



**UMA NOVA ESTRATÉGIA PARA MODELAGEM DE FIBRAS DE
AÇO E ARMADURAS EM ESTRUTURAS DE CA**

**A NEW STRATEGY FOR MODELING STEEL FIBERS AND
REINFORCEMENT BARS IN RC STRUCTURES**

Luís A. G. Bitencourt Jr.

Yasmin T. Trindade.

luis.bitencourt@usp.br

yasmintrindade@usp.br

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Av. Prof. Almeida Prado, trav. 2, 271, Universidade de São Paulo - USP, 05508-900, São Paulo-SP, Brasil

Eduardo A. Rodrigues

Osvaldo L. Manzoli

eduardoalex@feb.unesp.br

omanzoli@feb.unesp.br

Universidade Estadual Paulista

Av. Eng. Luís Edmundo Carrijo Coube, 14-01, 17033-360, Bauru-SP, Brasil

Resumo. *Este artigo apresenta uma nova técnica para modelagem de fibras de aço e armaduras em estruturas de concreto armado com base na utilização de elementos finitos de acoplamento. O acoplamento entre as malhas independentes do concreto e reforços não adiciona novos graus de liberdade ao problema. Estratégias para acoplamento rígido e não rígido são empregadas para representar os casos particulares de aderência perfeita e perda de aderência, respectivamente, entre o reforço e o concreto. O modelo pode ser aplicado para problemas 2D e 3D considerando armaduras com geometria e orientação arbitrárias. Alguns exemplos numéricos com barras e fibras de aço são apresentados e demonstram a versatilidade e precisão da metodologia proposta.*

Keywords: *armaduras, fibras de aço, concreto armado, elemento finito de acoplamento, modelo de dano.*

Abstract. *This paper presents a new and general technique for modeling steel fibers and conventional reinforcement bars in reinforced concrete structures based on the use of coupling finite elements. The coupling between the independent meshes from concrete and bars does not introduce any additional degree of freedom to the problem. Rigid and non-rigid coupling schemes may be used to represent the particular cases of perfect adherence and bond-slip behavior, respectively, between the concrete and reinforcements. The model may be applied for 2D and 3D problems and reinforcement bars of arbitrary geometry and orientation can be modeled. A number of numerical analyses modeling rebars and steel fiber in concrete are performed and the results obtained shows the versatility and accuracy of the proposed methodology.*

Keywords: *reinforcement bars, steel fibers, reinforced concrete, coupling finite element, continuum damage model.*

1 INTRODUCTION

Na modelagem computacional de estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos (MEF), três ingredientes devem ser apropriadamente representados: concreto, armaduras e a interface entre eles.

Os modelos mais empregados para representar as barras de aço via MEF são geralmente classificados como: distribuído, discreto ou incorporado. O modelo distribuído é apropriado para modelagem das armaduras distribuídas, uma vez que, a principal hipótese em sua formulação, considera as armaduras uniformemente distribuídas sobre os elementos de concreto, com um ângulo de inclinação pré-definido. Desta forma, este tipo de representação é adequado para representar armaduras em estruturas de concreto como membranas (Barzegar (1989); Vecchio (1990)), cascas (Polak e Vecchio (1993); Owen et al. (1983); Hu e Schnobrich (1991)) e placas (Polak e Vecchio (1993); Owen et al. (1983); Hu e Schnobrich (1991)). Além disso, usualmente são empregados nesse tipo de representação, modelos constitutivos com propriedades materiais homogenizadas, e consequentemente, as armaduras não possuem uma representação de forma discreta e explícita.

Nos modelos discreto e incorporado, as armaduras são representadas de forma discreta e explícita. Estes modelos são indicados para aplicações cujas armaduras são posicionadas aleatoriamente no interior das estruturas de concreto com espaçamentos não uniformes. No modelo discreto, há uma dependência da malha do concreto em relação ao posicionamento das armaduras, uma vez que, os elementos finitos das armaduras devem ser posicionados nas arestas dos elementos finitos adjacentes de concreto e conectados aos seus respectivos nós (Ngo e Scordelis (1967)). Por outro lado, nenhum elemento finito especial é necessário e a contribuição das armaduras na matriz de rigidez global é feita automaticamente. E-Mezaini and Çitipitioglu (1991) propuseram uma técnica alternativa para superar a inconveniente dependência de malha nesse tipo de representação. Neste modelo, elementos finitos isoparamétricos com nós móveis são empregados para representar o concreto, os quais permitem um posicionamento arbitrário das armaduras. Contudo, esta formulação é limitada, permitindo que cada elemento de concreto possa ser intersectado por apenas um elemento de armadura. Por fim, cada destacar que o modelo discreto é muito empregado para investigar a perda de aderência entre a armadura e concreto, uma vez que este fenômeno é introduzido diretamente neste tipo de formulação. Elementos de ligação (molas) (Ngo e Scordelis (1967); Nilson (1968)) e elementos de contato (Schäfer (1975)) são as estratégias usualmente empregadas para representar esse fenômeno.

Para modelagem via MEF de estruturas de concreto, o modelo incorporado se apresenta como o mais atrativo, permitindo um posicionamento arbitrário das armaduras em relação a malha empregada para o concreto. Ou seja, as armaduras podem intersectar os elementos de concreto em qualquer direção. Neste modelo, a rigidez de cada segmento de armadura é adicionada a rigidez do seu respectivo elemento de concreto intersectado. Para o caso de aderência perfeita entre o concreto e armadura, a matriz de rigidez da armadura (correspondente ao seu comprimento incorporado) é calculada usando a mesma relação deformação-deslocamento empregada para calcular a matriz de rigidez de seu respectivo elemento de concreto intersectado, e consequentemente, para este caso, não se altera o tamanho da matriz de rigidez. Exemplos de modelos de representação de armaduras incorporadas podem ser encontrados em Elwi e Hru-dey (1989) (para armaduras curvas), Al-Bayati e Fahed (2008) (para armaduras em elementos de cascas), e em Cheng e Fan (1993) e Barzegar e Maddipudi (1994) e Barzegar e Maddipudi

(1997) (para armaduras tridimensionais). É importante destacar que as formulações incorporadas, que permitem perda de aderência entre o concreto e as armaduras, aumentam o número de graus de liberdade do problema, e consequentemente, também aumentam o tamanho da matriz de rigidez e o esforço computacional necessário para resolver o problema. Por fim, é importante destacar que estes modelos de representação necessitam de um algoritmo para identificar a interseção entre as armaduras e seus respectivos elementos de concreto, para o cálculo da contribuição de sua rigidez localmente. Usualmente, um método de integração ou um método iterativo é empregado para mapear os pontos de Gauss de coordenadas global para local, e posteriormente, calcular sua contribuição na matriz de rigidez.

