problemas de otimização estrutural estão definidos três tipos de otimização principais: a otimização dimensional, de forma e topológica. A otimização dimensional consiste na alteração das dimensões do elemento; a otimização de forma altera a geometria da estrutura, deslocando a posição inicial dos nós; e a otimização topológica retira elementos ou material sem que haja falha da estrutura (Lopes e Miguel, 2013).

Para que um projeto seja otimizado é necessário a identificação das variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições aplicadas para esta solução. Definidos estes parâmetros, o método de otimização pode ser escolhido e aplicado, resultando em uma solução ótima ou um conjunto de soluções ótimas para a função objetivo em questão (Arora, 2004).

As estruturas do tipo pórticos são compostas basicamente por barras e vigas. Uma torre de transmissão, por exemplo, constitui de uma estrutura do tipo pórtico. Também podem ser utilizados para compor pontes, grandes coberturas, barracões, entre outros tipos de construção.

Profissionais de engenharia procuram desenvolver projetos que não sejam apenas seguros, mas também de baixo custo. A literatura dispõe de diversos estudos realizados neste segmento, onde a redução da massa ou área implica na redução de custos em materiais. Outros estudos podem ser realizados no segmento de otimização de forma ou de otimização topológica.

O objetivo deste estudo é aplicar o método Algoritmos Genéticos na otimização dimensional de pórticos bidimensionais com restrições quanto à falha por flexão, tração e compressão, tendo como referência perfis de aço comerciais de seção circular vazada. A função objetivo busca otimizar a massa da estrutura, utilizando como variáveis de projeto a área da seção transversal dos elementos. Utiliza-se a formulação numérica com programação em MATLAB®, através do sistema computacional com processador Intel Core i5 1.8GHz e 6GB de memória RAM.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema de otimização estrutural teve início com Anthony G. M. Michell (1904), que procurou minimizar o volume de estruturas na tentativa de utilizar critérios de decisão baseados em técnicas de otimização (Alvarenga, 1989). Naquela época os estudos eram considerados teóricos e sem aplicações práticas. A concepção de problemas complexos exige um alto número de cálculos e processamento de dados. Mas com o desenvolvimento de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), e a revolução na informática, os computadores passaram a executar cálculos complexos e processar muitos dados de forma rápida, auxiliando nos problemas de otimização em um espaço curto de tempo (Arora, 2004).

A otimização estrutural vem sendo estudada há alguns anos e apresenta resultados satisfatórios na construção civil. Tem como objetivo a redução de custo e da quantidade de material empregado, além da garantia de que a estrutura suporte todas as restrições mecânicas impostas (Cordeiro, 2007).

Existem três classes de otimização: dimensional, de forma e topológica. Segundo Stolpe (2003), em um problema de otimização dimensional, a forma (geométrica) da estrutura se mantém fixa, enquanto as dimensões transversais como espessura, altura e área são utilizadas como variáveis de projeto.

Na otimização de forma, a forma dos limites da estrutura é determinada (Stolpe, 2003). No caso de estruturas treliças, há o deslocamento da posição inicial dos nós, de acordo com as posições admissíveis determinadas como restrição (Pedersen, 2003).

Na otimização topológica, o problema consiste em encontrar o número de furos ou cavidades em estruturas contínuas. Em estruturas discretas, o problema consiste em determinar o número, tamanho, posição e conectividade dos membros, podendo retirar elementos sem que haja falha da estrutura. (Stolpe, 2003)

Problemas de projeto ótimo com variáveis de projeto discretas foram resolvidos com sucesso utilizando Simulated Annealing (Elperin, 1988). Para problemas de otimização de estruturas treliçadas, foram utilizadas técnicas como Algoritmos Genéticos por Rajeev e Krishnamoorthy (1992); Algoritmo de Colônia de Formigas por Camp e Bichon (2004); e o método Teachig-Learning based optimization por Camp e Farshchin (2014).

O método dos Algoritmos Genéticos (AG) está entre os métodos estocásticos, que utiliza uma população de solução, imitando a evolução das espécies através de operadores básicos da genética como seleção, cruzamento, mutação entre outros (Goldberg, 1989).

