



DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DE LAJES LISAS APOIADAS EM PILARES DE SEÇÃO TRANSVERSAL ELÍPTICA E SEMI-ELÍPTICA

Jhonatan Willian Souza Faria

Paulo Anderson Santana Rocha

Miguel Ângelo Araújo Lima

Tiago José Ferreira

jhonatansfaria@gmail.com

pandrocha@gmail.com

miguel_angelo05@yahoo.com.br

tiagojoseferreira@yahoo.com.br

Universidade Federal de Ouro Preto

Escola de Minas- Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000, Minas Gerais, Brasil

Resumo. O presente trabalho tem como principal objetivo realizar o dimensionamento à punção de duas lajes lisas de concreto armado, uma apoiada em um pilar com seção transversal elíptica e outra apoiada em um pilar com seção transversal semi-elíptica. Inicialmente construiu-se a curva de resistência (interação) do pilar de concreto com o fim de verificar se a geometria da seção transversal e a quantidade de armadura adotada são capazes de suportar as solicitações de projeto atuantes no pilar. A curva de resistência foi obtida de forma computacional utilizando-se a Regra dos Trapézios e as equações de compatibilidade de deformações e de equilíbrio correspondentes a cada domínio de deformação. O dimensionamento à punção foi realizado através das recomendações feitas pela ABNT NBR 6118 (2014). Além do mais, realizou-se a automatização do processo de cálculo a partir da implementação computacional das prescrições normativas, e para isso utilizou-se a linguagem computacional FORTRAN 90. Para a seção trabalhando nos Domínios 2, 3, 4 e 4a não há expressões analíticas para as parcelas comprimidas, então, propõem-se duas equações: uma para calcular o centroide da seção e outra para calcular a área de cada parcela comprimida da seção semi-elíptica, utilizando-se a Regra dos Trapézios.

Palavras chave: Dimensionamento à punção, Pilar com seção transversal elíptica, Pilar com seção transversal semi-elíptica, Contornos críticos.

1 INTRODUÇÃO

A definição segundo a norma ABNT NBR 6118 (2014) para lajes-cogumelo é que estas são lajes apoiadas diretamente em pilares com capitéis, enquanto lajes lisas são lajes apoiadas nos pilares sem capitéis. Neste tipo de sistema estrutural não existem vigas, com as lajes sendo apoiadas diretamente sobre os pilares.

Paiva *et al.* (2015) explica que o dimensionamento de pavimentos com lajes lisas envolve a verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar. Esta é uma etapa fundamental do projeto, uma vez que, a estrutura pode atingir o estado limite último devido ao esgotamento da capacidade resistente ao cisalhamento nos contornos da ligação laje-pilar, em um modo de ruptura denominado de punção.

A punção é um tipo de ruína que pode ocorrer quando forças concentradas, ou atuando em pequenas áreas, são aplicadas diretamente nas lajes, causando a sua perfuração. Nas lajes lisas, esta situação é típica na região da ligação laje-pilar (MELGES, 2001).

O presente trabalho busca realizar o dimensionamento de duas lajes lisas de concreto armado, uma apoiada em um pilar com seção transversal elíptica e outra apoiada em um pilar com seção transversal semi-elíptica. O efeito da punção é um fator importante no dimensionamento desse tipo de estrutura, assim como a espessura da laje, a geometria dos pilares, o uso de armadura de cisalhamento, dentre outros.

Inicialmente será construída a curva de resistência (interação) do pilar e será verificada se a geometria da seção transversal e a quantidade de armadura adotada serão capazes de suportar as solicitações de projeto atuantes no pilar. A curva será obtida de forma computacional utilizando-se a Regra dos Trapézios e as equações de compatibilidade de deformações e de equilíbrio correspondentes a cada domínio de deformação. Para a seção trabalhando nos Domínios 2, 3, 4 e 4a não há expressões analíticas para as parcelas comprimidas, então, propõem-se duas equações: uma para calcular o centroide da seção e outra para calcular a área de cada parcela comprimida da seção semi-elíptica, utilizando-se a Regra dos Trapézios.

Após o dimensionamento, será realizada a automatização do processo de cálculo a partir da implementação computacional das prescrições normativas, e para isso, será utilizada a linguagem computacional FORTRAN 90.

2 PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

A ruptura por punção ocorre por corte localizado. As elevadas tensões de corte (cisalhamento) geram tensões principais de tração em um plano inclinado de aproximadamente 25° e 30° com o plano da laje, rompendo, na falta de armadura adequada, o elemento plano rompe segundo a forma de um tronco de cone, como mostra a Fig. 1.

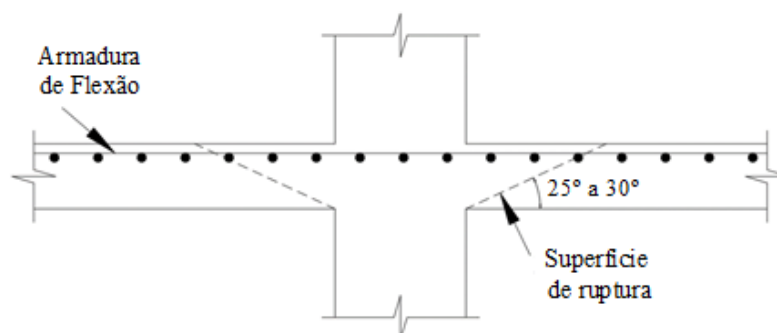


Figura 1: Inclinação da superfície de ruptura.