Além dos três modelos mencionados acima, cabe destacar que alguns autores vem considerando a presença das armaduras diretamente nos modelos constitutivos (macroescala) adotados para representar o concreto. Exemplo de tipo de modelo pode ser encontrado em Manzoli et al. (2008), onde os autores utilizam a teoria das misturas para considerar a presença das armaduras orientadas em diferentes direções.

Recentemente, com a crescente aplicação do Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA) na construção civil, substituindo em alguns casos, parte da armadura convencional das estruturas de concreto armado, diversos modelos numéricos têm sido propostos. Entre os modelos mais promissores, tem se destacado aqueles que propõem uma representação discreta das fibras, pois conseguem levar em conta individualmente os principais fatores listados por Bentur e Mindess (2007) que influenciam no comportamento deste compósito: (a) estrutura da matriz cimentícia; (b) forma e distribuição das fibras; e (c) estrutura da interface fibra-matriz. Nestes modelos, alguns autores consideram uma representação explícita das fibras, como por exemplo em Pros et al. (2012), ou de forma implícita, através de forças de interação aplicadas na malha da matriz cimentícia, como por exemplo na estratégia desenvolvida por Radtke et al. (2011). Outra alternativa foi desenvolvida por Etse et al. (2012), no qual as fibras e seu direcionamento são considerados dentro dos modelos utilizados para descrever o comportamento dos “elementos de interface com espessura nula”, adotados para descrever a propagação de fissuras.

Entre os desafios encontrados nos modelos com representação discreta das fibras, está o método de acoplamento de malhas não conformes. Esses métodos utilizam na maioria das vezes multiplicadores de Lagrange, acoplando as malhas não conformes de forma rígida (acoplamento perfeito), e com isso consideram o efeito de aderência entre os materiais dentro do modelo adotado para representar as fibras (Pros et al. (2012); Cunha et al. (2012)). Outro aspecto relevante é a limitação dos modelos a problemas 2D, devido às dificuldades para estender as formulações empregadas para problemas 3D e problemas de singularidade encontrados durante a propagação de fraturas (Pros et al. (2012); Radtke et al. (2011); Etse et al. (2012)).

A fim de superar algumas das limitações apresentadas pelos modelos descritos acima, é proposto neste artigo uma nova técnica para representação discreta e explícita de reforços, como armaduras em estruturas de CA e fibras de aço. O modelo desenvolvido é baseado na utilização do novo elemento finito denominado Elemento Finito de Acoplamento (EFA) desenvolvido por Bitencourt Jr. et al. (2015). Com esta técnica, reforço e concreto são discretizados em elementos finitos de forma totalmente independentes, e posteriormente são acoplados utilizando os EFAs. Além disso, a descrição da interação entre fibras e matriz pode ser feita utilizando uma formulação denominada não rígida, através da qual, o complexo fenômeno de “bond-slip” (tensão de aderência x deslizamento do reforço em relação ao concreto) pode ser descrito por um modelo constitutivo contínuo e ajustado para descrever qualquer relação tensão de aderência

x deslizamento. A formulação generalista desenvolvida pode ser aplicada tanto para simulações 2D quanto 3D.

2 REPRESENTAÇÃO DISCRETA E EXPLÍCITA DE REFORÇOS

O modelo proposto neste trabalho para representação discreta e explícita de reforços é baseado na utilização de elementos finitos de acoplamento. O procedimento para a construção do modelo numérico é apresentado para um um consolo de concreto armado reforçado com fibras de aço, conforme ilustra a Figura 1. Inicialmente, constrói-se a geometria do elemento estrutural e dos diferentes tipos de armaduras que fazem parte do modelo. Na segunda etapa, concreto (Figura 1(a)) e armaduras (Figura 1(b)) são discretizados de forma independente, gerando malhas de elementos finitos independentes (não conformes) entre os diferentes constituintes. Reforços como fibras de aço representadas de forma discreta e explícita também podem ser adicionadas ao modelo (ver Figura 1(c)). Neste trabalho está sendo usado um gerador de fibras com distribuição randômica, uniforme e isotrópica. Na última etapa, elementos finitos de acoplamento são adicionados para acoplar as malhas independentes dos reforços e concreto.

