



UMA ESTRATÉGIA PARA O REFINAMENTO ADAPTATIVO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Myrella Vieira Cabral

Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

myrella.cabral@ufpe.br

paulo.vribeiro@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Centro de Tecnologia e Geociências

Departamento de Engenharia Civil

Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n, 50740-530, Pernambuco, Recife, Brasil.

Resumo. *Uma das maiores vantagens do Método dos Elementos Finitos (MEF) é a utilização de computadores convencionais para programação e análise de problemas diversos. Qualquer domínio físico com geometria complexa e condições de contorno prescritas pode ser analisado com o método. Por outro lado, o procedimento de geração de malha (pré-processamento) muitas vezes exige um alto custo de processamento computacional para geração de uma malha que forneça uma solução aceitável, principalmente em problemas onde há áreas mais sensíveis à análise, nas quais é necessário um número maior de elementos para que a solução seja obtida com a precisão desejada. O presente trabalho consiste no desenvolvimento de um código no MATLAB que gera uma malha inicial e realiza o refinamento h-adaptativo utilizando o MEF para obtenção de soluções de problemas bidimensionais descritos pela equação de Poisson. É proposta uma estratégia com duplo critério para o refinamento adaptativo (global e local), tendo em vista que de acordo com a finalidade da análise podem existir regiões de maior e menor interesse do domínio. O critério de discretização é estabelecido através da utilização do estimador de erro a posteriori Média Nodal Simples e do erro relativo percentual em energia. É utilizado o elemento triangular linear e realizada a suavização progressiva da malha. A validação do código foi feita por meio da comparação com soluções analíticas e valores teóricos de referência.*

Palavas-Chave: *Refinamento adaptativo, Elementos finitos, Poisson.*

1 INTRODUÇÃO

Técnicas numéricas de análise de estruturas foram desenvolvidas e vem sendo aprimoradas ao longo dos anos. Sendo utilizadas para a solução de problemas de diversas naturezas de acordo com suas características e capacidade de representar e capturar singularidades associadas a cada contexto envolvido. Nos métodos com malha, a geometria é subdividida em pequenas partes, denominadas de elementos, os quais passam a representar o domínio contínuo do problema. Dessa forma, o MEF propõe que a superfície a ser analisada seja dividida em um número limitado de elementos conectados por nós. Regiões mais refinadas, com maior número de elementos, permitem maior precisão ao passo que demandam elevado custo computacional. Por esse motivo é importante que o refinamento seja distribuído de forma inteligente ao longo do domínio.

Existem diversos procedimentos para o refinamento de soluções em MEF (Zienkiewicz & Taylor, 2000). Uma subdivisão clássica é apresentada a seguir: Refinamento-p, Refinamento-r e Refinamento-h. O primeiro propõe o refinamento da malha por meio da alteração da ordem do polinômio usado na interpolação, geralmente alterado hierarquicamente, mantendo-se o tamanho dos elementos. O segundo mantém o número total de nós constantes e ajusta as suas posições para obter uma aproximação ótima. Esse procedimento é teoricamente interessante, mas é difícil de usar na prática e é pouco recomendado. No Refinamento-h, o qual foi utilizado neste artigo, alteram-se as dimensões e/ou formas dos elementos de maneira que em alguns locais os elementos possuem maiores dimensões do que em outros, permitindo que as regiões críticas dos problemas recebam atenção especial, proporcionando maior economia no processo de obtenção da solução desejada.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um código para refinamento h-adaptativo com duplo critério para subdivisão dos elementos. Desse modo, além do refinamento h-adaptativo convencional, foi implementada uma opção de análise de refinamento com foco em uma região para o direcionamento dos esforços de processamento para região de maior relevância de projeto, resultando num menor custo de processamento computacional para obtenção da solução desejada. O diferencial desta estratégia de refinamento está em permitir que o usuário controle tanto a qualidade da malha regional, referente à região de foco da análise, quanto global.

As rotinas computacionais foram implementadas no software MATLAB, iniciando com o pré-processamento (dados de entrada e geração da malha) até a obtenção dos resultados (pós-processamento). Utilizou-se o MEF para obtenção de soluções de problemas bidimensionais descritos pela equação de Poisson.

