



INSTABILIDADE DINÂMICA EM ARCOS ABATIDOS SUBMETIDOS A FORÇA TRANSVERSAL

William Luiz Fernandes

wlfernandes@pucminas.com

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Av. Afonso Vaz de Melo, 1200 – Barreiro, Belo Horizonte - MG, CEP 30640-070, Minas Gerais, Brasil

Daniel Boy Vasconcellos

Marcelo Greco

danielboyvasconcellos@gmail.com

mgreco@dees.ufmg.br

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 – Pampulha, Belo Horizonte – MG, CEP 31270-901, Minas Gerais, Brasil

Resumo. A engenharia de estruturas demanda sistemas estruturais cada vez mais leves, o que pode causar problemas de instabilidade e comprometer o desempenho estrutural. Um alto índice de esbeltez de um elemento estrutural o torna susceptível à instabilidade, sendo importante compreender o problema, os limites de estabilidade e seu comportamento pós-crítico. Um exemplo de perda de estabilidade que pode ocorrer em arcos abatidos sob carga transversal é o snap-through, em que a estrutura, em determinada condição de equilíbrio, salta para uma nova configuração de equilíbrio remota, causando curvatura, normalmente repentina. As abordagens convencionais no estudo da estabilidade fazem uso de considerações estáticas; entretanto, problemas de instabilidade são processos inerentemente dinâmicos, de forma que uma análise transiente é necessária para completa descrição do comportamento estrutural. O presente trabalho avalia o comportamento dinâmico geometricamente não-linear de arcos abatidos submetidos a força transversal. As respostas no domínio do tempo, via Método de Newmark e formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, foram obtidas para dois exemplos, em termos dos deslocamentos, velocidades, acelerações e diagramas de fase.

Palavras-chave: Instabilidade dinâmica, Arcos abatidos, Formulação posicional, Método dos elementos finitos, Análise dinâmica não linear.

1 INTRODUÇÃO

Estruturas delgadas em formato curvilíneo, como cascas e arcos, são utilizadas amplamente em determinados campos da engenharia mecânica, civil ou aeroespacial. Por apresentarem esbeltez considerável, elas podem ser submetidas a um tipo de instabilidade dinâmica denominado *snap-through* onde, para um nível de carregamento crítico inferior à carga limite, o arco salta do vale potencial pré-flambagem e a resposta converge para uma solução pós-crítica estável, com o arco assumindo uma configuração invertida (Galvão, 2004).

Este processo leva a grandes inversões de tensão e frequências que aumentam significativamente a possibilidade de falha da estrutura. Portanto, torna-se necessário identificar os limites de estabilidade dinâmica que separam as respostas de pequenas amplitudes daquelas que ocorrem na região pós-crítica. O *snap-through* dinâmico é um fenômeno fortemente não linear que, geralmente, não possui solução analítica (Zhou et al., 2017).

Nos últimos anos pesquisas têm sido realizadas na investigação deste fenômeno em arcos abatidos. Zhou et al. (2017) propôs uma abordagem de escala para destacar semelhanças entre os limites de *snap-through* dinâmicos em diferentes estruturas curvas delgadas, utilizando variações entre as características geométricas e/ou de condições de contorno para aproximações rápidas de limite de estabilidade dinâmica. Rosas (2016) realizou estudos em um arco esbelto senoidal submetido a um carregamento uniformemente distribuído, considerando condições de extremidade como molas rotacionais discretas. Este mesmo modelo foi também avaliado por Galvão (2004) e Silva (2009). Zhou et al. (2015) apresentaram um método analítico para estudar a estabilidade não linear e o equilíbrio desconectado de arcos rasos com imperfeições geométricas assimétricas. A solução proposta por eles pode ser aplicada a arcos abatidos arbitrários com imperfeições geométricas arbitrárias. Ha et al. (2014) analisou a estabilidade assintótica de arcos rasos, obtendo a resposta analítica para os mesmos quando a forma inicial do arco e o carregamento atuante, assumido como independente do tempo, são combinações lineares de funções senoidais. Virgin et al. (2014) verificou a resposta para um arco raso submetido a carregamento e à influência de mudanças no ambiente térmico. Chandra et al. (2013) obteve resultados experimentais e computacionais do comportamento transiente de arcos abatidos sob carga distribuída harmônica, identificando as faixas de variação dos parâmetros que levam ao *snap-through* e a respostas caóticas.

O trabalho proposto apresenta a resposta dinâmica de arcos abatidos sob força transversal via integração numérica utilizando o algoritmo tradicional de Newmark para problemas transientes não lineares, comparando-a com resultados da literatura. A análise não linear geométrica foi feita utilizando uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos na qual se considera, ao invés dos deslocamentos lineares dos nós, as posições nodais como incógnitas do problema.

2 INSTABILIDADE DINÂMICA EM ARCOS ABATIDOS

Arcos abatidos são aqueles que possuem pequenas contra-flechas comparadas ao seu vão (Fig. 1a). A representação típica do *snap-through* em análise estática pode ser visualizada na Fig. 1b. Quando ele ocorre, o diagrama carga-deslocamento apresenta um salto, sob controle de carga, do ponto 1 ao ponto 3. Em alguns casos é possível também observar, sob controle de deslocamento, um efeito *snap-back*: a estrutura retorna à sua configuração original por uma trajetória diferente da anterior (ponto 5 ao ponto 7).