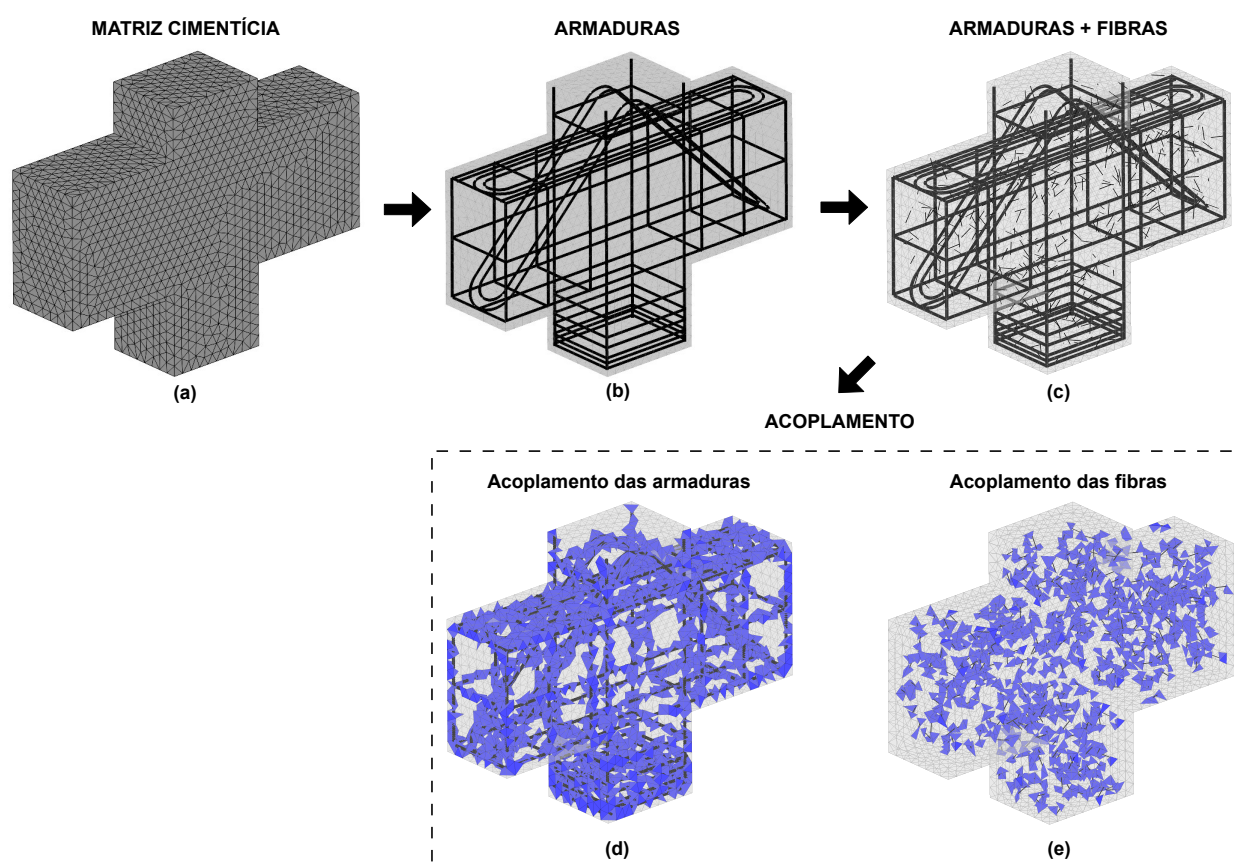


Figura 1: Representação de reforços baseada na utilização de elementos finitos de acoplamento: (a) discretização do concreto; (b) criação e discretização das armaduras; (c) criação e discretização de uma nuvem de fibras de aço; (d) acoplamento concreto-armaduras; e (e) acoplamento concreto-fibras.

O elemento finito de acoplamento é composto pelos nós do elemento utilizado para representar o concreto, mais um nó adicional, que será o nó do elemento unidimensional utilizado

para representar o reforço e pertencente ao domínio do referido elemento finito de concreto. Desta forma, para cada nó dos elementos pertencente aos elementos de reforço, um elemento finito de acoplamento é adicionado ao problema.

Dentre as principais vantagens desta estratégia de inclusão de reforços estão: (i) os elementos finitos de acoplamento não introduzem graus de liberdade adicionais ao problema, uma vez que são construídos utilizando nós existentes das malhas do concreto e dos reforços; (ii) acoplamento rígido e não rígido pode ser aplicado para representar os casos de aderência perfeita e perda de aderência, respectivamente; (iii) barras com geometria e orientação arbitrária podem ser modeladas; (iv) a metodologia pode ser aplicada a problemas 2D e 3D; (v) a formulação pode ser adaptada para qualquer tipo de elemento finito e implementada facilmente em qualquer código existente.

2.1 Elemento finito de acoplamento (EFA)

Considere um elemento finito isoparamétrico convencional de domínio Ω_e , que servirá de base para o elementos de acoplamento, com nn nós e funções de forma $\bar{N}_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, nn$), definidas para os pontos materiais $\mathbf{X}$ no interior do elemento, tal que o deslocamento, $\bar{\mathbf{U}}$, em qualquer ponto de seu interior pode ser aproximado em termos dos deslocamentos nodais, $\mathbf{D}_i$ ($i = 1, nn$), como:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nn} \bar{N}_i(\mathbf{X}) \mathbf{D}_i \quad (1)$$

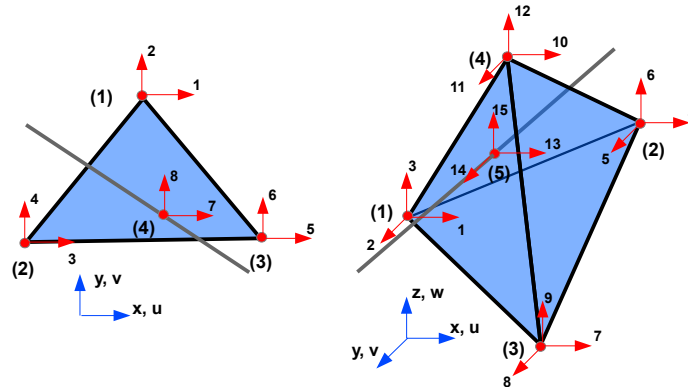


Figura 2: Elementos finitos de acoplamento.

O elemento finito de acoplamento é um elemento com um nó adicional, $nn + 1$, em seu interior, chamado nó de acoplamento, situado no ponto material $\mathbf{X}_c \in \Omega_e$, conforme ilustra a Figura 2. O deslocamento relativo entre o nó de compatibilização e o ponto material do elemento base situado na mesma posição pode ser expresso como:

$$[[\mathbf{U}]] = \mathbf{D}_{nn+1} - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{D}_{nn+1} - \sum_{i=1}^{nn} \bar{N}_i(\mathbf{X}_c) \mathbf{D}_i = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (2)$$

onde a matriz $\mathbf{B}_e = [-\bar{\mathbf{N}}_1(\mathbf{X}_c) \quad -\bar{\mathbf{N}}_2(\mathbf{X}_c) \quad \dots \quad -\bar{\mathbf{N}}_{nn}(\mathbf{X}_c) \quad \mathbf{I}]$ e $\bar{\mathbf{N}}_i = \bar{N}_i \mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem 2 ou 3, para problemas bidimensionais ou tridimensionais, respectivamente e o

vetor $\mathbf{D}_e = \left\{ \mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{D}_{nn+1} \right\}$, responsável por agrupar os deslocamentos nodais do elemento de compatibilização.

Desta forma, podemos definir como o trabalho virtual interno do elemento de acoplamento como:

$$\delta W_e^{int} = \delta[[\mathbf{U}]]^T \mathbf{F}([[\mathbf{U}]]) \quad (3)$$

onde $\mathbf{F}$ é a força de reação ao deslocamento relativo $[[\mathbf{U}]]$, e $\delta[[\mathbf{U}]]$ é um deslocamento relativo virtual arbitrário (compatível com as condições de contorno essenciais do problema). Utilizando-se para o deslocamento virtual relativo a mesma aproximação usada para o deslocamento relativo dada pela equação (2), ou seja, $\delta[[\mathbf{U}]] = \mathbf{B}_e \delta \mathbf{D}_e$, o vetor de forças internas do elemento de compatibilidade pode ser expresso como:

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{F}([[\mathbf{U}]]). \quad (4)$$

A matriz de rigidez correspondente fica dada por:

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial \mathbf{F}_e^{int}}{\partial \mathbf{D}_e} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_{tg} \mathbf{B}_e \quad (5)$$

onde $\mathbf{C}_{tg} = \partial \mathbf{F}([[\mathbf{U}]]) / \partial [[\mathbf{U}]]$ representa o operador tangente da relação constitutiva entre força de reação e deslocamento relativo.