A seguir são apresentados os fundamentos da verificação da punção segundo as prescrições normativas da ABNT NBR 6118 (2014).

2.1 Método de Cálculo

O método mais conhecido e desenvolvido para verificar a resistência de uma ligação laje-pilar com relação à punção é o da superfície de controle, adotado pela ABNT NBR 6118 (2014). A sua vantagem em relação aos demais é a sua generalização, pois pode ser aplicada em qualquer configuração de pilar (RABELLO, 2016).

O modelo de cálculo de punção em lajes corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas (depende da presença de armadura específica para punção) definidas no entorno de forças concentradas.

A primeira superfície crítica (contorno C) é definida no entorno do pilar ou da carga concentrada. Nessa região as tensões de compressão devidas à carga transmitida pelo pilar são predominantes, devendo essa seção crítica ser verificada indiretamente quanto à tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento. Essa verificação deve ser feita em lajes com ou sem armadura.

A segunda superfície crítica (contorno C') é afastada $2d$ do pilar ou da carga concentrada. Nessa região há uma diminuição da influência das tensões de compressão devidas à carga transmitida pelo pilar, há também um aumento da influência da força cisalhante e por consequência das tensões principais de tração. Assim, esta superfície crítica deve ser verificada à punção, a qual está associada à tração diagonal do concreto. Caso haja necessidade, essa ligação deve ser reforçada por armadura transversal.

A terceira superfície crítica (contorno C'') apenas deve ser verificada quando for necessário colocar armadura transversal. Essa verificação é semelhante à situação da segunda superfície crítica, admitindo uma superfície de ruptura mais longe do ponto da aplicação da carga concentrada.

A Fig. 2 apresenta as superfícies críticas de acordo com o modelo da superfície de controle, adotado pela ABNT NBR 6118 (2014).

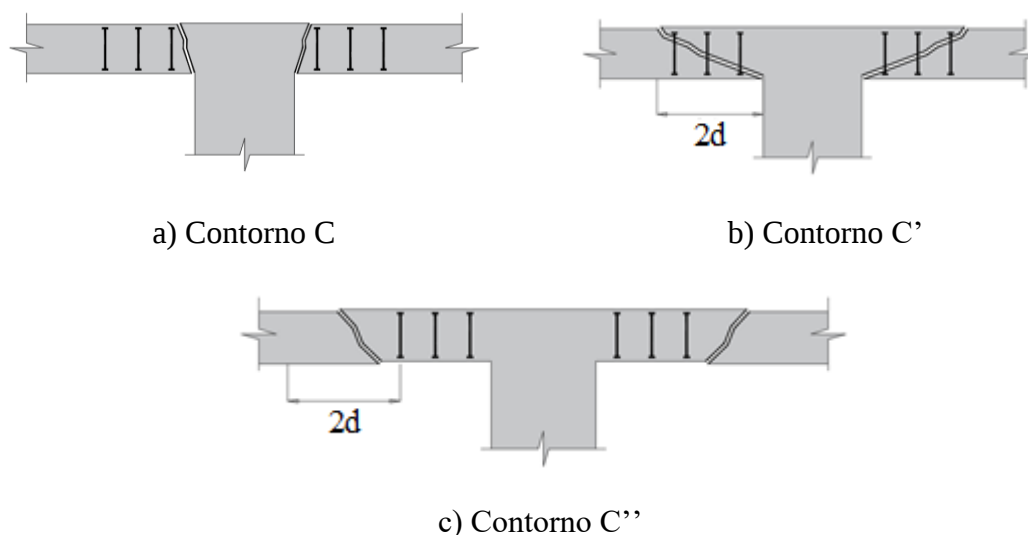


Figura 2: Superfície crítica para o modelo de cálculo.

2.2 Tensão Solicitante na Superfície Crítica

Para o cálculo das tensões solicitantes na superfície crítica, devem ser considerados a posição dos pilares na estrutura, o tipo de carregamento e a geometria dos pilares. No presente trabalho trataremos apenas do caso de pilares internos, sendo que as considerações a respeito de pilares de borda e de canto, podem ser consultadas na ABNT NBR 6118 (2014).

2.2.1 Pilar Interno

A Fig. 3 apresenta as possíveis formas de se obter o perímetro da superfície crítica, para verificação da punção de pilares internos em lajes lisas.

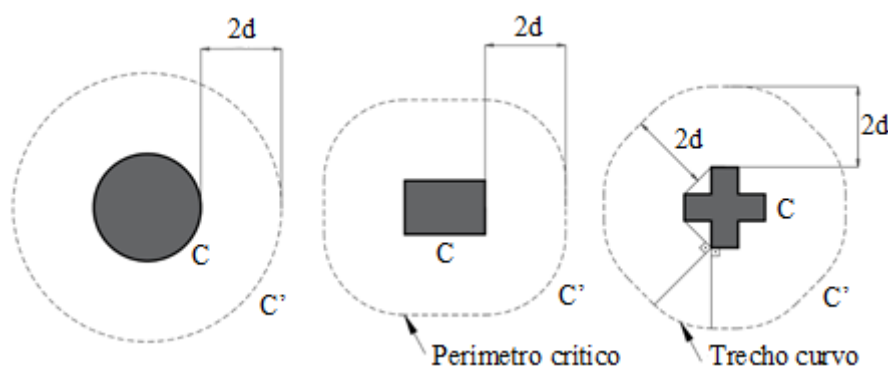


Figura 3: Perímetro crítico em pilares internos.

A tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico devido aos momentos e à força axial, pode ser determinada através da Eq. (1) considerando o princípio da superposição dos efeitos.