2 EQUAÇÃO DE POISSON E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As equações de Laplace e Poisson possuem múltiplas aplicações na engenharia. Por exemplo, essas equações diferenciais podem representar condução de calor, fluxo potencial e torção de estruturas (Know & Bang, 2000). A Equação de Poisson é:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = g(x, y) \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

Onde a incógnita u é uma função ao longo do domínio Ω e $g(x,y)$ é uma função denominada fonte interna. Para o caso particular onde não há fonte interna, $g(x,y)=0$, obtém-se a Equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2)$$

A integração do peso residual da Eq. (1) e da condição de contorno, após a realização de integração por partes para redução da ordem de diferenciação da integral, resulta em (Know & Bang, 2000):

$$I = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} w g(x, y) d\Omega + \int_{\Gamma_n} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (3)$$

A primeira integral torna-se a matriz de rigidez, a segunda integral está relacionada a fonte interna e torna-se um vetor de fluxos e a terceira integral refere-se ao fluxo no contorno ao longo da fronteira natural, também resultando num vetor de fluxos.

A discretização do domínio na Eq. (3) é feita usando elementos finitos bidimensionais. Um dos elementos mais simples é o elemento triangular linear, utilizado neste trabalho. A função geral ψ , que representa as variáveis nodais nos três pontos nodais, é (Logan, 2012):

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Com as variáveis nodais expressas pela Eq. (4), a matriz de rigidez pode ser expressa por:

$$K^e = \int_{\Omega^e} [B]^T [k] [B] d\Omega \quad (5)$$

Onde $[B]$ corresponde às derivadas das funções de forma H_i e $[k]$ corresponde à matriz constitutiva. A segunda integral da Eq. (3) é calculada apenas para os problemas descritos pela

equação de Poisson, já que para Laplace a fonte interna de calor, $g(x,y)$, é nula em todo o domínio Ω . A integral é computada no elemento triangular linear da seguinte forma:

$$\int_{\Omega^e} \left\{ \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{matrix} \right\} g(x,y) d\Omega \quad (6)$$

4 REFINAMENTO ADAPTATIVO E CRITÉRIO DE DISCRETIZAÇÃO

Dentre os procedimentos de refinamento já apresentados, optou-se pela utilização do refinamento h-adaptativo com subdivisão dos elementos. Os elementos existentes são divididos em menores, mantendo-se as condições de contorno dos elementos originais. Um método bastante conhecido e utilizado neste trabalho é o Red-Green (Bank & Sherman, 1981) que consiste em adicionar nós nas arestas dos elementos, gerando quatro novos triângulos geometricamente similares ao original. Pontos flutuantes (“hanging nodes”) são gerados no meio dos lados dos nós adjacentes ao elemento que foi refinado, sendo então necessário prover restrições nesses pontos flutuantes (Rivara, 1984). Para tanto, os triângulos vizinhos, que servem de transição entre a região que sofreu refinamento e o resto do domínio, são divididos de modo que tornam-se irregulares e de menor qualidade, sendo chamados de triângulos verdes.

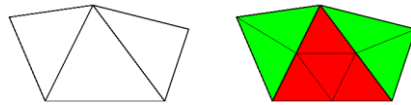


Figura 1. Triângulos vermelhos e triângulos vizinhos verdes refinados

Fonte: elaborado por Johann Cervenka, 1968.

Para estimar o erro e estabelecer o critério de discretização, utilizou-se o estimador de erro a posteriori Método das Médias Nodais Simples (MNS) (Gonçalves et al., 2014). Este consiste em, após o cálculo do campo $\hat{v}$, Eq. (7), em cada elemento conectado a cada nó, e sabendo que para um nó compartilhado por $N_{el_{no}}$ elementos existem, via de regra, $N_{el_{no}}$ diferentes valores de $\hat{v}$, estimar a média nodal conforme a Eq. (8) (Cook et al, 2002).

$$\hat{v} = -k\psi' \quad (7)$$

$$(\hat{v})_{med} = \frac{1}{N_{el_{no}}} \sum_{i=1}^{N_{el_{no}}} \hat{v}_i \quad (8)$$

Um campo suavizado e contínuo entre os elementos, v , é construído a partir da média aritmética dos $(v)_{med}$ de cada elemento, já que o elemento é linear, o qual é utilizado para avaliar o erro dos elementos da malha quando a solução analítica não é conhecida. Buscando obter um valor escalar que meça o erro em um sentido global para cada malha gerada, adotou-se a norma do erro em energia, obtida em relação a solução melhorada (Zienkiewicz & Taylor, 2000):

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (v - \bar{v})^T k^{-1} (v - \bar{v}) d\Omega \quad (9)$$