Acoplamento entre distintas malhas

O vetor de forças internas e a matriz de rigidez do sistema composto pela malha $\mathbf{A}$ compatibilizada com a malha $\mathbf{B}$, através de um conjunto de elementos de acoplamento $\mathbf{C}$, pode ser expresso como:

$$\mathbf{F}^{int} = A_{e=1}^{nel_A} (\mathbf{B}_e^T)_A (\mathbf{F}_e^{int})_A + A_{e=1}^{nel_B} (\mathbf{B}_e^T)_B (\mathbf{F}_e^{int})_B + A_{e=1}^{nel_C} (\mathbf{B}_e^T)_C (\mathbf{F}_e^{int})_C \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = A_{e=1}^{nel_A} (\mathbf{B}_e^T)_A (\mathbf{K}_{tg})_A (\mathbf{B}_e)_A + A_{e=1}^{nel_B} (\mathbf{B}_e^T)_B (\mathbf{K}_{tg})_B (\mathbf{B}_e)_B + A_{e=1}^{nel_C} (\mathbf{B}_e^T)_C (\mathbf{K}_{tg})_C (\mathbf{B}_e)_C \quad (7)$$

Aderência perfeita

A aderência perfeita entre concreto e reforço com malhas não conformes é imposta assumindo-se valores elevados para as constantes elásticas do modelo constitutivo do elemento de acoplamento:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C} \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde $\tilde{C}$ é um valor de rigidez elevado, que atua como uma variável de penalização do deslocamento relativo. Assumindo uma relação elástica entre a força de reação e o deslocamento relativo $\mathbf{F} = \mathbf{C}[[\mathbf{U}]]$ as forças de interação reforço-concreto, $\mathbf{F}$, por condições de equilíbrio, devem ser limitadas. Portanto, quando as constantes elásticas tendem a um valor extremamente elevado, os deslocamentos relativos, $[[\mathbf{U}]]$, devem tender a zero.

Perda de aderência

A perda de aderência é representada através de um acoplamento não rígido (compatibilização parcial) e permite o deslocamento relativo entre reforço (barras de aço) e o elemento utilizado para representar o concreto, e introduz forças de interação entre esses dois componentes.

Como o movimento de relativo é primordialmente um deslizamento na direção do eixo do reforço, faz-se necessário usar um sistema de referência cartesiano local, (n,s,t), orientado de acordo com reforço, tal que o eixo **n** coincida com seu eixo longitudinal. Desta forma, os vetores de deslocamento relativo e força de interação no sistema local são definidos como: $[[\mathbf{u}]] = \mathbf{R}[[\mathbf{U}]]$ e $\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{F}$, respectivamente, onde **R** é a matriz ortogonal de rotação entre os sistemas local e global.

O modelo de perda de aderência pode ser representado facilmente assumindo-se valores de constantes elásticas distintas segundo o sistema de referência local:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_n & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c} \end{bmatrix}, \quad c_n \ll \tilde{c} \quad (9)$$

Em geral, os modelos para representar a perda de aderência estabelecem uma relação local entre a tensão de cisalhamento de aderência na superfície de interface reforço-matriz, τ , e o deslizamento relativo entre reforço e matriz, s .

Como o elemento de compatibilização introduz uma força de interação entre reforço e matriz localizada no nó de acoplamento, pode-se considerar que essa força é resultante das tensões de aderência que atuam em uma superfície de interface reforço-matriz na vizinhança do nó compatibilizado. Assim, assumindo que a tensão de aderência é constante na vizinhança do nó e que o tamanho dessa vizinhança que contribui para a força resultante em um determinado nó corresponde à média das semi-distâncias entre o nó "i" e os nós adjacentes do reforço "j" e "k", a força de compatibilização pode ser expressa como:

$$f_n = \tau([u_n])PL \quad (10)$$

onde $L = (L_{ij} + L_{jk})/2$ e P é o perímetro da seção transversal do reforço. Como as tensões de cisalhamento atuam na direção longitudinal do reforço, elas somente contribuem para a componente segundo a direção n do sistema de referência local. Note que o deslizamento relativo s é a própria componente do deslocamento relativo na direção local n , ou seja, $s = [u_n]$. As demais componentes transversais da força resultante podem ser expressas como:

$$f_s = \tilde{c}[u_s]PL \quad (11)$$

$$f_t = \tilde{c}[u_t]PL \quad (12)$$

Modelo de dano para representar a perda de aderência

No caso de aderência parcial, a relação constitutiva entre a tensão de aderência e o deslizamento relativo pode ser descrita por um modelo baseado na teoria do dano. As equações do modelo são dadas pelas seguintes equações:

$$\tau = (1 - d)\bar{\tau} \quad (\text{equação constitutiva}) \quad (13)$$

$$\bar{\tau} = c_n[[u_n]] \quad (\text{tensão efetiva}) \quad (14)$$

$$\phi = \|\bar{\tau}\| - r \leq 0 \quad (\text{critério de dano}) \quad (15)$$

$$r = \max[\bar{\tau}] \quad (\text{lei de evolução da variável interna}) \quad (16)$$

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (\text{evolução da variável de dano}) \quad (17)$$

onde c_n é constante de rigidez elástica, d é a variável de dano, $\bar{\tau}$ é a tensão efetiva, e r é variável interna que assume o máximo valor atingido por $\bar{\tau}$ ao longo do processo de carga. A função $q(r)$ representa a lei de endurecimento/abrandamento do modelo constitutivo, que pode ser ajustada para representar qualquer modelo de aderência do tipo $\tau(s)$, bastando fazer $q(r) = \tau(r/c_n)$.

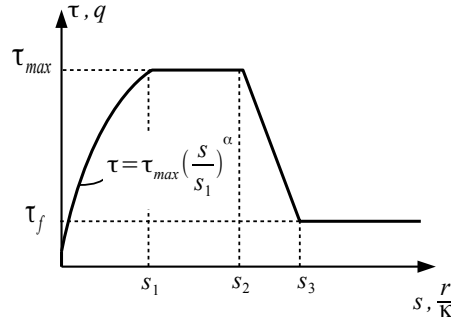


Figura 3: Relação tensão de cisalhamento x deslizamento proposto pelo CEB-FIP Model Code.