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u d} + \frac{K_y M_{Sdy}}{W_{py} d} + \frac{K_x M_{Sdx}}{W_{px} d} \quad (1)$$

no qual:

F_{Sd} é a força ou reação concentrada de cálculo;

u é o perímetro do contorno C' ;

$d = \frac{(d_x + d_y)}{2}$ é a altura útil média da laje no contorno C' ;

d_x e d_y são as alturas úteis da laje nas direções x e y ;

W_p é o Módulo de Resistência Plástico no contorno C' ;

K é o coeficiente que fornece a parcela de M_{Sd} transmitida ao pilar por cisalhamento. Esse coeficiente depende da relação entre C_1 e C_2 como mostra a Tabela 1.

Tabela 1. Valores de K

C_1/C_2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

no qual:

C_1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;

C_2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.

2.2.2 Valores do Módulo de Resistência Plástico (w_p)

Os valores do Módulo de Resistência Plástico podem ser obtidos através das Eqs. (2) à (6), de acordo com a geometria do pilar.

a) Pilar retangular

$$W_{px} = \frac{C_1^2}{2} + 2\pi d C_1 + 16d^2 + 4d C_2 + C_1 C_2 \quad (2)$$

$$W_{py} = \frac{C_2^2}{2} + 2\pi d C_2 + 16d^2 + 4d C_1 + C_1 C_2 \quad (3)$$

b) Pilar circular

$$W_p = (D + 4d)^2 \quad (4)$$

em que D é o diâmetro do pilar e d é a altura útil da laje.

c) Pilar com seção transversal elíptica

$$W_{px} = 4 \left(b^2 + \frac{c^2}{3} - \frac{c^4}{15b^2} \right) \quad (5)$$

$$W_{py} = 4a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} - \frac{e^4}{15} \right) \quad (6)$$

em que a, b, c e a excentricidade e são parâmetros da elipse.

2.3 Tensão Resistente nas Superfícies Críticas

2.3.1 Tensão Resistente na Superfície Crítica C (Compressão Diagonal do Concreto)

Essa verificação deve ser feita no contorno C, através da Eq. (7), em lajes com ou sem armadura de punção. É comparada a tensão de cisalhamento que leva a seção crítica à plastificação, para momentos e força axial atuantes, com a tensão resistente do concreto sob compressão diagonal.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \alpha_v f_{cd} \quad (7)$$

sendo:

$$\alpha_v = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa.}$$

no qual:

f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto à compressão cilíndrica (MPa);

α_v é o fator de correção da resistência do concreto;

f_{ck} é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto.

2.3.2 Tensão Resistente na Superfície Crítica C'

a) Trecho sem armadura de punção

Essa verificação deve ser feita em elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção, a tensão resistente crítica C' deve ser calculada através da Eq. (8).

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100 \rho f_{ck})^{1/3} \quad (8)$$

sendo:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad (9)$$

onde:

$d = \frac{d_x + d_y}{2}$ é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C’;

ρ_x e ρ_y são as taxas geométricas de armadura da laje nas duas direções ortogonais assim calculadas:

- i. na largura igual à dimensão ou área carregada do pilar acrescida de 3d para cada um dos lados;
- ii. no caso de proximidade da borda, prevalece a distância até a borda, quando menor que 3d.

b) Trechos com armadura de punção

No caso de elementos estruturais ou trechos com armadura de punção, a tensão resistente crítica C’ deve ser calculada através da Eq. (10).

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100 \rho f_{ck})^{1/3} + 1,5 \frac{d}{S_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{u d} \quad (10)$$

onde:

$$S_r \leq 0,75 d;$$

S_r é o espaçamento radial entre linhas de armadura de punção;

A_{sw} é a área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C’;

α é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;

u é o perímetro crítico ou perímetro crítico reduzido no caso de pilares de borda ou de canto;

f_{ywd} é a resistência de cálculo da armadura de punção, com:

- i. $f_{ywd} \leq 300 \text{ MPa}$ para conectores;
- ii. $f_{ywd} \leq 250 \text{ MPa}$ para estribos (aço CA-50 ou CA-60);
- iii. Para lajes com espessura maior que 15 cm, esses valores podem ser aumentados.

Essa armadura deve ser preferencialmente constituída por três ou mais linhas de conectores tipo pino com cabeça, dispostas radialmente a partir do perímetro do pilar. As

extremidades dos conectores devem estar ancoradas fora do plano da armadura de flexão correspondente.

2.3.3 Tensão Resistente na Superfície Crítica C''

Quando for necessário utilizar armadura de punção, ela deve ser estendida em contornos paralelos a C' até que, num contorno C'' afastado $2d$ do último contorno de armadura, não seja mais necessária armadura, ou seja, até que $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1}$.

3 REGRA DOS TRAPÉZIOS

A noção básica da regra dos Trapézios é usar um polinômio de interpolação de 1º grau em cada subintervalo (x_i, x_{i+1}) , do intervalo total sobre o qual se efetua a interpolação. Assim, a equação se transforma em:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx \quad (11)$$

onde $P_1(x)$ pode ser expresso na forma do polinômio de interpolação de Newton com diferenças ascendentes, dado pela Eq. (12).

$$P_1(x) = y_i + \frac{\Delta y_i}{h}(x - x_i) \quad (12)$$

logo,

$$I \cong \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[y_i + \frac{\Delta y_i}{h}(x - x_i) \right] dx \quad (13)$$

A expressão genérica para a integração sobre um conjunto de pontos igualmente espaçados é dada por:

$$I \cong \frac{h}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (14)$$

Utilizando a Regra dos Trapézios, desenvolveu-se neste trabalho uma expressão para calcular o centroide correspondente à seção semi-elíptica de um pilar de concreto, que será utilizada para a obtenção da curva de interação momento versus normal. A equação é dada por:

$$\bar{y} = \frac{h}{8} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (15)$$

É importante ressaltar que no presente trabalho, utilizou-se a Regra dos Trapézios porque à medida que se alteram as deformações do concreto e do aço ao longo da seção, o valor de b vai se modificando, uma vez que a seção é semi-elíptica. Outra forma de se determinar as propriedades geométricas e as coordenadas do centro de gravidade pode ser obtida via método dos elementos finitos. Alguns detalhes são apresentados no Exemplo 1 deste trabalho.