Para definição do critério de convergência do processo adaptativo, utilizou-se uma combinação de dois critérios: um em nível global e outro em nível elementar (Zienkiewicz & Zhu, 1987). O primeiro refere-se à convergência global e requer que o erro global na norma em energia para a malha j , $\|e_j\|$, não ultrapasse um percentual η_{adm} da energia total acumulada no domínio $\|u_j\|$. Desse modo, define-se o parâmetro de erro global ζ_g . Como critério de malha ótima, utilizou-se a equidistribuição do erro elementar (Silva, 2015), ou seja, cada elemento deve ter o mesmo valor do erro. Define-se, então, o parâmetro de erro local elementar $\bar{\zeta}_{ie}$. Com o objetivo de satisfazer esses dois critérios simultaneamente, define-se o parâmetro de refinamento elementar, ζ_{ie} , determinado pela equação a seguir:

$$\zeta_{ie} = \zeta_g \bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|e_j\|}{\eta_{adm} \|u_j\|} \frac{\|e\|_{ie}}{\eta_{adm} \|u_j\|} \sqrt{N_{el}} \quad (10)$$

Onde N_{el} é o número total de elementos. O parâmetro de refino indica se a malha está adequada, quando $\zeta_g \bar{\zeta}_{ie} \leq 1$, ou se deverá ser refinada, $\zeta_g \bar{\zeta}_{ie} > 1$. Quando o usuário opta por uma região de refinamento especial, deve determinar um η_{adm2} para o parâmetro ζ_g da região especial e η_{adm1} para os demais parâmetros. A seção 5 explica de maneira mais detalhada como a Eq. (10) é empregada no programa.

5 O PROGRAMA

Foi desenvolvido no software MATLAB (2015) e possui 4 etapas principais: pré-processamento (dados de entrada e geração da malha), resolução do sistema de equações, estimativa de erro e verificação da convergência da malha. Estas etapas ocorrem em um *loop* até que o critério de convergência seja satisfeito. A Fig. 2 apresenta o fluxograma dos procedimentos do programa.

Inicialmente o usuário deve fornecer os dados do problema e os parâmetros para geração e refinamento da malha. Após a definição do domínio do problema, é dado ao usuário a opção de escolher uma região de foco da análise. Para determinar esta região, o usuário define as coordenadas de um ponto central e o raio. Em seguida, o projetista deve determinar os valores

admissíveis do erro percentual em energia η_{adm1} e η_{adm2} . O η_{adm2} será utilizado no cálculo do parâmetro ζ_g da área especial selecionada, estabelecendo o critério regional. O η_{adm1} é utilizado no parâmetro $\bar{\zeta}_{ie}$ da região especial e em ambos os termos do parâmetro ζ_{ie} das demais regiões do domínio, conforme Eq. (10). Desse modo, os esforços de processamento são concentrados na região de maior interesse, permitindo assim, uma análise mais objetiva e de menor custo computacional, como será demonstrado nos exemplos da seção 6. A proposta é que o usuário tenha controle tanto sobre a qualidade da malha regional, referente à região de foco da análise, quanto global. Essa estratégia se diferencia, por exemplo, do *Adaptive Meshing for Local Solution Improvement* do COMSOL — software de elementos finitos comercial — que permite que o usuário especifique uma região para o refinamento e, então, a malha é refinada para fornecer melhores resultados localmente, de maneira que o refino global da malha está sujeito apenas à satisfação da precisão local.

Ainda na etapa de pré-processamento, a malha inicial é gerada fazendo uso de uma função disponível na biblioteca do MATLAB, sendo o usuário responsável por definir a dimensão permitida, $H_{m\acute{a}x}$, para o maior lado dos elementos. Para melhorar a qualidade da malha, é utilizada a suavização laplaciana (Lacassa, 2012) continuamente, sempre que uma nova malha é gerada. Após o pré-processamento, segue-se o cálculo das matrizes de rigidez dos elementos, Eq. (5), montagem da matriz de rigidez global e resolução do sistema de equações. Utiliza-se, então, o estimador de erro a posteriori Média Nodal Simples, o erro relativo percentual em energia e o critério de equidistribuição do erro elementar na definição dos parâmetros global e local, tanto para o domínio global quanto para o regional. A malha é refinada até que o critério de refinamento elementar seja satisfeito para todos os elementos da malha, isto é, $\zeta_g \bar{\zeta}_{ie} \leq 1 \forall e_i$.