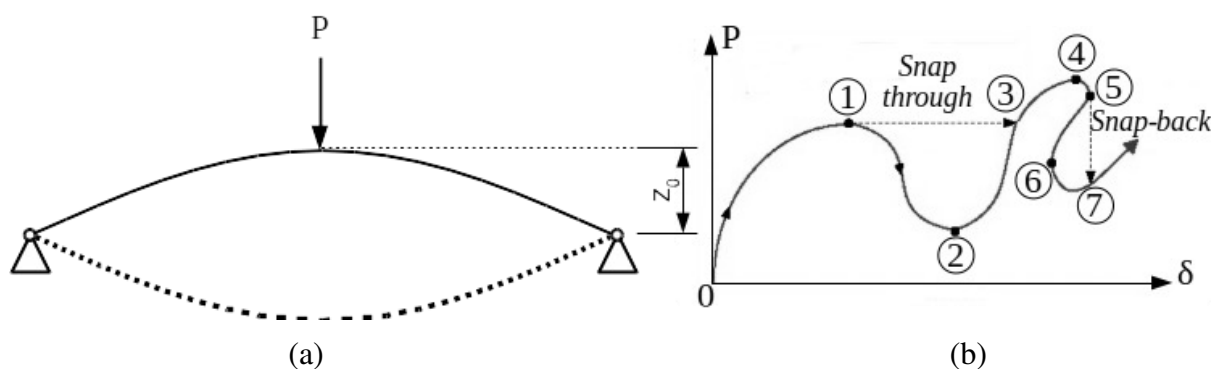


Figura 1. (a) arco abatido bi-rotulado e (b) curva típica carga-deflexão em análise estática.

Entretanto, a falha das estruturas é um processo dinâmico; consequentemente, torna-se mais realista avaliar o fenômeno de flambagem e a estabilidade do ponto de vista dinâmico. Em termos gerais, pode-se dizer que uma estrutura (ou qualquer sistema) é estável se uma pequena alteração nas condições iniciais do problema levarem a uma pequena alteração na solução do mesmo (Bazant e Cedolin, 2010). O comportamento estrutural não linear pode surgir devido à não-linearidade geométrica (grandes deflexões) ou à não-linearidade física (material não-linear).

Sistemas dinâmicos não-lineares mostram um espectro de comportamento mais complexo em relação aos lineares. Eles podem exibir não apenas uma resposta dinâmica simples, como oscilação ou divergência periódica, mas também uma resposta não periódica e aparentemente aleatória. A esta resposta se denomina caos; no entanto, ele pode apresentar certo grau de ordem e, portanto, seria incorreto tratá-lo por métodos de dinâmica aleatória (Bazant e Cedolin, 2010).

Uma vez que o *snap-through* é um problema altamente não-linear, as simulações numéricas de tal fenômeno requerem uso de algoritmos de marcha no tempo numericamente estáveis. Chandra (2012) demonstra dificuldades numéricas em algoritmos usuais de integração no tempo neste tipo de análise.

3 FORMULAÇÃO POSICIONAL PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Greco (2004) apresenta o equacionamento do Método dos Elementos Finitos com base em formulação posicional, associando-o ao Método de Newmark para análise dinâmica geometricamente não linear. Partindo-se do funcional de energia do sistema, tem-se:

$$\Pi = U_t - FX - K_c - K_a \quad (1)$$

onde as parcelas K_c (energia cinética), K_a (amortecimento) e U_t (energia potencial) são:

$$K_c = \int_V \frac{\rho}{2} \dot{X}^2 dV \quad (2)$$

$$K_a = \int_V c_m \rho X \dot{X} dV - \int_V \int_{X_k} c_m \rho \frac{X \ddot{X}}{\dot{X}} dX_k dV \quad (3)$$

$$U_t = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV \quad (4)$$

sendo c_m o coeficiente de amortecimento, ρ a massa específica, F são as forças externas e X representa o conjunto de coordenadas (posições ou inclinações) independentes que um determinado ponto nodal pode apresentar.

A matriz de massa dos elementos é considerada discreta e os termos de massa devidos à rotação foram desprezados, o que explica a ocorrência de zeros na diagonal principal da Eq. (5).

$$M = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A parcela de amortecimento K_a pode ser reescrita como:

$$K_a = CX\dot{X} - C \int_{X_k} \frac{X \ddot{X}}{\dot{X}} dX_k \quad (6)$$

onde a matriz de amortecimento proporcional é dada por:

$$C = 2c_m M \quad (7)$$

O funcional de energia total descrito na Eq. (1) deve ser minimizado a partir do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária:

$$\frac{\partial K_c}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} \frac{m_i}{2} 2\dot{X}_i \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_k} \delta_{ik} \quad (8)$$

Aplicando-se a Regra da Cadeia para obtenção da derivada da velocidade em relação à posição nodal X_k e retornando na Eq. (8):

$$\frac{\partial K_c}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} m_i \dot{X}_i \ddot{X}_i \frac{1}{\dot{X}_i} \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} m_k \ddot{X}_k \quad (9)$$

Para a parcela devida ao amortecimento:

$$\frac{\partial K_a}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} c_{mi} \left(\dot{X}_i + X_i \ddot{X}_i \frac{1}{\dot{X}_i} - \frac{X_i \ddot{X}_i}{\dot{X}_i} \right) \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{\text{coord}} c_{mk} \dot{X}_k \quad (10)$$

Assim, a minimização do funcional pode ser representada como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \frac{\partial U_t}{\partial X} - F + M\ddot{X} + C\dot{X} = 0 \quad (11)$$

sendo esta uma equação que apresenta, como variáveis, o tempo t e a posição X . Torna-se necessário realizar uma integração numérica no domínio do tempo e efetuar a segunda

derivação em relação à posição. Reescrevendo-se a mesma equação para o instante de tempo $t+\Delta t$, obtém-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = 0 \quad (12)$$

A Eq. (12) representa a condição de equilíbrio dinâmico não linear geométrico para o problema em análise. O vetor dos carregamento nodais $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ é conhecido em cada instante de tempo, e é definido como:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_0 [c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 \sin(c_6 t) + c_7 \cos(c_8 t) + c_9 e^{c_{10} t}] \quad (13)$$

onde $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{10}$ são coeficientes da função do carregamento aplicado ao sistema em estudo.

3.1 Método de Newmark

Utilizando o Método de Newmark para a integração numérica no domínio do tempo, pode-se obter as equações deste em função das posições:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] + \beta \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \quad (15)$$

onde a aceleração nodal inicial é determinada, com base na Eq. (12):

$$\ddot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_0 - \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_0 \right] \quad (16)$$

Como a formulação proposta é baseada na descrição das posições, os deslocamentos não são utilizados ao longo do processo. Entretanto, conhecidas as posições, pode-se fazer:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \quad (17)$$

A aceleração e a velocidade ficam:

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{X}} \quad (18)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{X}} \quad (19)$$

Se as Eqs. (17) a (19) forem substituídas nas Eqs. (16) e (17), serão obtidas as expressões para o Método de Newmark em função dos deslocamentos.