Tomando como exemplo o modelo de aderência proposto pelo CEB *fib* Model Code ilustrado na Figura 3 e descrito pelas equações:

$$\tau(s) = \begin{cases} \tau_{max} \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha & \text{se } s \leq s_1 \\ \tau_{max} & \text{se } s_1 \leq s \leq s_2 \\ \tau_{max} - \frac{(\tau_{max} - \tau_f)(s - s_2)}{s_3 - s_2} & \text{se } s_2 \leq s \leq s_3 \\ \tau_f & \text{se } s > s_3 \end{cases} \quad (18)$$

a sua correspondente lei de endurecimento/abrandamento fica então definida como:

$$q(r) = \begin{cases} \tau_{max} \left(\frac{r/c_n}{s_1} \right)^\alpha & \text{se } r/c_n \leq s_1 \\ \tau_{max} & \text{se } s_1 \leq r/c_n \leq s_2 \\ \tau_{max} - \frac{(\tau_{max} - \tau_f)(r/c_n - s_2)}{s_3 - s_2} & \text{se } s_2 \leq r/c_n \leq s_3 \\ \tau_f & \text{se } r/c_n > s_3 \end{cases} \quad (19)$$

onde $\alpha, \tau_{max}, \tau_f$ e $s_i (i = 1, 2, 3)$ são os parâmetros do modelo de aderência, que dependem da resistência à compressão característica do concreto f_{ck} , a geometria da barra (lisa ou com ranhuras), situação de confinamento (confinada ou não confinada) e condição de aderência (boa ou ruim), de acordo com CEB-FIP Model Code.

3 MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO

Para a modelagem do concreto foi implementado um modelo de dano isotrópico contínuo proposto por Cervera et al. (1996), com duas variáveis de danos escalares d^+ e d^- , de tração e compressão, respectivamente. Essas variáveis são "nulas" para o material íntegro e assumem o valor "1" quando o material está totalmente danificado. Assim, o tensor das tensões para este modelo fica definido como:

$$\sigma = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (20)$$

no qual, as parcelas de tração $\bar{\sigma}^+$ e de compressão $\bar{\sigma}^-$ efetivas, que sofrem degradação das suas respectivas variáveis de dano.

A tensão equivalente efetiva para este modelo também é definida separadamente, para tração e compressão, respectivamente, da seguinte forma:

$$\bar{\tau}^+ = \sqrt{\bar{\sigma}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \bar{\sigma}^+}, \quad (21)$$

e

$$\bar{\tau}^- = \sqrt{\sqrt{3} (K \bar{\sigma}_{oct}^- + \bar{\tau}_{oct}^-)}. \quad (22)$$

nas quais, $K = \sqrt{2}(\beta - 1) / (2\beta - 1)$ é uma propriedade do material que depende da relação entre as resistências à compressão biaxial e uniaxial do material, β . Segundo Cervera et al. (1996), valores típicos para o concreto são $\beta = 1.16$ e $K = 0.171$. $\bar{\sigma}_{oct}^-$ e $\bar{\tau}_{oct}^-$ são respectivamente, o tensor das tensões normais e cisalhante octaédricos, que podem ser definidos em função do primeiro invariante do tensor das tensões, I_1 , e do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, ou anti-esféricas, J_2 , obtidos a partir de $\bar{\sigma}^-$.

O funcional de danificação deste modelo, decomposto em suas parcelas de tração e compressão, fica definido pelas equações:

$$\bar{\phi}^+ (\bar{\tau}^+, r^+) = \bar{\tau}^+ - r^+ \leq 0 \quad (23)$$

e

$$\bar{\phi}^- (\bar{\tau}^-, r^-) = \bar{\tau}^- - r^- \leq 0, \quad (24)$$

onde r^+ e r^- são as variáveis internas de danificação, que controlam a expansão da superfície de danificação. As superfícies de danificação no campo das tensões efetivas são expressas por $\bar{\phi}^+ (\bar{\tau}^+, r^+) = 0$, e $\bar{\phi}^- (\bar{\tau}^-, r^-) = 0$. No início da análise os limites de dano são $r_0^+ = f_t$ e $r_0^- = f_{c0}$, onde f_t é a resistência à tração e f_{c0} a resistência à compressão. A evolução dos limites de dano podem ser definidos de forma fechada, sempre assumindo o maior valor encontrado entre $\bar{\tau}^+$ e $\bar{\tau}^-$, durante o processo de carregamento, ou seja, $r^+ = \max(r_0^+, \bar{\tau}^+)$ e $r^- = \max(r_0^-, \bar{\tau}^-)$.

A evolução das variáveis de dano são então definidas como:

$$d^+ = 1 - \frac{q^+(r^+)}{r^+}, \quad (25)$$

e

$$d^- = 1 - \frac{q^-(r^-)}{r^-}, \quad (26)$$

onde, q^+ e q^- são as variáveis internas de tensão, para as quais duas expressões são adotadas para definir o comportamento de amolecimento sob tração e o endurecimento/amolecimento sob compressão, após alcançar o limite elástico à tração e compressão, respectivamente:

$$q^+(r^+) = r_0^+ e^{A^+(1-r^+/r_0^+)} \quad (27)$$

e

$$q^-(r^-) = r_0^- (1 - A^-) + r^- A^- e^{B^-(1-r^-/r_0^-)}. \quad (28)$$

Para satisfazer a objetividade de malha, a energia dissipada pelo material sob tração deve ser relacionada de forma apropriada a energia de fratura do material. Portanto, o parâmetro de

amolecimento A^+ deriva da razão entre a energia de fratura do material e o fator geométrico, l_{ch} , denominado comprimento característico, que corresponde a largura de banda onde se concentra a degradação, de modo que:

$$\frac{1}{A^+} = \frac{1}{2\overline{H}} \left(\frac{1}{l_{ch}} - \overline{H} \right) \geq 0, \quad (29)$$

onde $\overline{H} = f_t^2 / 2EG_f$ é escrito em termos da resistência à tração f_t , módulo elasticidade E , e energia de fratura do material G_f . O comprimento característico depende da discretização da malha, e neste trabalho, assume o valor da raiz quadrada da área do elemento finito, ou a raiz cúbica, do volume do elemento finito, para problemas 2D e 3D, respectivamente. É importante notar que, da relação 29 que a introdução do comprimento característico implica na limitação do tamanho máximo dos elementos finitos empregados durante a discretização de malha, $l_{ch} \leq 1/\overline{H}$. Os parâmetros A^- e B^- são definidos tal que a curva tensão-deformação para o concreto satisfaça os dois pontos previamente selecionados de um ensaio experimental uniaxial.

4 EXEMPLOS

Consolo de concreto armado

Neste exemplo é simulado o consolo de concreto armado ensaiado experimentalmente por Mehmél e Freitag (1967). A Figura 4 ilustra o modelo numérico construído.