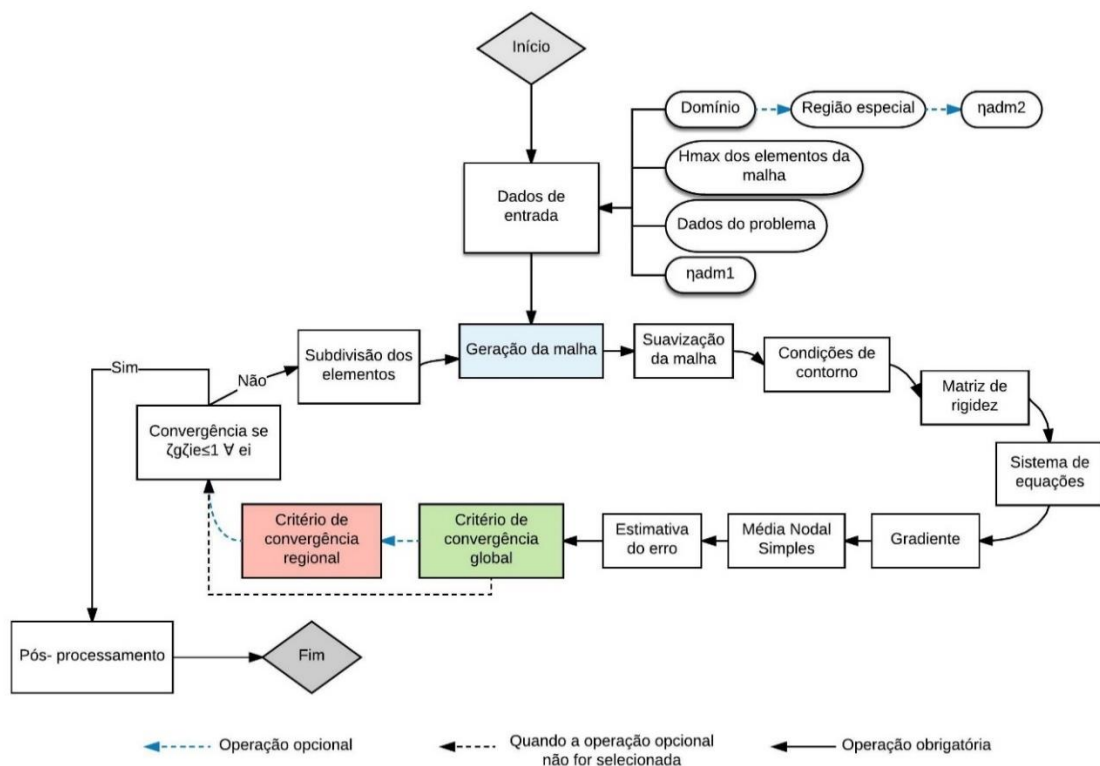


Figura 2. Fluxograma dos procedimentos do programa

6 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Serão apresentados alguns exemplos numéricos de problemas bidimensionais descritos pela equação de Poisson: condução de calor, torção e flexão em placas (redução da equação diferencial de quarta ordem em duas equações de segunda ordem). Também é apresentado um comparativo entre o refinamento h-adaptativo convencional e o refinamento h-adaptativo com foco em uma região.

6.1 Problema 1: Condução de calor

A solução analítica é dada pela Eq. (11), onde $a=0$ e $b=1$, a qual satisfaz $\nabla^2 T = 0$. O domínio é $\Omega = [0,1]^2$. A região especial selecionada para foco da análise localiza-se no canto inferior esquerdo do domínio, tem centro em $(0.15, 0.15)$, raio=0.3 e está indicada na Malha a1 da Fig.3. Adotou-se $\eta_{adm1}=0.1$ e $\eta_{adm2}=0.05$ para a malha (a) e $\eta_{adm}=0.05$ para a malha (b).