Tomando-se a Eq. (14) e isolando-se as acelerações no tempo $t+\Delta t$, chega-se a:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (20)$$

Levando-se as Eqs. (15) e (20) na Eq. (12):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \mathbf{D}_t + \mathbf{C} \mathbf{E}_t + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_t = 0 \quad (21)$$

onde os vetores $\mathbf{D}_t$ e $\mathbf{E}_t$ contêm as contribuições das variáveis consideradas no instante anterior t :

$$\mathbf{D}_t = \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (22)$$

$$E_t = \dot{X}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{X}_t \quad (23)$$

Retornando-se na Eq. (21) derivando-a em relação às posições no instante atual:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(X^0) = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial X^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (24)$$

A Equação (24) representa a expressão da matriz Hessiana para o problema dinâmico.

4 EXEMPLOS

A seguir são apresentados dois exemplos de aplicação da referida formulação, implementada em FORTRAN, em arcos abatidos.

4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo consiste em um arco senoidal abatido submetido a uma força súbita conforme Fig. 2a. Este problema foi analisado por Galvão (2004), Silva (2009) e Rosas (2016), com diferentes abordagens. A amplitude do arco é de $z_0=20\text{mm}$. A massa específica considerada para a análise foi de $78 \times 10^{-9} \text{Ns}^2/\text{mm}^4$. O módulo de elasticidade equivale a 210GPa , e a taxa de amortecimento utilizada foi de 0.10 . A discretização do arco foi feita com 18 elementos. O intervalo de tempo considerado foi $\Delta t=0.0001\text{s}$.

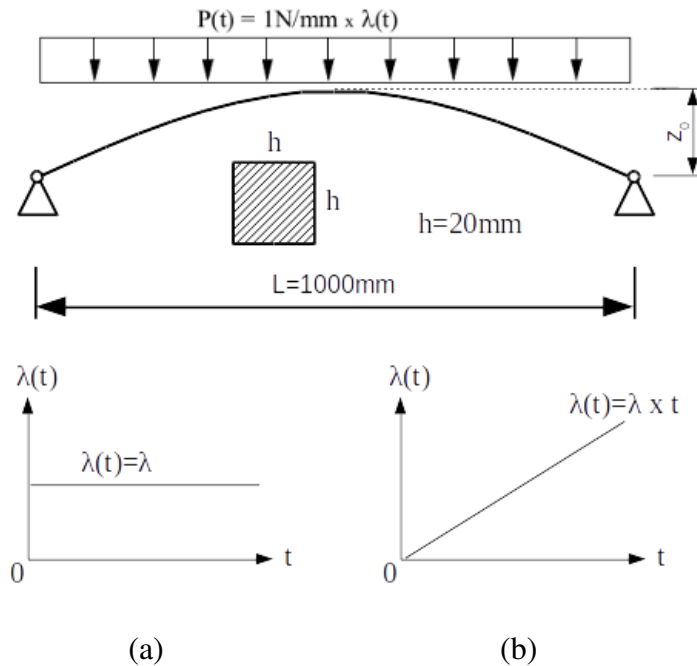


Figura 2. Arco senoidal abatido e carregamentos considerados na análise: (a) carga súbita e (b) carga triangular crescente.

A Figura 3 apresenta os resultados do deslocamento do nó central. Observa-se boa concordância com os resultados apresentados por Galvão (2004). Nas relações $\lambda=P/h$ situadas entre 0.1 e 0.3 (Figs. 3a-c), o arco vibra em sua configuração pré-crítica, em torno de um

valor constante, equivalente à análise de instabilidade estática. Na relação $P/h=0.35$ (Fig. 3d) observa-se a ocorrência de *snap-through*: a vibração ocorre em torno de um valor constante equivalente à análise estática considerando a configuração pós-crítica. Observa-se, entre 0.2s e 0.8s, um pequeno desvio horizontal entre as duas soluções.