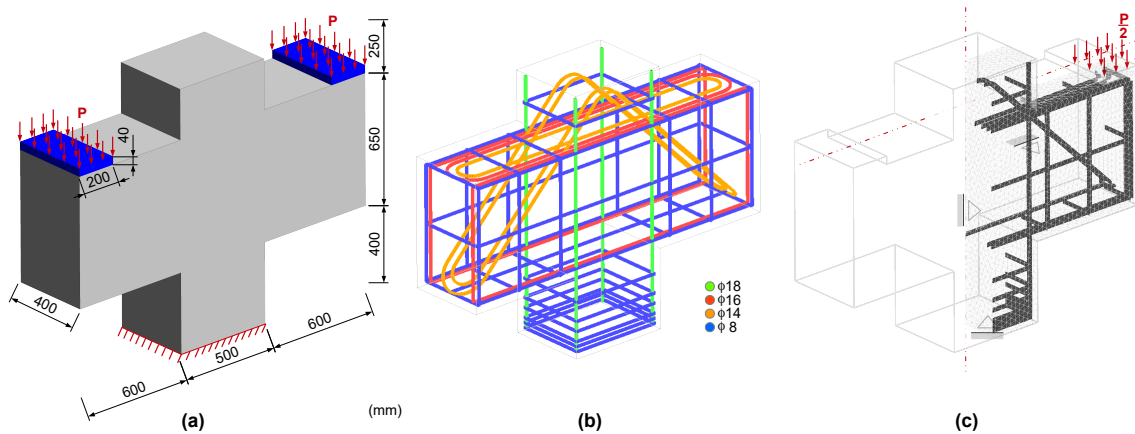


Figura 4: Modelo numérico do consolo de concreto armado: (a) geometria; (b) armaduras; e (c) condições de contorno, carregamento e simetria considerados na modelagem via MEF.

Foi utilizado para simulação tridimensional, elementos tetraédricos de acoplamento com 5 nós para acoplar as armaduras ao concreto (ver Figura 5). Foi considerado acoplamento rígido para simular aderência perfeita entre a armaduras e o concreto com $C_n = C_s = C_s = 10^9 \text{ N/mm}$.

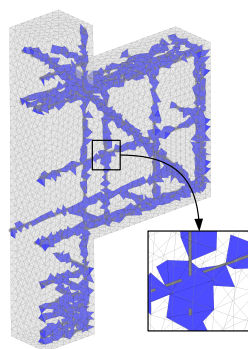


Figura 5: Acoplamento concreto-armaduras utilizando elementos finitos tetraédricos com 5 nós.

O comportamento do concreto é descrito pelo modelo de dano proposto por Cervera et al. (1996), cujas propriedades adotadas estão listadas na Tabela 1. Para ajustar a curva que descreve o comportamento à compressão, foram adotados valores típicos para o concreto: $A = 1,0$, $B = 0,89$, $\beta = 1,16$. As armaduras apresentam comportamento elastoplástico perfeito com parâmetros listados na Tabela 2.

Tabela 1: Parâmetros adotados para o concreto.

Parâmetros		Valores
Resistência à compressão	f_c	22,6 MPa
Resistência à tração	f_{ct}	2,26 MPa
Módulo de elasticidade	E_c	21,87 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,2
Energia de fratura	G_f	0,1 N/mm

Tabela 2: Parâmetros adotados para as armaduras.

Parâmetros		Valores
Tensão escoamento	f_y	430 MPa
Módulo de elasticidade	E_s	206 GPa

Para análise não linear, aplicou-se de forma incremental uma carga de 1000kN em 2000 passos de carregamento. A Figura 6 compara o quadro de fissuração experimental x numérico. Como pode ser visto, o modelo numérico foi capaz de simular o processo de falha no elemento estrutural obtido experimentalmente. Além disso, foi obtida uma carga de ruptura semelhante ao experimento, como mostra a Figura 7.

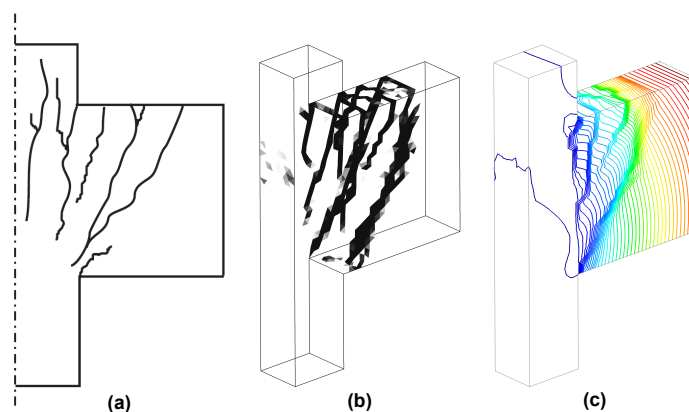


Figura 6: Quadro de fissuração para $P=933\text{kN}$: (a) resultado experimental; (b) evolução do dano (numérico); (c) isolinhas de deslocamento (numérico).

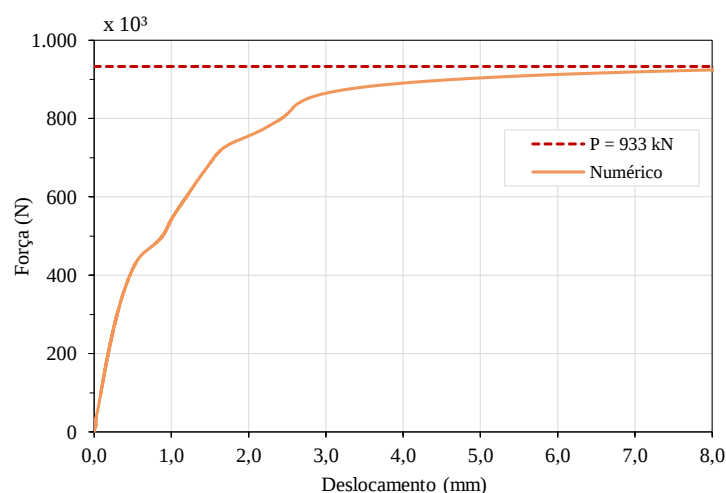


Figura 7: Curva força x deslocamento: experimental x numérico.

4.1 Viga sob flexão

Trata-se da simulação de uma viga de concreto armado sob flexão a quatro pontos. Neste exemplo também é avaliada a influência da inclusão de fibras de aço no modelo numérico com duas diferentes taxas de reforço: 20 e 60 kg/m³. Foi utilizado um modelo de distribuição randômica uniforme isotrópica (Bitencourt Jr., 2015). Foram consideradas fibras do tipo Dramix 65/35, com comprimento $l_f = 35\text{ mm}$; diâmetro $d_f = 0,55\text{ mm}$; fator de forma $l_f/d_f = 65$.