Para entender como funciona o AG, faz-se uma comparação com a explicação do processo natural das espécies de Charles Darwin. No primeiro momento, uma população é formada por indivíduos aleatórios, sendo essa população as possíveis soluções do problema. Em seguida, a população é avaliada quanto a sua habilidade de adaptação ao ambiente. Alguns indivíduos são mantidos e outros, descartados. Os que foram mantidos, podem sofrer modificações em suas características através de cruzamentos, mutações ou recombinações genéticas, gerando descendentes para a próxima geração (reprodução). A reprodução se repete até encontrar uma solução que satisfaça o problema (Rosa e Luz, 2009).

Quanto aos operadores do AG, podemos dizer que a reprodução copia os indivíduos aptos durante a seleção a fim de formar uma nova população. Na sequência, o operador cruzamento troca informações entre os indivíduos, propagando suas características e gerando novos indivíduos. Por fim, o operador mutação, que introduz e faz a manutenção da genética da população, é aplicado a uma pequena porcentagem para que os indivíduos não percam as características da geração anterior. Desta forma, conclui-se o processo de evolução desta nova geração (Rosa e Luz, 2009).

Em geral, a aplicação dos AG resulta em uma solução suficientemente boa. Porém, em casos onde há restrição, se faz necessário o uso de uma técnica de penalização (Michalewicz et al., 1996). É possível ocorrer um cruzamento ou mutação adaptativos dependendo da aptidão dos indivíduos, utilizando de um sistema capaz de ajustar automaticamente durante o processo do AG.

Para reduzir o espaço de busca e não afetar a convergência e o desempenho do algoritmo, pode-se adotar a estratégia de agrupamento de membros. Um grupo pode ser definido pela mesma seção transversal ou pela magnitude das forças axiais dos membros, entre outras maneiras de agrupamento (Togan e Daloglu, 2008).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As restrições em um problema de otimização estrutural descrevem as limitações da estrutura, sejam limites da falha do material por tensão, deslocamentos ou frequência natural. Neste estudo de caso, são aplicadas restrições quanto à falha do material por tensões de flexão, tração e compressão, sendo necessário o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) como ferramenta de simulação numérica.

A aplicação do MEF transforma a forma forte (problema de valor de contorno) em forma fraca (problema equivalente em forma integral). Também é aplicado o Princípio do Trabalho Virtual, em sua forma variacional. Quando aplicada a um elemento finito, obtém-se um sistema matricial de equações:

$$K_i u_i = f_i \quad (1)$$

onde K_i é a matriz de rigidez, u_i é o vetor de deslocamentos nodais e f_i é o vetor de forças. Todos associados ao i -ésimo elemento.

Para um elemento unidimensional de pórtico, a matriz de rigidez elementar é:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{2L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{2L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{2L^2} & \frac{12EI}{3L} & 0 & \frac{12EI}{2L^2} & \frac{12EI}{6L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{2L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{2L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{2L^2} & \frac{12EI}{6L} & 0 & \frac{12EI}{2L^2} & \frac{12EI}{3L} \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo A_i a área da seção transversal do elemento, E o módulo de elasticidade do material e L_i o comprimento do elemento.

Para a obtenção da matriz de transformação de coordenadas T_i , que transforma os dados locais elementares em globais do sistema, utiliza-se o vetor de direção elementar que inclui as barras inclinadas. A matriz de transformação de coordenadas pode ser escrita desta forma:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para um problema genérico, as relações entre as variáveis principais são:

$$\bar{u}_i = T u_i, \quad (4)$$

$$\bar{F}_i = T F_i \text{ e} \quad (5)$$

$$K_i = T^T K_e T, \quad (6)$$

onde $\bar{u}_i$, $\bar{F}_i$ e K_e são representados no sistema local e u_i , F_i e K_i , no sistema global.

A tensões axiais de cada elemento são obtidas através da equação:

$$\sigma_{(i)} = E\varepsilon_{(i)} = \frac{\bar{u}_{2(i)} - \bar{u}_{1(i)}}{L_{0(i)}} \quad (7)$$

As tensões de flexão são encontradas através da soma da tensão normal (σ_n) e da tensão por momento fletor (σ_{mf}), sendo as fórmulas:

$$\sigma_n = \frac{F}{A} \quad (8)$$

$$\sigma_{mf} = \frac{-My}{I} \quad (9)$$

onde F é a força, A a área de aplicação da força, M o momento correspondente, y o raio externo do tubo e I a inércia para seções circulares. O princípio de superposição é utilizado para calcular a flexão resultante.