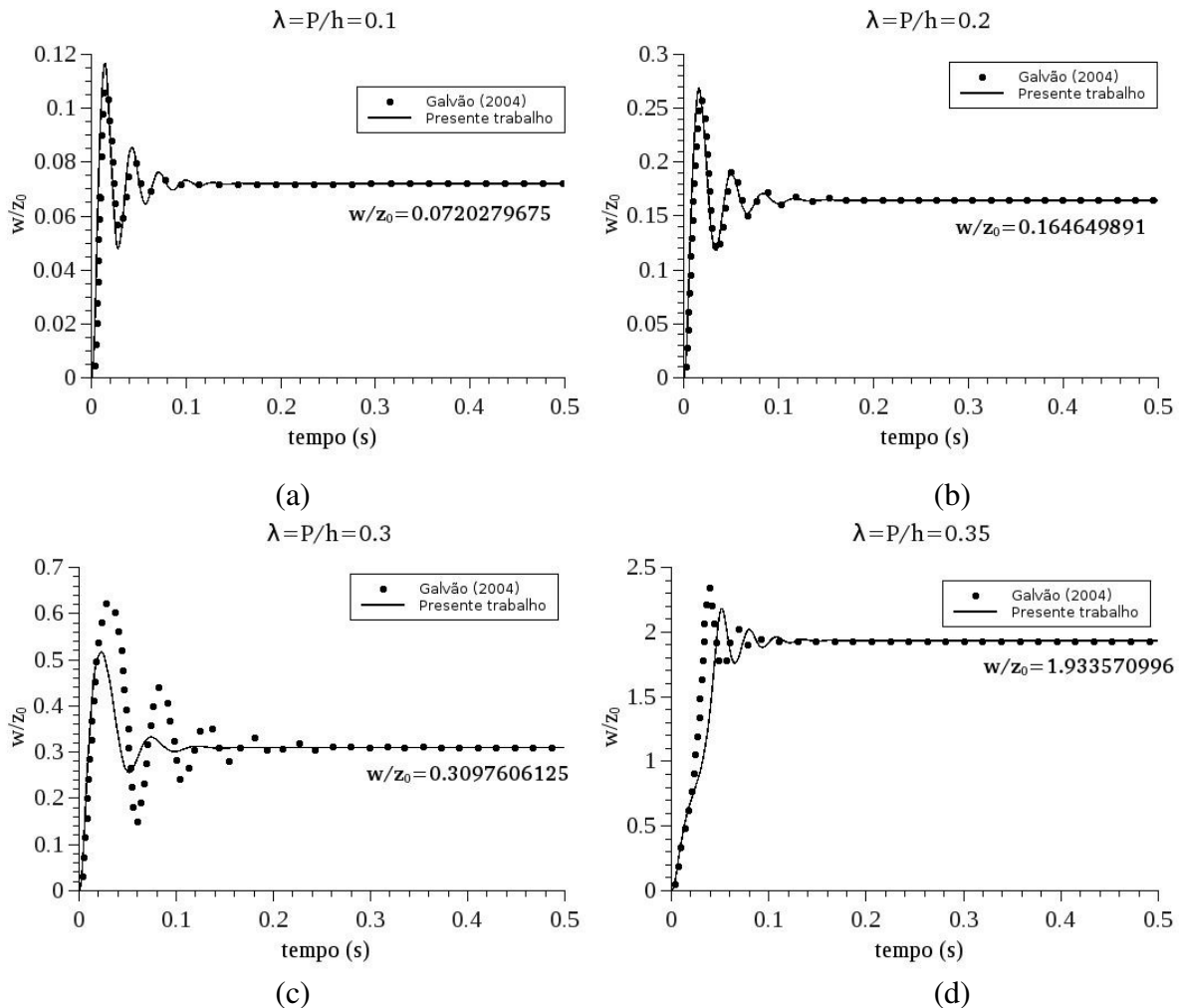


Figura 3. Deslocamentos do nó central ao longo do tempo para diferentes valores de carregamento.

No que diz respeito às acelerações (Fig. 4), observa-se comportamento semelhante nas situações que envolvem λ variando entre 0.1 a 0.3. Entretanto, na ocorrência do salto para a configuração pós-crítica, um pico de aceleração no tempo correspondente a 0.09s pode ser visto. Em seguida, a mesma tende a oscilar em pequenos valores próximos a zero, correspondente à situação de análise estática, indicando que, a partir deste instante, as forças de inércia pouco contribuem para a resposta.

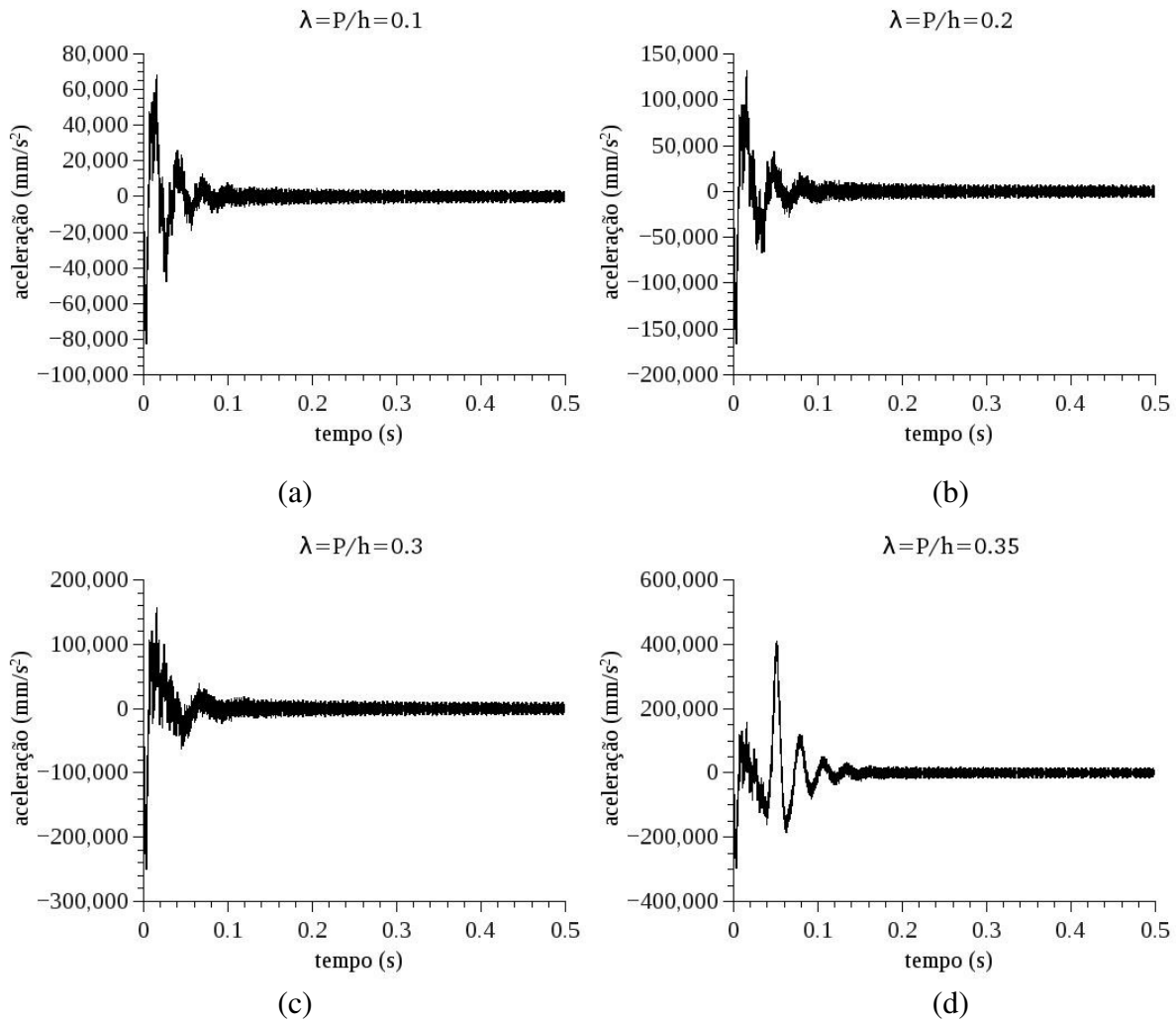


Figura 4. Acelerações do nó central ao longo do tempo para diferentes valores de carregamento.