4 MÉTODO DE GAUSS-LEGENDRE (QUADRATURA DE GAUSS)

Neste trabalho utilizou-se também a técnica da quadratura de Gauss para a obtenção da área, do perímetro e do Módulo de Resistência Plástico (W_p) das seções elípticas e semi-elípticas. Desta maneira, considerando-se o problema de avaliar numericamente uma integral unidimensional na forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (16)$$

A aproximação de n pontos será:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + \dots + w_n f(x_n) \quad (17)$$

em que $w_1, w_2, \dots, w_n$ são os pesos e $x_1, x_2, \dots, x_n$ são os pontos de Gauss-Legendre.

Uma integral $\int_a^b f(x) dx$ sobre um $[a, b]$ arbitrário pode ser transformada em uma integral sobre $[-1, 1]$ utilizando a mudança de variáveis:

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b] \quad (18)$$

Isso permite que a quadratura de Gauss-Legendre seja aplicada a todo intervalo $[a, b]$, já que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt \quad (19)$$

O método de Gauss-Legendre será utilizado neste trabalho por se tratar de um procedimento eficiente, ou seja, fornece respostas confiáveis para o cálculo de perímetros, áreas e momentos de inércia de seções genéricas.

5 APLICAÇÕES

5.1 Introdução

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos no presente trabalho referentes ao projeto de lajes lisas apoiadas em pilares de seções transversais elípticas e semi-elípticas. Os exemplos foram organizados da seguinte forma: inicialmente são mostradas respostas correspondentes às propriedades geométricas das seções, posteriormente foi obtida a curva de interação momento versus normal para a seção transversal semi-elíptica de um pilar de concreto e por fim realizou-se o dimensionamento de duas lajes lisas.

5.2 Exemplos

5.2.1 Momentos de inércia da seção elíptica em relação aos eixos baricêntricos

O objetivo deste exemplo é apresentar de forma numérica os resultados dos momentos de inércia para uma seção elíptica. As respostas foram obtidas através das expressões analíticas, em seguida com o auxílio do programa AutoCAD e por fim através do método dos elementos finitos via o software computacional ANSYS 17. Para isso, utilizou-se o elemento finito triangular com três nós (CST) e a seção foi discretizada com 585 nós e com 1064 elementos. A Fig. 4 apresenta a seção elíptica discretizada e a Tabela 2 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos.

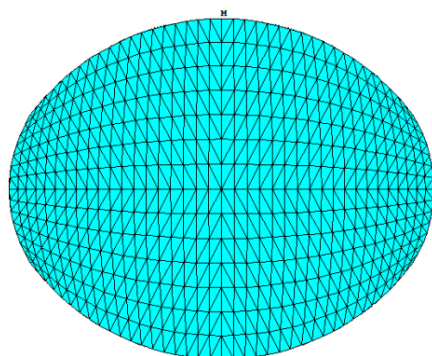


Figura 4. Seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm.

Tabela 2. Momento de inércia da seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm

Momento de inércia	Analítico	AutoCAD	Presente Trabalho
I_x	$4,021 \times 10^3$	$4,021 \times 10^3$	$3,911 \times 10^3$
I_y	$6,283 \times 10^3$	$6,283 \times 10^3$	$6,166 \times 10^3$

5.2.2 Comprimento de uma elipse via Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss)

Neste exemplo, apresentam-se os resultados referentes ao comprimento da seção elíptica representada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ no primeiro quadrante. Para a obtenção dos resultados, utilizaram-se 5 pontos de Gauss e as respostas foram comparadas com os valores determinados por Burden *et al.* (2016). A Tabela 3 apresenta a comparação entre a solução obtida no presente trabalho com a solução analítica obtida por Burden *et al.* (2016).

Tabela 3. Perímetro da seção elíptica para a=3 e b=2

Comprimento	Burden <i>et al.</i> (2016)	Presente Trabalho
L	3,7437137	3,7437137

5.2.3 Cálculo do Perímetro e Área da seção elíptica

O perímetro da seção elíptica foi obtido com base nos procedimentos matemáticos utilizados via cálculo infinitesimal e é calculado pela Eq. (20).

$$P_e = a \pi \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} \right) \quad (20)$$

Por sua vez, a é a medida do semi-eixo maior da elipse e c é a coordenada do foco da elipse. Com o fim de validar a dedução da expressão matemática, o perímetro foi obtido com auxílio do programa AutoCAD e com o Método de Gauss-Legendre com 60 pontos, no qual verificou-se uma boa aproximação entre as respostas.

O perímetro da seção elíptica será um parâmetro relevante no dimensionamento da laje lisa à punção, pois serão verificados os efeitos da compressão diagonal (bielas comprimidas) no contorno C do pilar e os efeitos da tração diagonal ou punção nos contornos C' e C''. Na Tabela 4 apresentam-se os valores do perímetro da seção elíptica.