O objetivo deste trabalho é encontrar a mínima massa da estrutura, composta por tubos, portanto os dados para o problema de otimização estão descritos a seguir:

- Função objetivo: massa total da estrutura (M). Será a soma da massa de todos os elementos ($Nels$) que compõem a estrutura, considerando a densidade do material (ρ), a área da seção transversal do elemento (A_i) e o comprimento do elemento (L_i). Dá-se a função:

$$M = \sum_{i=1}^{Nels} \rho A_i L_i \quad (10)$$

- Variáveis de projeto: área da seção transversal dos elementos. O vetor de variáveis de projeto (X) é composto pela área (A) de todos os elementos:

$$X = (A). \quad (11)$$

- Restrições: Neste estudo, estão sendo consideradas como restrição a falha do material por tração (σ_t), compressão (σ_c) e flexão (σ_f):

$$\begin{aligned} r_1 &= \sigma_i - \sigma_t \leq 0, \\ r_2 &= -\sigma_i - \sigma_c \leq 0, \\ r_3 &= -\sigma_i - \sigma_f \leq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

A solução do problema de otimização se dará através de programação por Algoritmos Genéticos (Silva *et al*, 2014), capaz de encontrar a região aproximada ou exata do ótimo global. A utilização dos Algoritmos Genéticos torna-se satisfatória devido as variáveis de projeto serem discretas.

Um sistema de penalização adaptativa capaz de se ajustar durante o processo do AG foi apresentado por Togan e Daloglu (2008), sendo aplicado na função objetivo original ($f(x)$) e gerando uma função objetivo modificada ($\Phi(x)$):

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } N_c = 0 \\ (f_u - f_l) - (PN_c f(x)), & \text{se } N_c > 0 \end{cases} \quad (13)$$

onde $P = \sum_{i=1}^{N_c} P_i$, f_u e f_l correspondem a máxima e mínima função objetivo e N_c , o número de restrições atingidas pelo indivíduo. (Silva *et al*, 2014)

$$P_i = \begin{cases} \left(\frac{1,1r_{m\acute{a}x} - r_{m\acute{e}d}}{1,1r_{m\acute{a}x} - r_n^{(i)}} \right) & se\ r_n^{(i)} \geq r_{m\acute{e}d} \\ \left(\frac{r_n^{(i)} - 0,9r_{m\acute{i}n}}{r_{m\acute{e}d} - 0,9r_{m\acute{i}n}} \right) & se\ r_n^{(i)} < r_{m\acute{e}d}, \\ 0 & se\ r_n^{(i)} = 0. \end{cases} \quad n = 1, \dots, N_c, \quad (14)$$

Aqui, $r_{m\acute{i}n}$, $r_{m\acute{e}d}$ e $r_{m\acute{a}x}$, correspondem aos valores das restrições violadas, $r_n^{(i)}$ corresponde a restrição avaliada.

Uma metodologia proposta por Togan e Daloglu (2008) se baseia em probabilidades adaptativas de cruzamento e de mutação, operando de acordo com o valor da aptidão das soluções. A probabilidade de mutação P_m e de cruzamento P_c adaptativa foram alteradas a partir do trabalho de Togan e Daloglu (2008), resultando no trabalho de Silva *et al* (2014):

$$P_m = \begin{cases} \frac{0,25(fit_u - fit)}{(fit_u - fit_m)} & se\ fit \geq fit_m, \\ \frac{0,25(2fit_m - fit_l - fit)}{(fit_m - fit_l)} & se\ fit < fit_m \end{cases} \quad (15)$$

$$P_c = \begin{cases} \frac{0,5(fit_u - 2fit_m + fit)}{(fit_u - fit_m)} & se\ fit \geq fit_m, \\ \frac{0,5(fit - fit_l)}{(fit_m - fit_l)} & se\ fit < fit_m, \end{cases} \quad (16)$$

onde fit é aptidão do indivíduo, fit_m é a aptidão média da população, fit_u é o valor máximo da aptidão da população e fit_l é o valor mínimo da aptidão da população.