Em relação às velocidades observa-se, conforme ocorreu com as acelerações, comportamento semelhante para λ compreendido entre 0.1 a 0.3 (Figs. 5a-c). Na ocasião do *snap-through* (Fig. 5d), picos de velocidade podem ser verificados entre 0.04s e 0.06s.

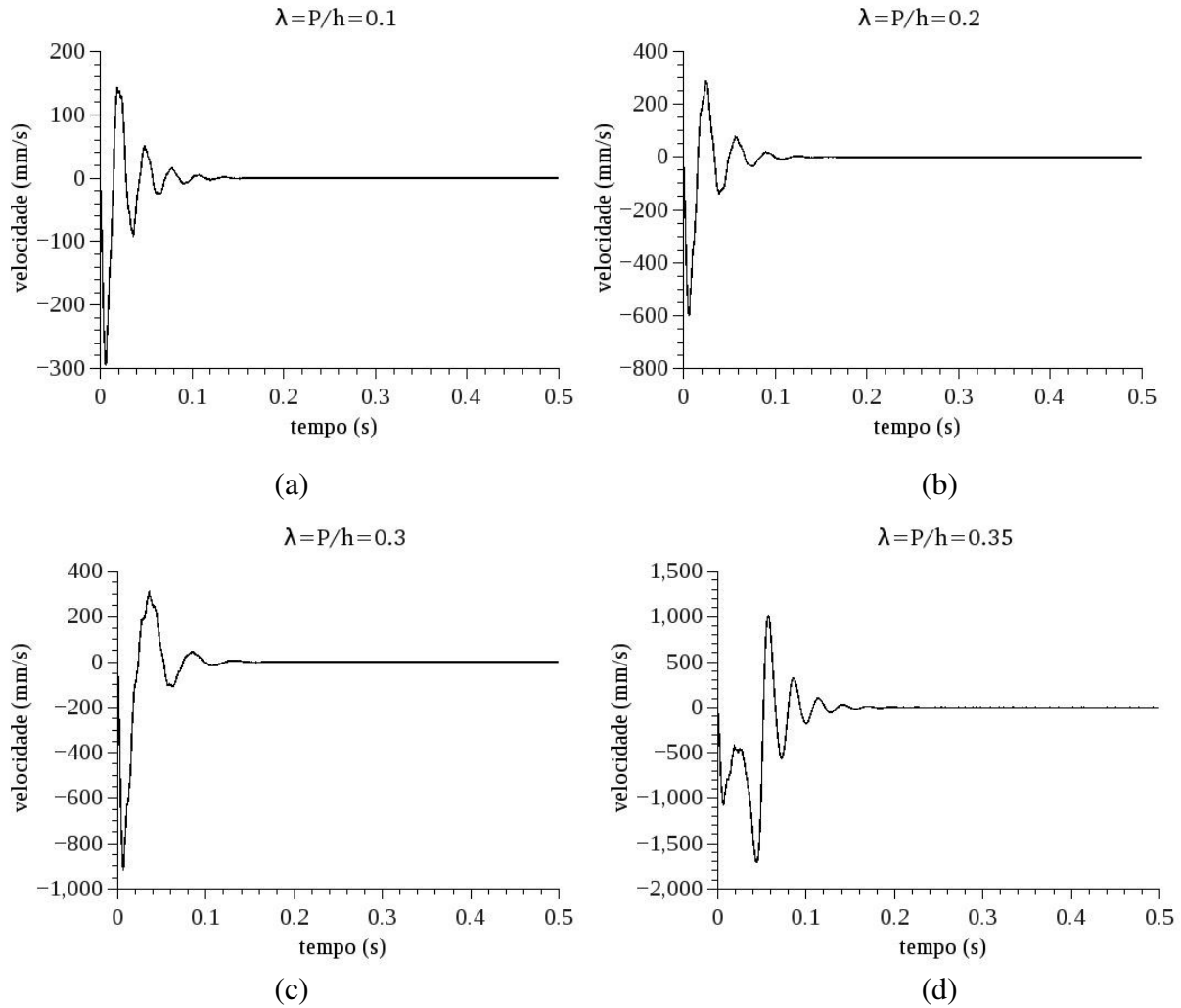


Figura 5. Velocidades do nó central ao longo do tempo para diferentes valores de carregamento.

Os diagramas de fase são apresentados na Fig. 6. Seu formato é característico de problemas de instabilidade dinâmica geometricamente não lineares. A forma espiral tende a convergir para um ponto em particular do diagrama, denominado foco, onde a velocidade é nula e o deslocamento correspondente à resposta em análise estática. As Figs. 6a-c apresentam comportamento similar; destaca-se, entretanto, a Fig. 6d, onde se observa uma alteração da trajetória original, correspondente ao período anterior ao *snap-through*, e deste instante em diante, onde o comportamento espiral passa a ser novamente verificado, que corresponde ao período posterior ao *snap-through*.