Tabela 4. Perímetro da seção elíptica para a = 10 cm e b = 8 cm (cm)

Analítica	AutoCAD	Gauss-Legendre	Analítica/AutoCAD	Analítica/Gauss-Legendre
56,7952	56,7233	56,3977	1,001	1,007

A área de uma seção transversal elíptica é calculada pela Eq. (21).

$$A = \pi a b \quad (21)$$

Na Tabela 5 apresentam-se os valores da área da seção transversal elíptica, comparando a solução analítica com os resultados obtidos através do programa AutoCAD e pelo Método de Gauss-Legendre com 60 pontos.

Tabela 5. Área da seção elíptica para $a = 10$ cm e $b = 8$ cm (cm²)

Analítica	AutoCAD	Gauss-Legendre	Analítica/AutoCAD	Analítica/Gauss-Legendre
251,3274	251,3274	251,3276	1,0000	1,0000

5.2.4 Cálculo da Área e Perímetro da seção semi-elíptica

Neste exemplo modelou-se a seção semi-elíptica via regra dos trapézios com 300 e 1000 pontos com o programa computacional implementado em linguagem FORTRAN 90 e o resultado foi comparado com a solução analítica e com o resultado obtido através do Método de Gauss-Legendre com 60 pontos. Os resultados são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6. Área da seção semi-elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm (cm²)

Presente Trabalho		Solução Analítica	Gauss-Legendre	Presente Trabalho/Solução Analítica	Presente Trabalho/Gauss-Legendre
300	125,6381	125,6637	125,6638	0,99980	0,99980
1000	125,6595			0,99997	0,99997

O perímetro da seção semi-elíptica é calculado pela Eq. (22)

$$P_{se} = \frac{a\pi}{2} \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} \right) + 2a \quad (22)$$

em que $e = c/a$ é a excentricidade da seção elíptica.

Na Tabela 7 apresentam-se os valores do perímetro da seção semi-elíptica, comparando a solução analítica com os resultados obtidos através do programa AutoCAD e pelo Método de Gauss-Legendre com 60 pontos.

Tabela 7. Perímetro da seção semi-elíptica para $a = 10\text{ cm}$ e $b = 8\text{ cm}$ (cm)

Analítica	AutoCAD	Gauss-Legendre	Analítica/AutoCAD	Analítica/Gauss-Legendre
48,3976	48,3617	48,1988	1,0007	1,0041

5.2.5 Cálculo do Centróide da seção semi-elíptica

Com o objetivo de calcular o ponto em que a força axial de compressão atuará na região comprimida, desenvolveu-se uma expressão numérica baseada na regra dos trapézios necessária para se calcular o centróide dessa região, uma vez que não existem equações definidas para as seções correspondentes às fatias comprimidas de uma seção semi-elíptica. A validação desse resultado servirá para calcular o centróide de qualquer região comprimida com profundidade $y \leq b$. Este procedimento servirá para o cálculo do momento fletor da seção semi-elíptica para qualquer par de deformações ε_c e ε_s . Para se verificar a eficiência da equação proposta, comparou-se o resultado numérico com a resposta do valor do centróide da seção semi-elíptica, obtido através da solução analítica determinada com base no cálculo infinitesimal dada pela Eq. (23).

$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi} \quad (23)$$

Vale informar que a expressão proposta nesta pesquisa é representada pela Eq. (24).

$$\bar{y} = \frac{h}{8} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (24)$$

Na Tabela 8 apresentam-se os valores do centróide da seção semi-elíptica.

Tabela 8. Centróide da seção semi-elíptica com $a = 10\text{ cm}$ e $b = 8\text{ cm}$ (cm)

Número de Pontos	Presente Trabalho	Solução Analítica	Presente Trabalho/Solução Analítica
300	3,395685	3,395305	1,0001

Nas Tabelas 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 foi possível verificar uma excelente aproximação entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e através das comparações realizadas com as diferentes técnicas adotadas.

5.2.6 Curva de interação da seção transversal semi-elíptica de um pilar de concreto

Neste exemplo, apresentam-se os carregamentos de cálculo atuantes no pilar de concreto armado de seção semi-elíptica e apresenta-se a curva de resistência (curva de interação momento versus normal) referente à seção transversal deste pilar de concreto armado. Nesta aplicação considerou-se para a seção transversal $a=20$ cm, $b=16$ cm, com área de aço das armaduras $A_s=5,4977$ cm², com 7 barras de 10 mm, $f_{ck}=30$ MPa e $d'=2,5$ cm. Nesta aplicação o peso específico do concreto é de $\gamma_{con}=25$ kN/m³, a espessura da laje é $h_{laje}=12$ cm, considerou-se uma sobrecarga igual a $sc=1,5$ kN/m², peso próprio de $pp=3$ kN/m². A carga total de projeto é $p_d=6,3$ kN/m². O pilar terá um comprimento igual a 300 cm e será considerado como bi-engastado. Assim, tem-se que $l_e=0,5l$.

Para auxiliar a definição das equações que regem o equilíbrio na seção nos diversos domínios, a Fig. 5 mostra a seção transversal semi-elíptica e as notações a serem utilizadas para definir as variáveis envolvidas.