A Figura 8 ilustra os detalhes das armaduras de flexão e cisalhamento. A viga possui 3m de comprimento e seção transversal de 12,5cm x 30,0cm. A discretização em elementos finitos é mostrada na Figura 9. O concreto foi discretizado com elementos triangulares de 3 nós e os reforços (armaduras e fibras) foram discretizados com elementos finitos de treliça. O acoplamento concreto-reforços foi feito utilizando elemento finito de acoplamento triangular com 4 nós.

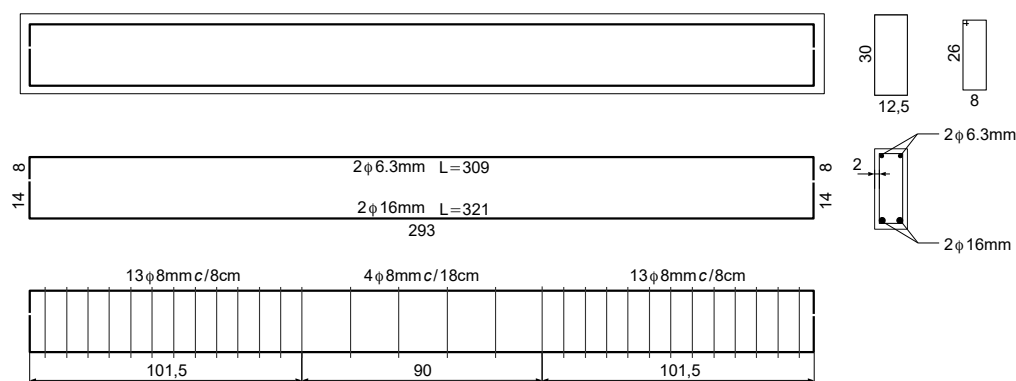
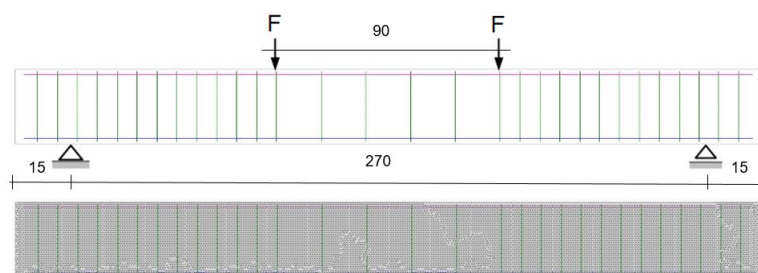
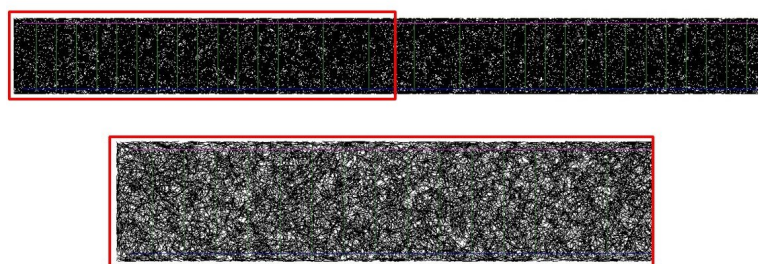


Figura 8: Detalhe das armaduras de flexão e cisalhamento.



(a)



(b)

Figura 9: Discretização da viga em elementos finitos: (a) viga de concreto armado sem fibras; e (b) nuvem de fibras geradas para o reforço de 20kg/m³.

O comportamento do concreto é descrito pelo modelo de dano proposto por Cervera et al. (1996), com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E_c = 2,26$ MPa; coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$; resistência à compressão $f_c = 22,6$; resistência à tração $f_t = 2,26$; energia de fratura $G_f = 0,1$ N/mm; e parâmetros de calibração da curva à compressão $A = 1,0$; $B = 0,89$; e $\beta = 1,16$. O comportamento das armaduras e das fibras é descrito por um modelo elastoplástico perfeito. As armaduras possuem módulo de elasticidade $E_s = 210$ GPa e tensão de escoamento $f_y = 587$ MPa e as fibras de aço $E_f = 210$ GPa e $f_{fy} = 1.345$ MPa. Foi considerado acoplamento rígido para simular aderência perfeita entre as armaduras e o concreto com $C_n = C_s = C_s = 10^9$ N/mm. Para a interface concreto-fibra foi considerado acoplamento semi-rígido para simular a perda de aderência com os seguintes parâmetros: $\tau_{max} = 30$ MPa; $\tau_r = 0,6$ MPa; $s_1 = 0,01$ mm; $s_2 = 0,01$ mm; $s_3 = 6,5$ mm; $\alpha = 0,4$ e $c_s = 10^9$ N/mm.

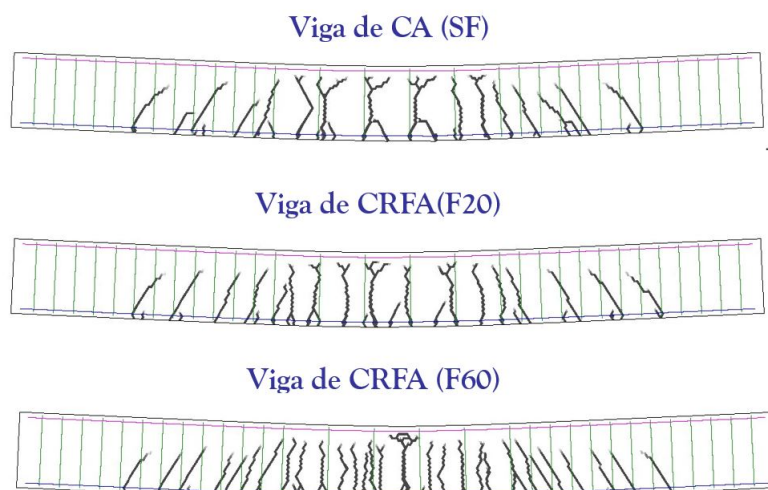


Figura 10: Curva força x deslocamento: experimental x numérico.

A Figura 10 ilustra o quadro de fissuração para os três casos considerados. Como pode ser visto, a adição de fibras de aço implicou em fissuras com menor espaçamento entre elas. Além disso a Figura 11 mostra que adição de fibras aumenta o valor da carga última obtida na simulação da viga de concreto armado.