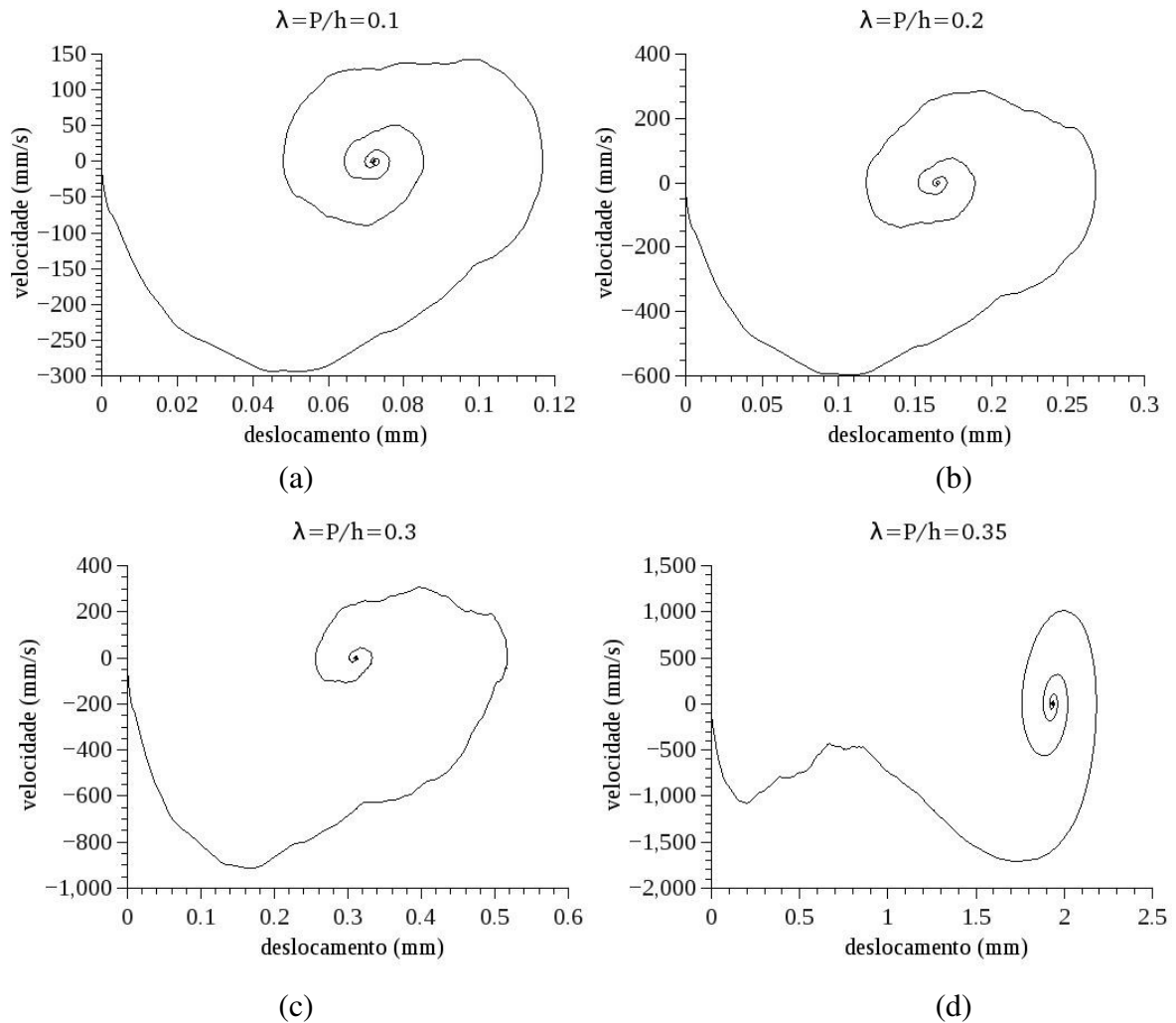


Figura 6. Diagramas de fase relativos ao nó central para diferentes valores de carregamento.

4.2 Exemplo 2

O exemplo 2 consiste no mesmo arco do exemplo anterior, porém submetido a um carregamento triangular crescente (Fig. 2b). A massa específica considerada neste caso foi $78 \times 10^{-8} \text{Ns}^2/\text{mm}^4$. O módulo de elasticidade equivale a 210GPa, e as taxas de amortecimento utilizadas foram de 0.10, 0.5, 0.05 e 0.0. A discretização do arco foi a mesma do exemplo anterior. O intervalo de tempo considerado foi $\Delta t = 0.0004 \text{s}$. O fator de carga considerado foi $\lambda = P/h = 0.2$.

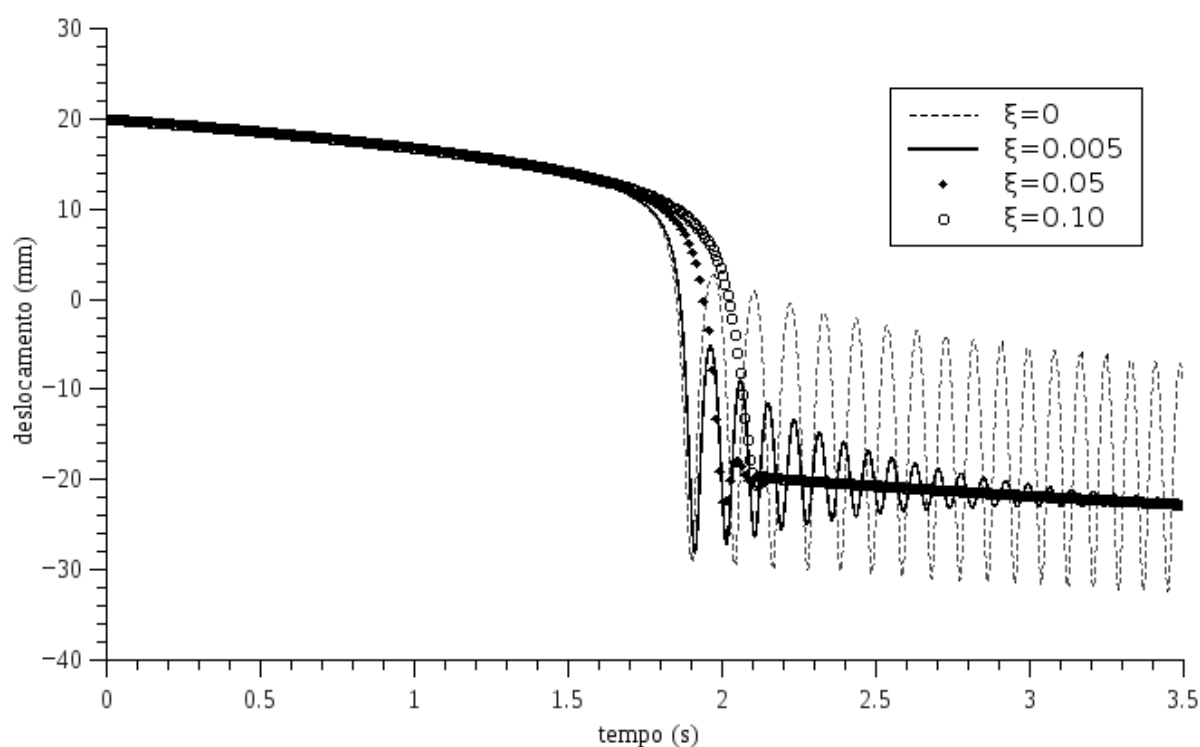


Figura 7. Deslocamentos ao longo do tempo (nó central) para diferentes taxas de amortecimento ($\lambda=0.2$).