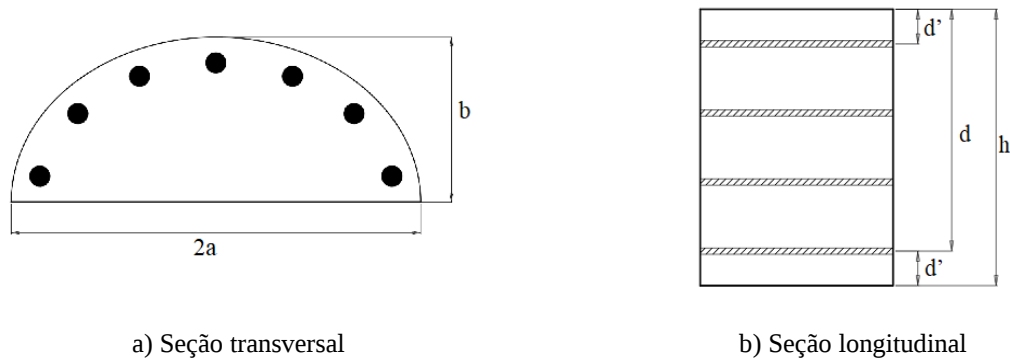


Figura 5. Esquema da seção transversal e longitudinal da seção semi-elíptica.

O momento de inércia, o raio de giração e a esbeltez do pilar são calculados através das Eqs. (25), (26) e (27), respectivamente.

$$I_x = \frac{\pi a b^3}{8} \quad (25)$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (26)$$

$$\lambda = \frac{l_e}{i_x} \quad (27)$$

Com base nos dados da seção transversal no comprimento pilar tem-se que $\lambda = 18,75$ e como a esbeltez limite é $\lambda_1 = 35$, não é necessário levar em conta os efeitos de segunda ordem no dimensionamento do pilar.

Com base nas informações acima, a carga normal de cálculo é $N_d = 56,7 \text{ kN}$ (de compressão) e o momento é $M_d = 11,34 \text{ kNm}$. Estas solicitações foram determinadas com base na definição da área de influência da laje e a partir da combinação das solicitações atuantes, obteve-se os valores de cada um dos carregamentos.

Para a construção da curva de interação foi implementado um programa computacional em que foram criadas equações de compatibilidade de deformação e equações de equilíbrio correspondentes a todos os domínios de deformação. Os casos em que $0 \leq y \leq b$ se referem ao comportamento da seção de concreto trabalhando no Domínio 2, Domínio 3, Domínio 4 e Domínio 4a, que caracterizam uma certa parcela da seção de concreto sujeita ao esforço de compressão. O programa computacional permitirá a construção da curva de interação ou curva de resistência da seção transversal semi-elíptica, uma vez que, não há na literatura nenhuma curva de interação correspondente a esta configuração geométrica. Há apenas curvas para seções retangulares, quadradas e circulares. Dentre os ábacos clássicos podem-se citar os ábacos de Montoya (2001), os ábacos de Venturini (1987) e os ábacos de Pinheiro (1994).

Pela Fig. 6, verifica-se que o pilar de concreto com seção semi-elíptica de dimensões iguais a $a=20 \text{ cm}$ e $b=16 \text{ cm}$ suporta os carregamentos aplicados, pois os carregamentos se encontram na região interna da curva de resistência.

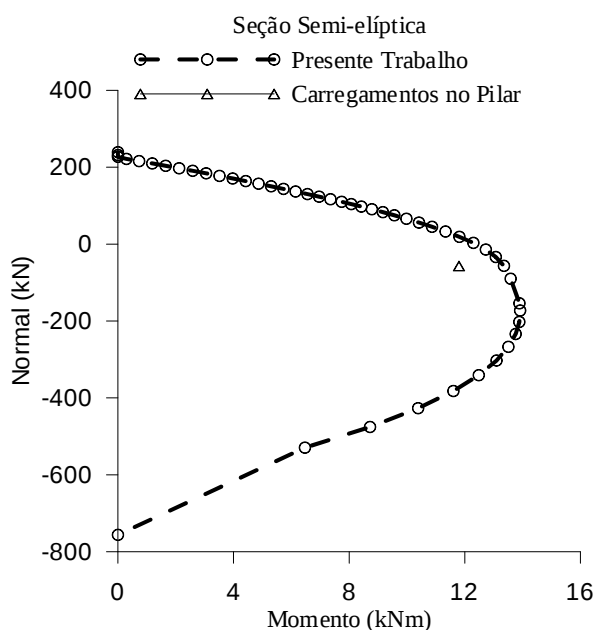


Figura 6. Curva de interação da Seção semi-elíptica.

5.2.7 Dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar com seção semi-elíptica

Neste exemplo serão utilizados os dados referentes aos carregamentos e ao pilar do exemplo anterior. Para a laje lisa será adotada uma altura de 12 cm com $A_{s,laje} = \varnothing 8,0 \text{ cm} / 8,0 \text{ cm}$ (nas duas direções) e altura útil de $d=9,5 \text{ cm}$. O esquema para este exemplo é ilustrado na Fig. 7.

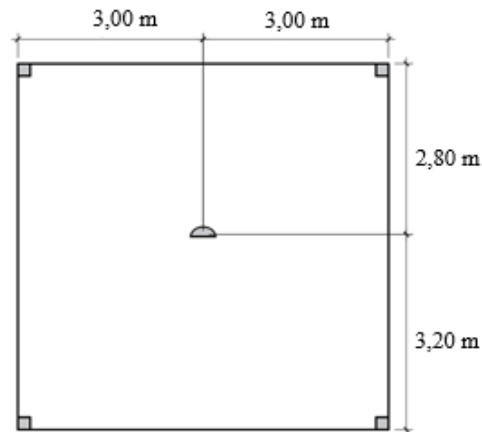


Figura 7. Laje lisa com pilar central de seção semi-elíptica.