4 RESULTADOS

Foi realizada a implementação da formulação matemática para os Algoritmos Genéticos no programa MATLAB®, considerando três situações de uma estrutura treliçada. A primeira é composta por 10 elementos; a segunda, por 15 elementos; e a terceira, por 18 elementos. Todas as situações contêm elementos do tipo tubos circulares vazados.

Os elementos da treliça estão restritos a um limite de tensões axiais, são iguais a tensão de escoamento do aço e equivalem a ± 250 Mpa. O aço tem densidade de 7850 kg/m^3 e módulo de elasticidade de 200 GPa . As áreas consideradas formam um conjunto discreto, de bitolas comerciais, sendo ele, em m^2 : $\{0.000319, 0.000412, 0.000432, 0.000569, 0.000516, 0.000690, 0.000693, 0.000953, 0.001100, 0.001450, 0.001440, 0.001950, 0.001730, 0.002370, 0.002050, 0.002840, 0.002770, 0.003950, 0.003600, 0.005420, 0.005420, 0.008230, 0.007680, 0.012200, 0.009410, 0.010200, 0.010400, 0.012000\}$.

4.1 Situação com 10 elementos

A análise inicia-se com 10 variáveis de projeto sem formar grupos, que são as áreas da seção transversal de cada elemento. É considerado um carregamento P com intensidade de -444,822 kN na direção do eixo y aplicado nos nós 2 e 4 da estrutura, como mostra a Fig. 01. A Figura 02 apresenta a solução inicial da estrutura.

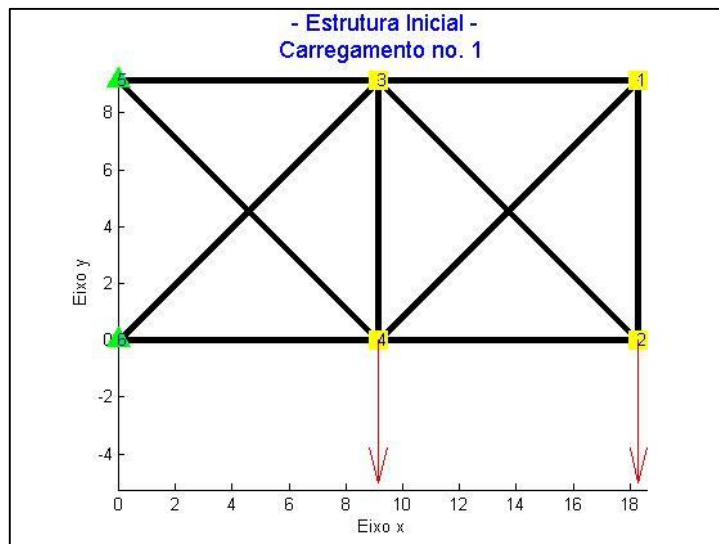


Figura 01: Estrutura inicial com 10 elementos

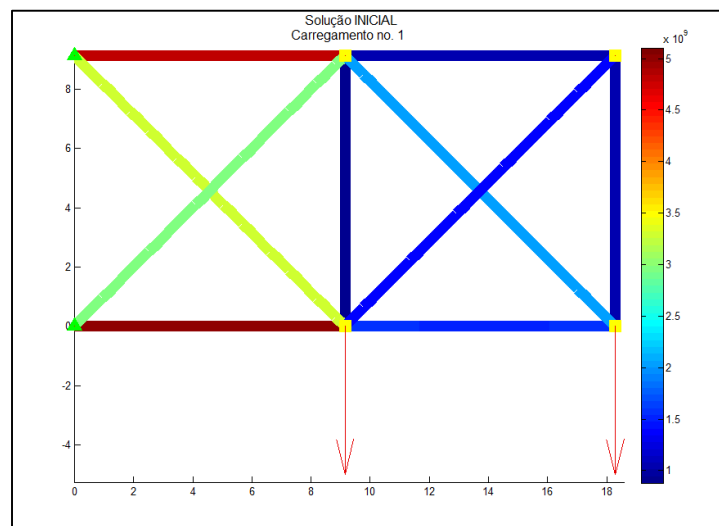


Figura 02: Solução inicial com 10 elementos

A rotina foi executada oito vezes, até que o melhor resultado se repetiu. O melhor resultado obtido entre as oito execuções, tomando como parâmetro o menor peso da estrutura, foi resolvido realizando 99 iterações. A configuração ótima pode ser conferida na Fig. 03.