$$T(x, y) = 100 + \frac{2(1+y)}{(a+x)^2 + (b+y)^2} \quad (11)$$

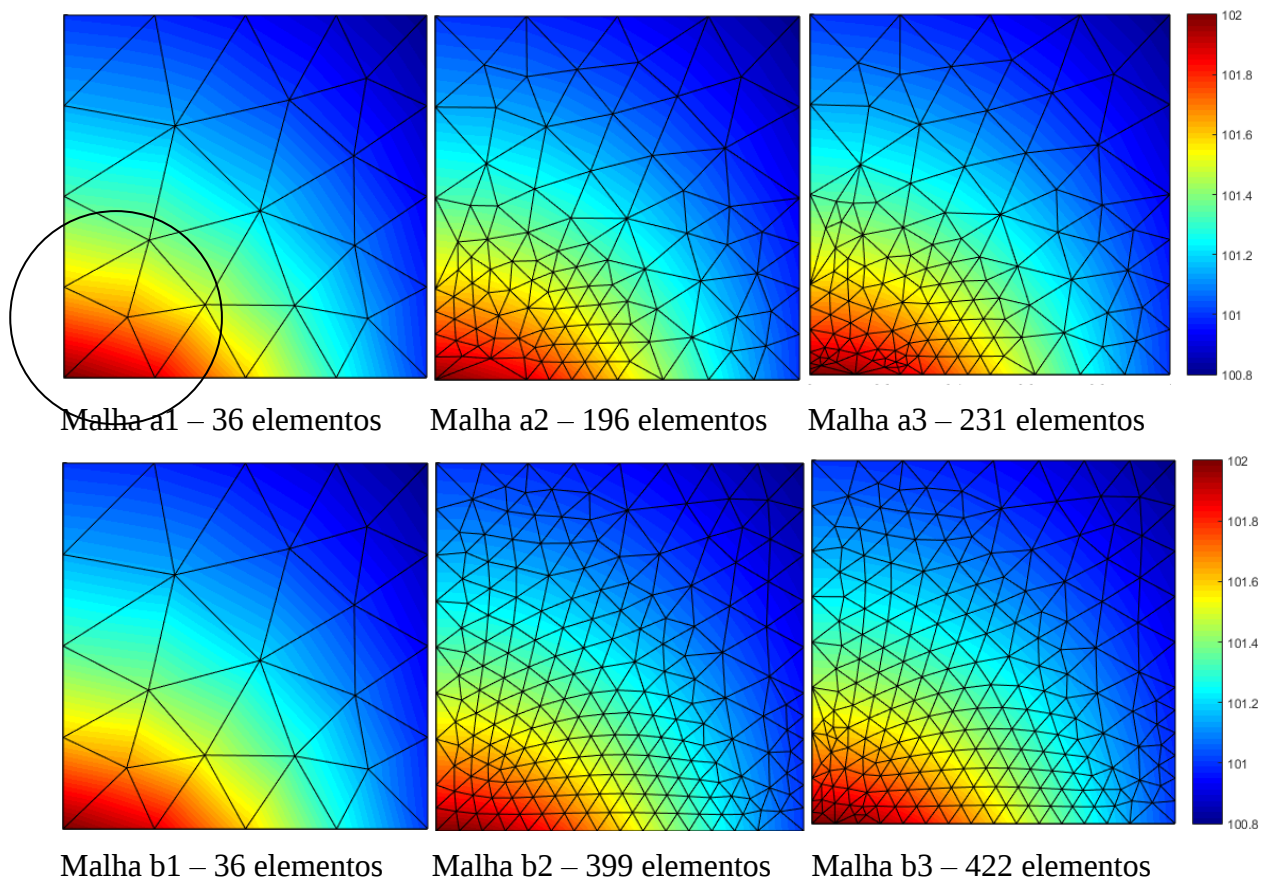


Figura 3. (a) Refinamento com foco em uma região e (b) Refinamento convencional

A Figura 3 apresenta um comparativo entre o refinamento com foco em uma região e o refinamento convencional. Nota-se que a análise (a) mostra-se mais efetiva, pois alcança o erro admissível determinado para a análise com quase metade do número de graus de liberdade de (b). Portanto, o refinamento com foco em uma região mostra-se bastante eficiente quando se tem uma região particular de maior interesse, visto que proporciona a obtenção da precisão exigida a um menor custo de processamento computacional.

Para avaliar a qualidade do estimador de erro utilizado, calculou-se o índice de efetividade, θ , descrito pela razão entre o valor do erro estimado e o valor do erro verdadeiro, obtido a partir da solução analítica. Os índices de efetividade das malhas finais (a) e (b) são 1.0144 e 1.0312, respectivamente. Observa-se que em ambos processos de refinamento o índice de efetividade tende a 1, indicando que o erro na malha tende a um valor baixo. Portanto, a estimativa do erro efetuada pelo estimador, que guia o processo adaptativo, é assintoticamente exata (Silva, 2015).