Para a verificação da ligação, as tensões atuantes (τ_{sd}) e resistentes (τ_{Rd}) de cálculo serão calculadas e, a seguir, comparadas.

Para o caso de pilares internos com momento fletor aplicado, a tensão atuante (τ_{sd}) deve ser obtida através da Eq. (1) de acordo com a ABNT NBR 6118 (2014).

a) Verificação do contorno C

O perímetro e o Módulo de Resistência Plástico foram obtidos através do Método de Gauss-Legendre com 60 pontos, logo:

$$u = 96,3977 \text{ cm}$$

$$W_x = 418,9271651 \text{ cm}^2$$

$$K_x = 0,45 \text{ (} c_1 / c_2 = 0,40 \text{)}$$

$$N_d = 56,7 \text{ kN}$$

$$M_d = 11,34 \text{ kNm}$$

Substituindo-se os valores numéricos na Eq. (1):

$$\tau_{sd} = \frac{56,7}{0,963977 \times 0,095} + \frac{0,45 \times 11,34}{418,9271651 \times 10^{-4} \times 0,095} = 1901,368 \text{ kN / m}^2$$

A tensão resistente é obtida através da Eq. (7) de acordo com a ABNT NBR 6118 (2014).

$$\tau_{Rd2} = 0,27 \left(1 - \frac{30}{250} \right) \frac{30000}{1,4} = 5091,429 \text{ kN / m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd2}$, portanto a compressão diagonal no concreto está verificada e não há esmagamento do mesmo.

b) Verificação do Contorno C' (afastado 2d da face do pilar)

Considerando-se os mesmos critérios mostrados no item a, desta seção, tem-se que:

$$u = 193,6115 \text{ cm}$$

$$W_x = 1848,442115 \text{ cm}^2$$

Substituindo-se os valores numéricos na Eq. (1):

$$\tau_{sd} = \frac{56,7}{1,936115 \times 0,095} + \frac{0,45 \times 11,34}{1848,442115 \times 10^{-4} \times 0,095} = 598,868 \text{ kN / m}^2$$

A tensão resistente é obtida através da Eq. (8) de acordo com a ABNT NBR 6118 (2014).

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{9,5}} \right) (100 \times 0,00314 \times 30)^{\frac{1}{3}} = 0,797967 \text{ MPa} = 797,967 \text{ kN / m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd1}$, portanto nesta aplicação não será necessária a armadura de punção.

5.2.8 Dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar com seção elíptica

Nesta aplicação considerou-se para a seção transversal $a=20 \text{ cm}$, $b=16 \text{ cm}$, $f_{ck}=20 \text{ MPa}$. O peso específico do concreto é $\gamma_{con}=25 \text{ kN/m}^3$, a espessura da laje é $h_{laje}=15 \text{ cm}$ com $A_{s,laje} = \varnothing 8,0 \text{ c}/8,0 \text{ cm}$ (nas duas direções) e altura útil de $d=12,5 \text{ cm}$, considerou-se uma sobrecarga igual a $sc=3,0 \text{ kN/m}^2$, peso próprio de $pp=3 \text{ kN/m}^2$. O esquema para este exemplo é ilustrado na Fig. 8.

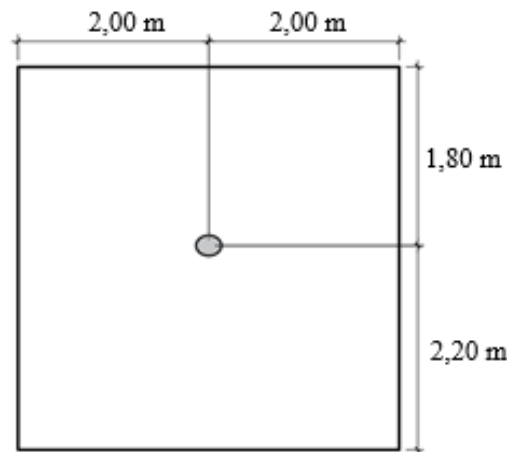


Figura 8. Laje lisa com pilar central de seção elíptica.

a) Verificação do contorno C

Neste exemplo o perímetro e o Módulo de Resistência Plástico também foram obtidos através do Método de Gauss-Legendre com 60 pontos, logo:

$$u = 112,7954 \text{ cm}$$

$$W_x = 1185,374889 \text{ cm}^2$$

$$K = 0,54 \text{ (} c_1 / c_2 = 0,80 \text{)}$$

$$N_d = 151,2 \text{ kN}$$

$$M_d = 30,24 \text{ kNm}$$

$$\tau_{sd} = \frac{151,2}{1,127954 \times 0,125} + \frac{0,54 \times 30,24}{1185,374889 \times 10^{-4} \times 0,125} = 2174,456 \text{ kN / m}^2$$

$$\tau_{Rd2} = 0,27 \left(1 - \frac{20}{250} \right) \frac{20000}{1,4} = 3548,571 \text{ kN / m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd2}$, portanto a compressão diagonal no concreto está verificada e não há esmagamento do mesmo.

b) Verificação do Contorno C' (afastado 2d da face do pilar)

$$u = 268,6542 \text{ cm}$$

$$W_x = 7090,270666 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{sd} = \frac{151,2}{2,686542 \times 0,125} + \frac{0,54 \times 30,24}{7090,270666 \times 10^{-4} \times 0,125} = 634,492 \text{ kN / m}^2$$

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{12,5}} \right) (100 \times 0,00419 \times 20)^{1/3} = 0,597999 \text{ MPa} = 597,999 \text{ kN / m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} > \tau_{Rd1}$, portanto será necessário o uso de algum tipo de armadura de punção.