A Figura 7 apresenta a resposta transiente para o arco em estudo em relação ao deslocamento vertical do nó situado no meio do vão. Cada curva corresponde a um diferente valor de taxa de amortecimento. O intervalo de tempo situado entre 0 e 1.8s corresponde ao período anterior ao *snap-through*. O arco não apresenta, nesta região, diferenças significativas em relação ao deslocamento para os valores de taxa de amortecimento. No instante correspondente ao *snap-through*, observa-se um pequeno afastamento em relação às quatro respostas, sendo que aquela obtida para a maior taxa de amortecimento encontra-se mais à direita. Na região pós-crítica, observa-se diferenças significativas entre as respostas. Os deslocamentos referentes à resposta sem amortecimento são consideravelmente maiores.

Para as velocidades (Fig. 8) observa-se valores aproximadamente nulos na região anterior ao salto e, no intervalo de tempo correspondente ao *snap-through*, um aumento súbito de velocidade. As respostas amortecidas convergem para velocidade nula, enquanto a resposta não amortecida, no intervalo considerado, aumenta gradativamente.

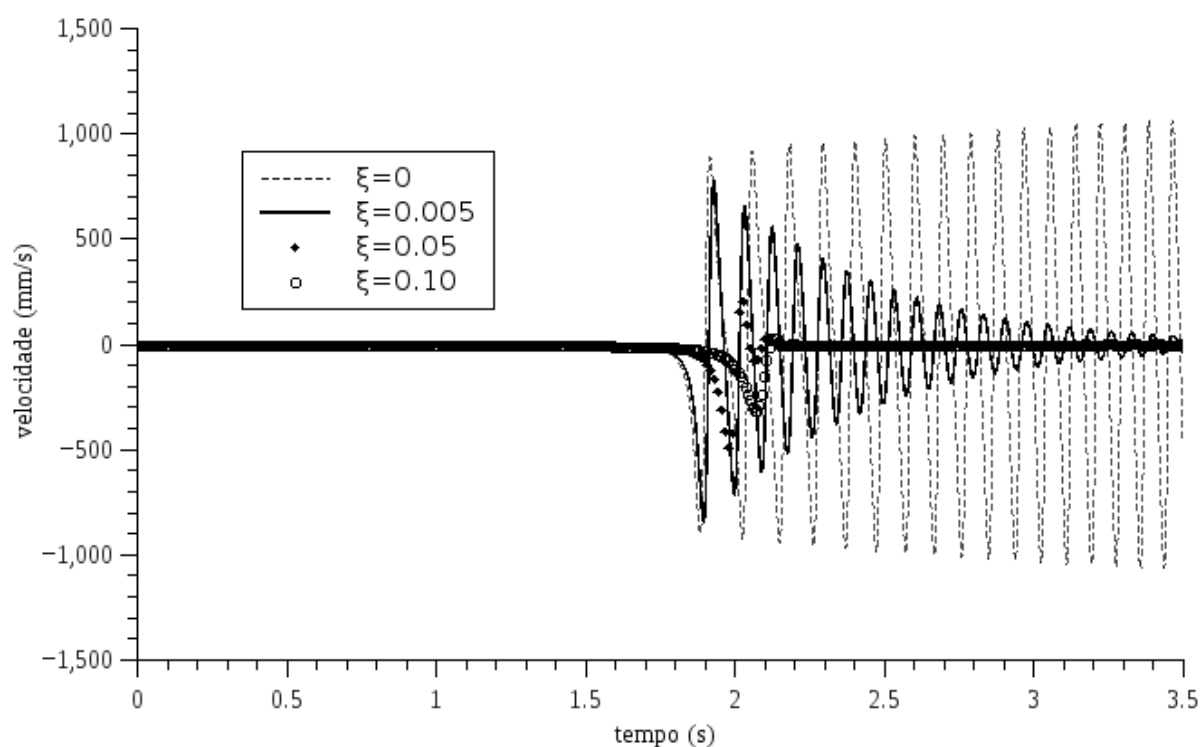


Figura 8. Velocidades ao longo do tempo (nó central) para diferentes taxas de amortecimento ($\lambda=0.2$).

As acelerações no meio do vão são mostradas na Fig. 9. Seu comportamento assemelha-se, de certa forma, ao das velocidades. A resposta não amortecida apresenta as maiores intensidades. Destaque deve ser dado para a resposta equivalente à taxa de amortecimento de 0.10. Altas intensidades foram observadas na região posterior ao *snap-through*.

A Figura 10 apresenta os diagramas de fase para o arco em estudo. Todas as respostas, excetuando-se a de amortecimento nulo, convergem para um foco de velocidade nula e deslocamento aproximado de 23mm, considerando a curvatura invertida do arco. Para o caso sem amortecimento não há convergência, visto que não há dissipação de energia por parte do sistema estrutural.