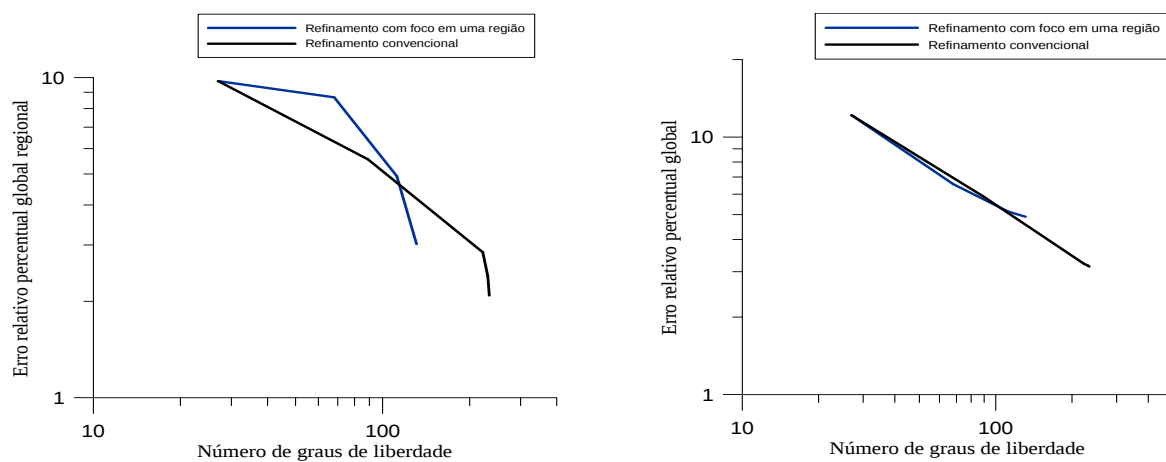


Figura 4. Erro relativo percentual global regional e erro relativo percentual global das malhas (a) e (b)

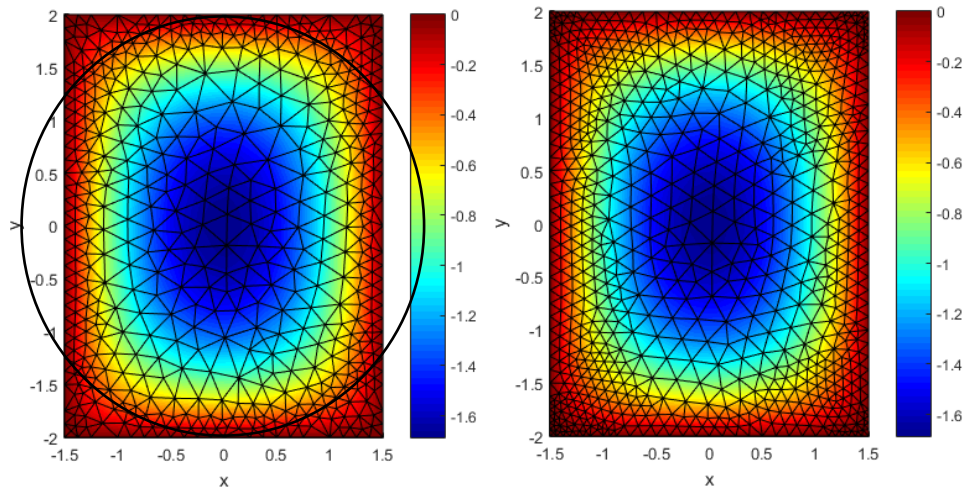
A Figura 4 mostra os gráficos log x log do erro relativo percentual global na região especial e no domínio global versus o número de graus de liberdade de toda a malha, para ambos processos de refinamento. Para o refinamento com foco em uma região, percebe-se que inicialmente há uma diminuição maior do erro global e, a partir de determinado NGL, o erro regional converge mais rapidamente que o global, isto porque a região escolhida coincide com o local de maior erro da análise.

6.2 Problema 2: Torção

A rigidez torcional de uma seção qualquer também pode ser determinada pela equação de Poisson, Eq. (1), onde ϕ é a função de tensão e $g(x,y) = 2Gk$. Tomando $Gk=1$ e $\phi=0$ no contorno, obtém-se a rigidez torcional:

$$K = -2 \int_{\Omega} \phi d\Omega \quad (12)$$

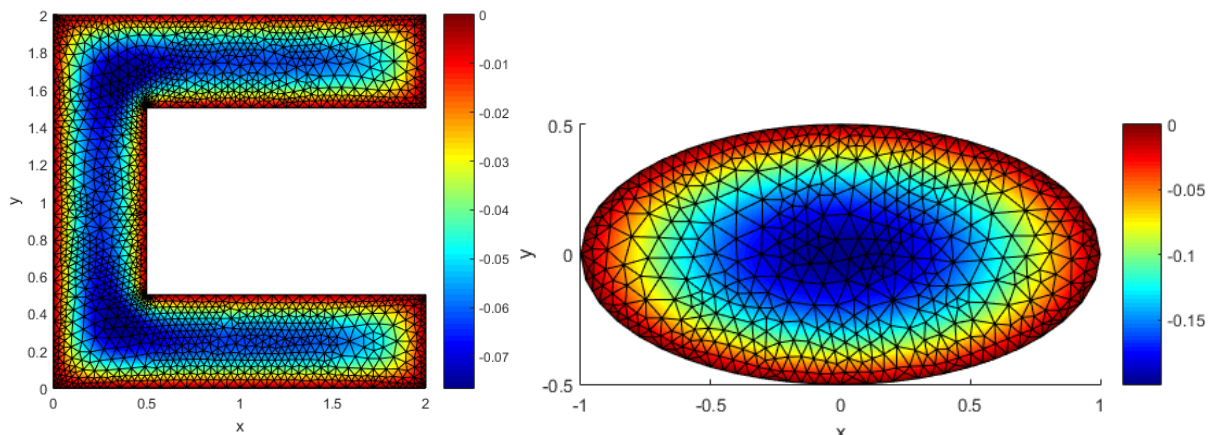
As figuras 5 e 6 mostram o comportamento da função de tensão ao longo de diferentes domínios. Em todos os casos apresentados, o refinamento adaptativo mostrou-se mais eficiente que o refinamento uniforme. Na Fig.5 é feito um comparativo entre o refinamento com foco em uma região, com centro em (0,0) e raio=2, e o refinamento convencional. Neste caso, o objetivo do foco foi evitar o refinamento intenso em regiões de singularidade. Adotou-se $\eta_{adm1}=0.1$ e $\eta_{adm2}=0.05$ para a malha (a) e $\eta_{adm}=0.05$ para a malha (b). Os valores da rigidez torcional obtidos foram 19.3938 e 19.4333, respectivamente. Sendo 19,4385 o valor da solução exata.



Malha a – 1001 elementos

Malha b – 1567 elementos

Figura 5. Malhas finais: (a) Refinamento com foco em uma região e (b) Refinamento convencional



Malha c – 3351 elementos

Malha d – 999 elementos

Figura 6. Malhas finais – domínios: (c) C e (d) Elipse

Em (c) adotou-se $\eta_{adm}=0.1$ e em (d) $\eta_{adm}=0.05$. Em (c), obteve-se $K=0.2083$, sendo 0.2028 o valor da solução exata, e em (d) obteve-se $K=0.3113$, sendo 0.3142 o valor da solução exata.

6.3 Problema 3: Flexão em placas

O problema de flexão em uma placa pode ser reduzido ao problema de flexão em uma membrana, Eq. (13) e (14), onde M são os momentos, w são os deslocamentos, q é a carga aplicada e D é a rigidez à flexão da placa (Timoshenko, 1989). A placa da Fig. 7 está simplesmente apoiada em todos os lados, portanto, $M=0$ e $w=0$ ao longo do contorno. Possui 20 cm de espessura, $E= 200$ MPa e $\nu = 0,3$. O cálculo do erro na norma em energia foi obtido a partir do campo suavizado da solução da Eq. (14) para a malha (a) e da Eq. (13) para a malha (b). Os gráficos da Fig. 8 mostram o comparativo entre os refinamentos adaptativo e uniforme.

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (14)$$

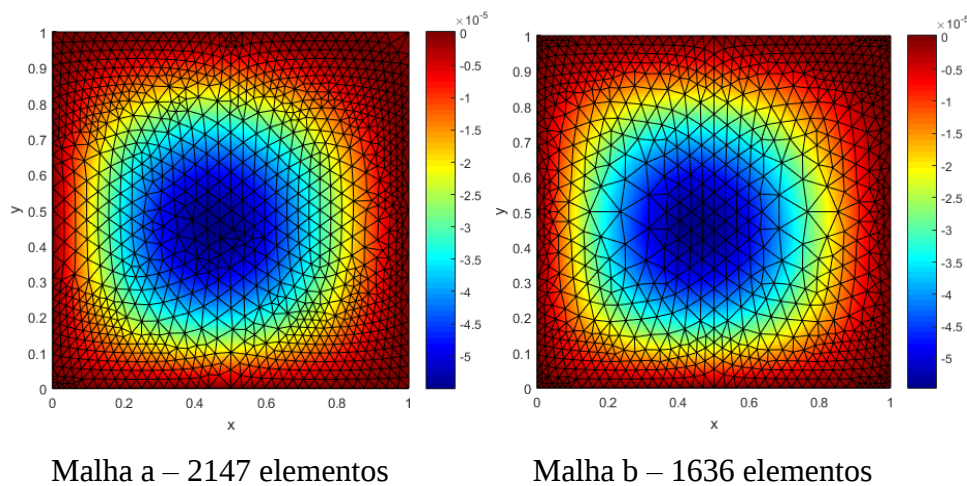


Figura 7. Deslocamentos verticais – malhas finais: (a) Adaptativo - 2 e (b) Adaptativo - 1