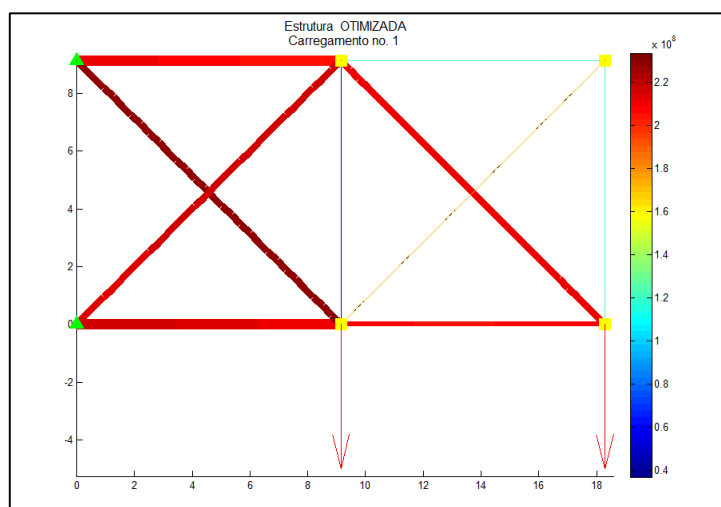


Figura 03: Configuração ótima com 10 elementos

Nota-se pela configuração ótima alguns elementos com seção extremamente pequenas com relação a seção dos outros elementos, podendo ser desprezados da estrutura, deixando-a mais leve. O resultado da solução ótima está expresso na Tabela 01.

Tabela 01: Resultado da solução ótima com 10 elementos

Elemento	Tubo escolhido	Área da Seção
1	22	0,004244
2	1	0,000169
3	22	0,004244
4	18	0,002038
5	1	0,000169
6	1	0,000169
7	20	0,002813
8	20	0,002813
9	20	0,002813
10	1	0,000169
Massa total	1665,87 N	

4.2 Situação com 15 elementos

A análise inicia-se com 15 variáveis de projeto. É considerado o mesmo carregamento P anterior aplicado no nó 8 da estrutura, como mostra a Fig. 04. A Figura 05 apresenta a configuração inicial da estrutura.