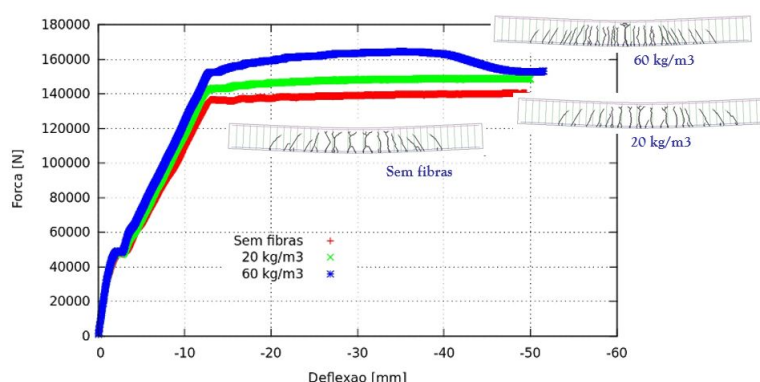


Figura 11: Curva força x deslocamento: experimental x numérico.

CONCLUSÕES

Foi desenvolvido um modelo numérico no qual os reforços são acoplados a malha do concreto através de elementos finitos de acoplamento. Para descrever a propagação de fissuras, um modelo contínuo baseado na mecânica do dano com método de integração implícito-explícito foi aplicado. A principal vantagem do modelo proposto é sua capacidade em representar reforços (armaduras e fibras de aço) de forma discreta, explícita e orientadas arbitrariamente. Além disso, o modelo também permite que qualquer lei aderência possa ser empregada para descrever a interação concreto-reforços através de uma estratégia denominada acoplamento não rígido.

Dois exemplos numéricos demonstraram a robustez e precisão do modelo proposto. Inicialmente, um consolo de concreto armado foi simulado em 3D. Neste exemplo foram considerando diferentes tipos de armaduras, com diferentes inclinações e curvas. O modelo numérico

foi capaz de representar o quadro de fissuração e a carga última obtidos experimentalmente por Mehmél e Freitag (1967). No segundo exemplo, devido o custo computacional oriundo da representação discreta das fibras de aço, um modelo 2D de uma viga de concreto armado submetida à flexão a quatro pontos foi simulada. Neste exemplo, para estudar o efeito da adição de fibras de aço, duas taxas de reforço com 20 e 60kg/m³ foram consideradas. Os resultados obtidos demonstraram que o modelo consegue representar o principal papel desempenhado pelas fibras de aço, que consiste em atuar como ponte de transferência de tensões nas fissuras, proporcionando um material com um maior número de fissuras e, conseqüentemente, um menor espaçamento entre elas. A adição de fibras também provocou um aumento na carga última obtida.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece o auxílio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - Projeto Universal - 429552/2016-5), e a segunda autora agradece o auxílio do Programa de Apoio à Pós-Graduação (PROAP) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

REFERENCES

- Al-Bayati, Z. A., & Fahed, J. J., 2008. Development of steel representation as embedded bars in concrete using finite element method. *Journal of Engineering and Development*, vol. 12, pp. 111-126.
- Barzegar, F., 1989. Analysis of RC membrane elements with anisotropic reinforcement. *Journal of Structural Engineering*, vol. 115, n. 3, pp. 647-665.
- Barzegar, F. & Maddipudi, S., 1994. Generating reinforcement in fe modeling of concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, vol. 120, n. 5, pp. 1656-1662.
- Barzegar, F. & Maddipudi, S., 1997. Three-dimensional modeling of concrete structures. ii: Reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, n. 10, pp. 1347-1356.
- Bentur, A. & Mindess, S., 2007. *Fibre Reinforced Cementitious Composites*. Modern Concrete Technology Series.
- Bitencourt Jr., L. A. G., 2015. *Numerical Modeling of Failure Processes in Steel Fiber Reinforced Cementitious Materials*. PhD thesis, Polytechnic School at the University of São Paulo/São Paulo.
- Bitencourt Jr., L. A. G., Manzoli, O.L., Prazeres, P. G. C., Rodrigues, E.A. & Bittencourt, T. N., 2015. A coupling technique for non-matching finite element meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 290, pp. 19-44.
- Cervera, M., Oliver, J. & Manzoli, O., 1996. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 25, n. 9, pp. 987-1010.
- Cheng, Y. M. & Fan, Y., 1993. Modeling of reinforcement in concrete and reinforcement confinement coefficient. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 13, n. 4, pp. 271-284.

- Cunha, V.M.C.F., Barros, J.A.O. & J.M., 2012. Sena-Cruz. A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites. *Computers & Structures*, vol. 94 - 95, pp. 22-33.
- E-Mezaini, N. & Çitipitioglu, E., 1991. Finite element analysis of prestressed and reinforced concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, vol. 117, n. 10, pp. 2851-2864.
- Elwi, A. E. & Hrudey, T. M., 1989. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115, n. 4, pp. 740-754.
- Etse, G., Caggiano, A. & Vrech, S., 2012. Multiscale failure analysis of fiber reinforced concrete based on a discrete crack model. *International Journal of Fracture*, vol. 178, n. 1-2, pp. 131-146.
- Hu, H.-T. & Schnobrich, W.C., 1991. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates and shells under monotonic loading. *Computers & Structures*, vol. 38, n. 5, pp. 637-651.
- Manzoli, O. L., Oliver, J., Huespe, A.E. & Diaz, G., 2008. A mixture theory based method for three-dimensional modeling of reinforced concrete members with embedded crack finite elements. *Computers and Concrete*, vol. 5, n. 6, pp. 401-416.
- Mehmel A. & Freitag W., 1967. Tragfähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsolen. *Der Bauingenieur*, vol. 42, pp. 362-369.
- Ngo, D. & Scordelis, A. C., 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal*, vol. 64, n. 3, pp. 152-163.
- Nilson, A. H., 1968. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. *ACI Journal*, vol. 65, n. 9, pp. 757-766.
- Owen, D.R.J., Figueiras, J.A. & Damjanic, F., 1983. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 41, n. 4, pp. 323-366.
- Polak, M. & Vecchio, F., 1993. Nonlinear analysis of reinforced-concrete shells. *Journal of Structural Engineering*, vol. 119, n. 12, pp. 3439-3462.
- Pros, A., Diez, P. & Molins, C., 2012. Modeling steel fiber reinforced concrete: numerical immersed boundary approach and a phenomenological mesomodel for concrete-fiber interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 90, n. 1, pp. 65-86.
- Radtke, F. K. F. , Simone, A. & Sluys, L. J., 2011. A partition of unity finite element method for simulating non-linear debonding and matrix failure in thin fibre composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 86, n. 4-5, pp. 453-476.
- Schäfer, H., 1975. A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 6, n. 3, pp. 335-353.
- Simó, J. C. & Hughes, T. J. R., 1998. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag.
- Vecchio, F., 1990. Reinforced concrete membrane element formulations. *Journal of Structural Engineering*, vol. 116, n. 3, pp. 730-750.