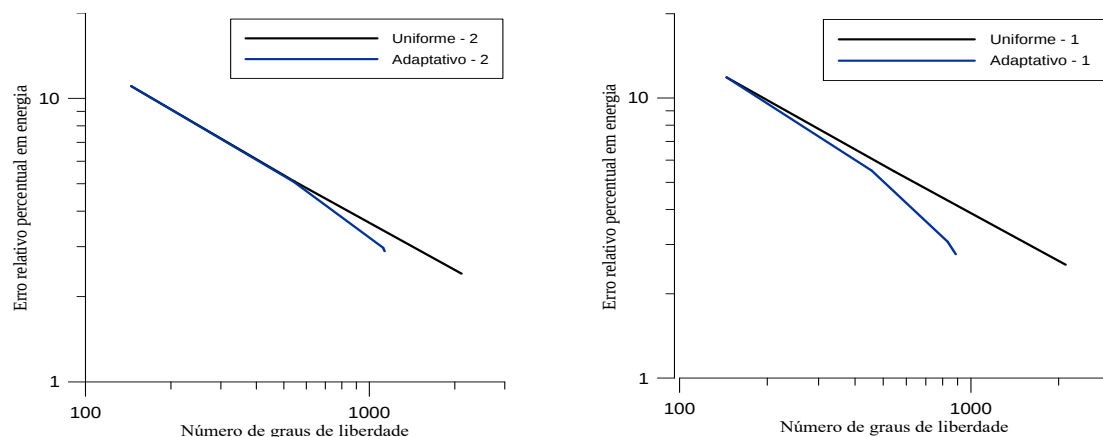


Figura 8. Comparativo entre os refinamentos adaptativo e uniforme das malhas (a) e (b)

7 CONCLUSÃO

Os exemplos apresentados e validados confirmam o funcionamento do programa desenvolvido para solução de diversos problemas bidimensionais descritos pela equação de Poisson. O estimador de erro utilizado, MNS, mostrou-se eficiente, apresentando índices de efetividade próximos a 1, tendendo a esse valor à medida que a malha era refinada, demonstrando assim que a estimativa do erro é assintoticamente exata. A suavização laplaciana contribuiu para melhorar a qualidade da malha, no entanto, os triângulos vizinhos àqueles que sofreram refinamento (triângulos verdes) ainda se mantêm deformados e repassam essa característica caso venham a ser subdivididos num refinamento posterior. Foi demonstrada a eficiência da estratégia de refinamento com foco em uma região que direciona os esforços de processamento para o local de maior relevância de projeto e proporciona a obtenção da solução com a precisão requerida pelo projetista tanto na região especial quanto no domínio global do problema. Pelo comparativo com o refinamento convencional, percebeu-se economia no tempo de processamento pela diminuição do número de graus de liberdade e do número de iterações necessários à convergência.

8 REFERÊNCIAS

- Bank, R. E & Sherman, A. H., 1981. An Adaptive, Multi-Level Method for Elliptic Boundary Value Problems. *Computing*, vol. 26, pp. 91-105.
- COMSOL. 2017. Comsol Blog. Using Adaptive Meshing for Local Solution Improvement. Disponível em: <https://br.comsol.com/blogs/using-adaptive-meshing-local-solution-improvement/>. Acesso em: 07 out 2017.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. & Witt, R. J., 2002. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Madson. Madison, USA, eds. John Wiley and Sons. 719 p.
- Gonçalves, J. C. L, Pereira, J. T., Silva, F. E. C. & Silva, J., 2014. Análise de diferentes estimadores de erro a posteriori aplicados a problemas bidimensionais utilizando refino h-adaptativo. *Congresso de Matemática aplicada à indústria*, Caldas Novas, Goiás, 2014.
- Kwon, Y. W & Bang, H., 2000. *The Finite Element Method Using Matlab*. CRC.
- Lacassa, A., 2012. *Geração e melhoramento de malhas adaptativas*. Tese de Doutorado, USP.
- Logan, D. L., 2012. *A First Course in the Finite Element Method*. CENGAGE Learning.
- Rivara, M. C., 1984. Algorithms for Refining Triangular Grids Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 745-756.
- Silva, J., 2015. *Análise de estimadores de erro a posteriori aplicados ao método dos elementos finitos utilizando refino h-adaptativo*. Dissertação de Mestrado, UFPR.
- Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S., 1989. *Theory of Plates and Shells*. Mcgraw-hill.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz, O. C. & Zhu, J. Z., 1987. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engeneering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.24, pp. 333-357.