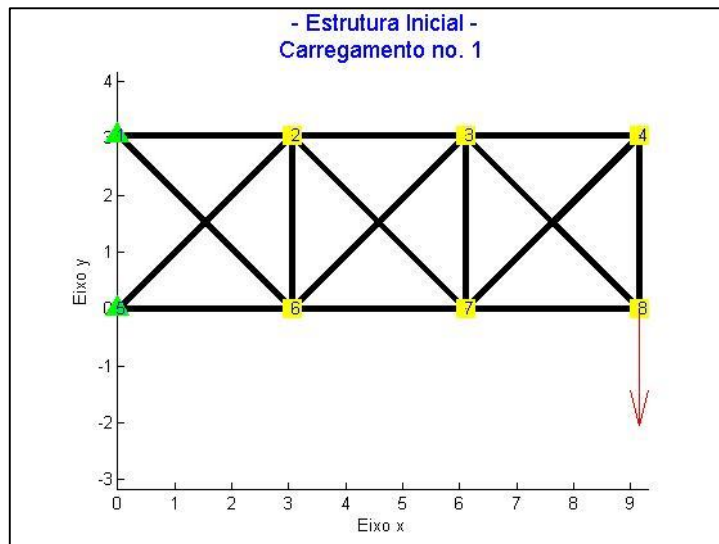


Figura 04: Estrutura inicial com 15 elementos

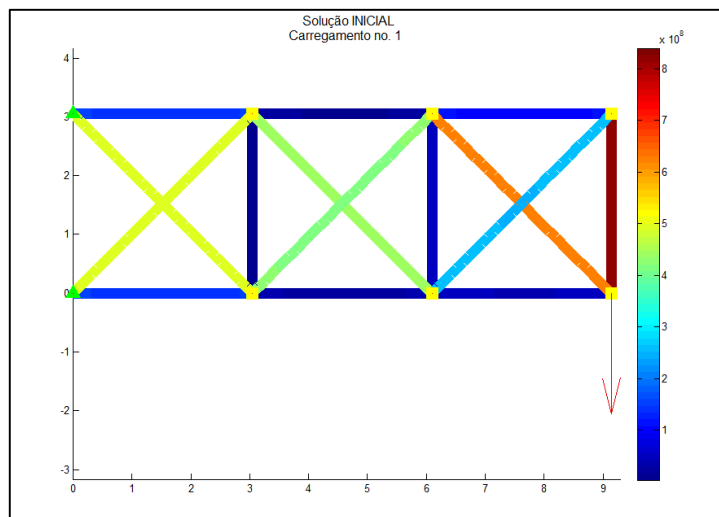


Figura 05: Solução inicial com 15 elementos

A rotina foi executada treze vezes, até que o melhor resultado se repetiu. O melhor resultado obtido entre as treze execuções, tomando como parâmetro o menor peso da estrutura, foi resolvido realizando 149 iterações. A configuração ótima pode ser conferida na Fig. 06.

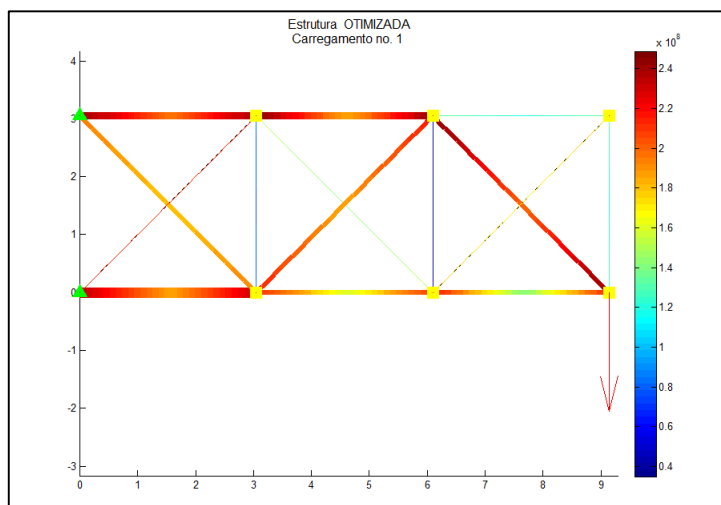


Figura 06: Configuração ótima com 15 elementos

Tabela 02: Resultado da solução ótima com 15 elementos

Elemento	Tubo escolhido	Área da Seção
1	22	0,004244
2	22	0,004244
3	1	0,000169
4	24	0,006296
5	20	0,002813
6	20	0,002813
7	1	0,000169
8	1	0,000169
9	1	0,000169
10	20	0,002813
11	1	0,000169
12	4	0,000306
13	20	0,002813
14	20	0,002813
15	1	0,000169
Massa total	811,926 N	

Da mesma forma que na situação da estrutura contendo 10 elementos, alguns elementos com seção mínima podem ser desprezados. O resultado da solução ótima está na Tabela 02.

4.3 Situação com 18 elementos

A análise inicia-se com 18 variáveis de projeto. É considerado um carregamento P , como nas situações anteriores, aplicado no nó 1, 2, 4, 6 e 8 da estrutura, como mostra a Fig. 07. A Fig. 08 apresenta a configuração inicial da estrutura.