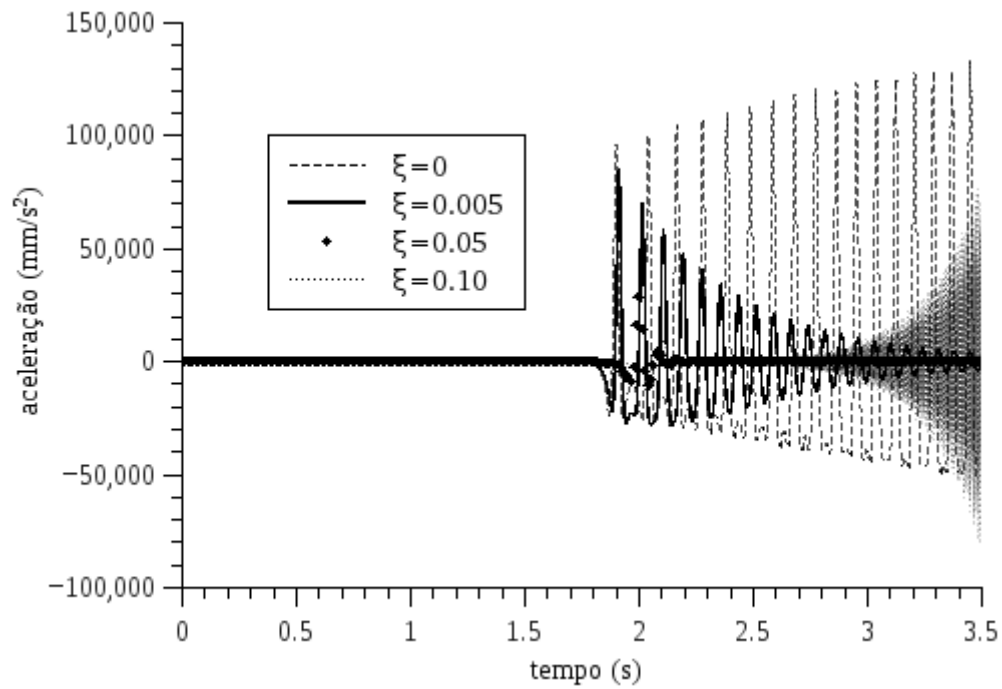


Figura 9. Acelerações ao longo do tempo (nó central) para diferentes taxas de amortecimento ($\lambda=0.2$).

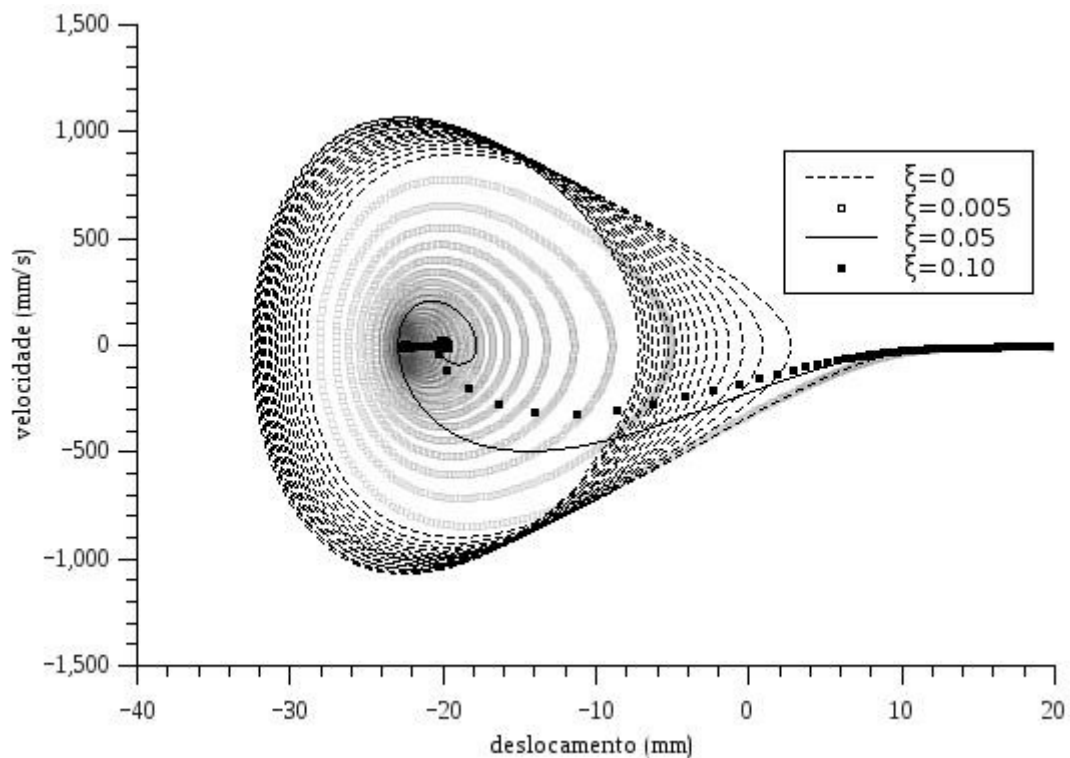


Figura 10. Diagramas de fase (nó central) para diferentes taxas de amortecimento ($\lambda=0.2$).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou a resposta dinâmica de arcos abatidos sob força transversal via integração numérica utilizando o Método de Newmark para problemas transientes não lineares. Foi utilizada uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. As respostas obtidas possuem coerência em relação a problemas encontrados em literatura. O fenômeno de snap-through dinâmico pôde ser observado e comentado em cada exemplo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem os apoios financeiros concedidos pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).

REFERÊNCIAS

- Bazant, Z., & Cedolin, L., 2010. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific.
- Chandra, Y., Wiebe, R., Stanciulescu, I., Virgin, L. N., Spottswood, S. M., & Eason, T. G., 2013. Characterizing dynamic transitions associated with snap-through of clamped shallow arches. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, pp. 5837–5855.
- Galvão, A. S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Greco, M., 2004. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo Método dos elementos finitos*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Ha, J., Gutman, S., Shon, S., & Lee, S., 2014. Stability of shallow arches under constant load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 58, pp. 120–127.
- Rosas, L. R. B., 2016. *Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Reticulados com Restrições de Contato*. MSc dissertation, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Silva, A. R. D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. PhD thesis, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Virgin, L. N., Wiebe, R., Spottswood, S. M., & Eason, T. G., 2014. Sensitivity in the structural behavior of shallow arches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 58, pp. 212–221.
- Zhou, Y., Stanciulescu, I., Eason, T., & Spottswood, M., 2017. Fast approximations of dynamic stability boundaries of slender curved structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 95, pp. 47–58.

Zhou, Y., Chang, W., & Stanciulescu, I., 2015. Non-linear stability and remote unconnected equilibria of shallow arches with asymmetric geometric imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 77, pp. 1–11.