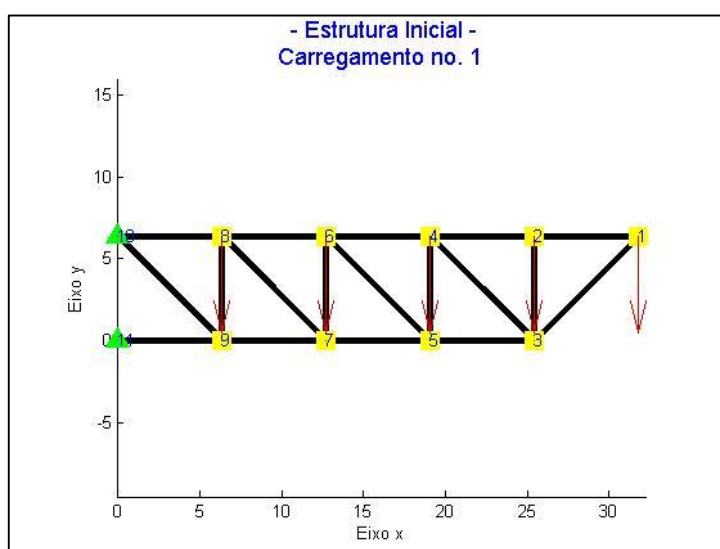


Figura 07: Estrutura inicial com 18 elementos

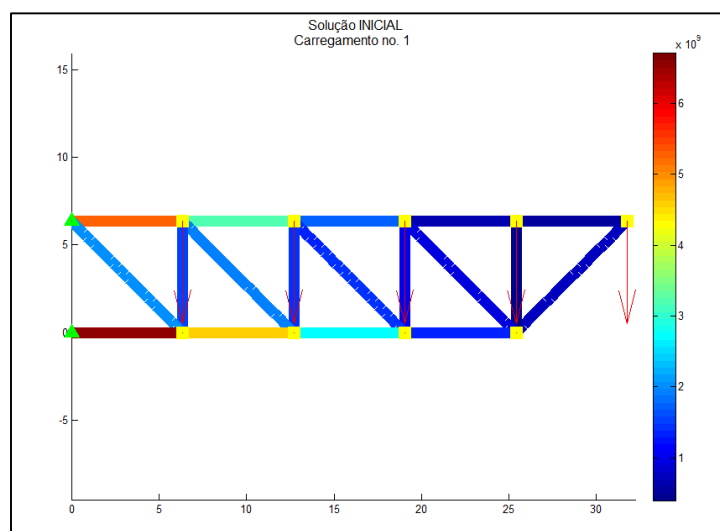


Figura 08: Solução inicial com 18 elementos

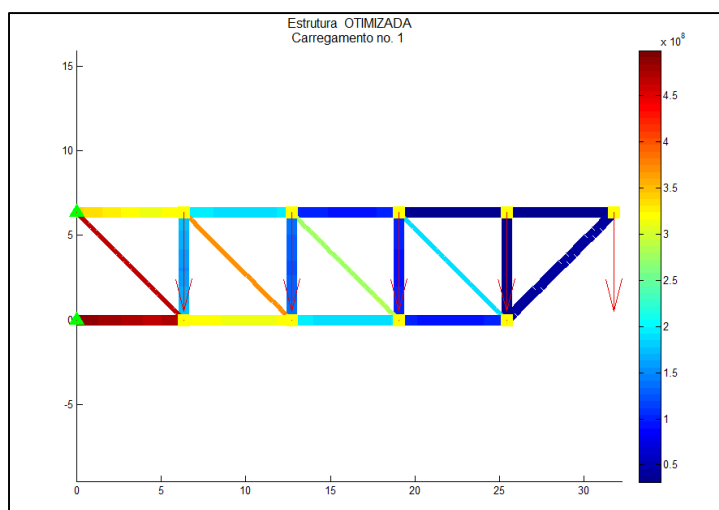


Figura 09: Configuração ótima com 18 elementos

Tabela 03: Resultado da solução ótima com 18 elementos

Elemento	Tubo escolhido	Área da Seção
1	20	0,002813
2	20	0,002813
3	20	0,002813
4	20	0,002813
5	14	0,001329
6	20	0,002813
7	20	0,002813
8	20	0,002813
9	14	0,001329
10	20	0,002813
11	20	0,002813
12	20	0,002813
13	14	0,001329
14	20	0,002813
15	20	0,002813
16	20	0,002813
17	14	0,001329
18	20	0,002813
Massa total	2814,368 N	

A rotina foi executada até o melhor resultado se repetir, sendo executada por dezessete vezes. O melhor resultado obtido entre as dezessete execuções, tomando como parâmetro o menor peso da estrutura, foi resolvido realizando 39 iterações. A configuração ótima pode ser conferida na Fig. 09.

Nesta situação, a estrutura não apresentou elementos com seção menor que outros elementos que pudessem ser considerados desprezíveis em comparação aos de seção maior, mantendo-se a quantidade de 18 elementos.

5 CONCLUSÃO

O estudo apresentado tem como objetivo a implementação computacional de uma formulação numérica para resolver problemas de otimização estrutural, buscando a massa mínima da estrutura para o caso de pórticos bidimensionais com restrições quanto à flexão, tração e compressão.

Pode ser observado com a realização deste estudo, que alguns elementos podem ser desprezados devido a seção ser extremamente pequena com relação aos outros elementos da estrutura. Esses resultados refletem na economia dos materiais a serem utilizados para a concepção da estrutura analisada em projeto.

A aplicação dos Algoritmos Genéticos se mostrou eficaz, tendo a penalização adaptativa como recurso para as restrições, mutações e cruzamentos. Considera-se uma opção viável para a realização de projetos ótimos, enquanto o seu custo computacional é baixo.

AGRADECIMENTOS

À professora Francielly Elizabeth de Castro Silva e ao curso de Pós-Graduação em Análise Estrutural da Universidade Positivo (UP), bem como ao coordenador executivo do curso, professor Roberto Mauro Felix Squarcio.

REFERÊNCIAS

- Alvarenga, R. C. S. S., 1989. *Otimização de treliças*. Dissertação de Mestrado. Dep. de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Arora, J. S., 2004. *Introduction to Optimum Design*. 2. ed. Elsevier, San Diego.
- Camp, C. V., & Bichon, B. J., 2004. Design of space trusses using ant colony optimization. *Journal of Structural Engineering*, vol. 130, n. 5, pp. 741-51.
- Camp, C. V., & Farshchin, M., 2014. Design of space trusses using modified Teaching–Learning Based Optimization. *Engineering Structures*, vol. 63, pp. 87-97.
- Chong, E.K.P. & Zak, S.H., 2001. *An Introduction to Optimization*. 2º Ed.

- Cordeiro, M. F., 2007. *Uma técnica para otimização estrutural mediante a derivada topológica*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.
- Dasgupta, D., & Michalewicz, Z., 1997. *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*. Springer-Verlag.
- Elperin, T., 1998. Monte Carlo structural optimization in discrete variable with annealing algorithm. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 815-821.
- Goldberg, D. E., 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Wesley Longman.
- Lopes, R. H. & Miguel, L. F. F., 2013. *Introdução a otimização estrutural*. Programa de pós-graduação em engenharia civil. Dep. de Engenharia Civil. Universidade Federal de Santa Catarina.
- Michalewicz, Z., Dasgupta, D. R., Riche, L., & Schoenauer, M., 1996. Evolutionary algorithms for constrained engineering problems. *Computers & Industrial Engineering Journal*, vol. 30, pp. 851-870.
- Pedersen, P., 2003. *Optimal Designs – Structures and Materials – Problems and Tools*. Department of Mechanical Engineering, Solid Mechanics, Technical University of Denmark.
- Rajeev, S., & Krishnamoorthy, C. S., 1992. Discrete optimization of structures using genetic algorithms. *Journal of Structural Engineering*, vol. 118, pp. 1233-1250.
- Rosa, T. O. & Luz, H. S., 2009. *Conceitos Básicos de Algoritmos Genéticos: Teoria e Prática*. XI Encontro de Estudantes de Informática do Tocantins, Palmas.
- Silva, F. E. C., Pacheco, F., Pereira, J. T., 2014. *Otimização de forma e dimensional de estruturas treliçadas utilizando Algoritmo Híbrido*. CILAMCE 2014, Fortaleza.
- Stolpe, M., 2003. *On Models and Methods for Global Optimization of Structural Topology*. Thesis (Doctoral) – Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm.
- Togan, V., & Daloglu, A. T., 2008. An improved genetic algorithm with initial population strategy and self-adaptive member grouping. *Computers & Structures*, vol. 86, pp. 1204-1218.