Serão adotados para armadura de punção, conectores tipo pino com $\varnothing 6,3 \text{ mm}$ e com $f_{ywd} = 434,78 \text{ MPa}$.

Apesar do valor da resistência de cálculo (f_{ywd}) da armadura de punção ser de 434,78 MPa, a ABNT NBR 6118 (2014) limita este valor em 300 MPa para conectores tipo pino.

Para encontrarmos a área da armadura de punção necessária, faremos $\tau_{sd} = \tau_{Rd3}$ na Eq. (10), logo tem-se:

$$0,634492 = 0,10 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{12,5}} \right) (100 \times 0,00419 \times 20)^{1/3} + 1,5 \frac{0,125}{0,09375} \frac{A_{sw}}{2,686542 \times 0,125} \frac{300 \sin 90^\circ}{2}$$

$$A_{sw} = 0,976585 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Adotam-se, 4 $\varnothing 6,3 \text{ mm}$ por linha de conectores, com distribuição perpendicular à face do pilar.

c) Verificação do Contorno C''(afastado 2d da última linha de conectores)

A Fig. 9 apresenta a disposição dos conectores adotados.

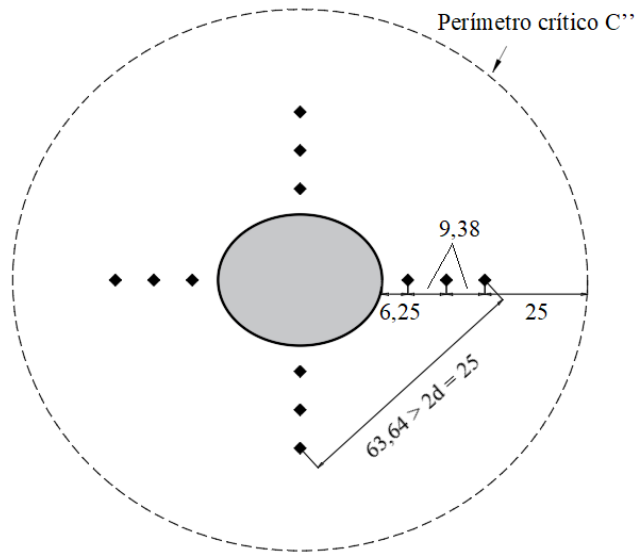


Figura 9. Disposição dos conectores (cm).

A tensão atuante de cálculo no contorno C'' deve ser comparada com a tensão resistente de cálculo, relativa a trechos sem armadura de punção, dada pela Eq. (8).

$$u = 424,6625 \text{ cm}$$

$$W_x = 17944,05834 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{sd} = \frac{151,2}{4,246625 \times 0,125} + \frac{0,54 \times 30,24}{17944,05834 \times 10^{-4} \times 0,125} = 357,6402 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{12,5}} \right) (100 \times 0,00419 \times 20)^{1/3} = 0,597999 \text{ MPa} = 597,999 \text{ kN/m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd1}$, portanto a armadura de punção adotada é suficiente para resistir aos esforços solicitantes.

6 CONCLUSÕES

Nos exemplos apresentados observou-se uma boa concordância entre os resultados obtidos via Regra dos Trapézios e pelo Método de Gauss-Legendre com as respostas analíticas desenvolvidas e/ou as obtidas a partir do software AutoCAD. Portanto, os resultados obtidos através dos métodos numéricos foram bem-sucedidos, contribuindo com boas respostas para o cálculo da área, perímetro, Módulo de Resistência Plástico e centroide de qualquer fatia comprimida da seção semi-elíptica.

Neste trabalho foi desenvolvida uma expressão para calcular o centroide de uma seção transversal semi-elíptica utilizando a Regra dos Trapézios, esta expressão foi utilizada para a obtenção da curva de interação momento versus normal.

A armadura considerada para o pilar de seção transversal semi-elíptica mostrou-se suficiente para resistir aos esforços solicitados. A laje lisa apoiada neste pilar de seção transversal semi-elíptica foi verificada quanto a ocorrência do fenômeno de punção, seguindo as recomendações da ABNT NBR 6118 (2014). Neste caso, verificou-se que a laje está segura quanto a ocorrência deste fenômeno sem a necessidade da introdução de armaduras de punção, conforme foi mostrado no procedimento de cálculo apresentado neste trabalho.

No exemplo referente ao dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar de seção transversal elíptica, observa-se que a partir dos cálculos realizados, houve necessidade de utilizar-se armadura de punção, no qual a presença dos mesmos elevou consideravelmente a resistência da ligação.

AGRADECIMENTOS

A UFOP pela oportunidade de realizar esta pesquisa. A CAPES e a FAPEMIG e pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118- *Projeto de estruturas de concreto*- Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

Burden, R. L.; Faires, J. D.; Burden, A. M. *Análise numérica*. 3. ed. bras. São Paulo: Cengage Learning, 879 p, 2016.

Melges, J. L. P. *Análise Experimental da Punção em Lajes de Concreto Armado e Protendido*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 406 p, 2001.

Montoya, P. J., Meseguer, A. G. & Cabré, F. H. *Hormigón Armado*, 14ª edição, Editora Gustavo Gili S.A. Barcelona, 2001.

Paiva, O.S. et al. Influencia do Índice de Retangularidade dos Pilares e das Condições de Contorno na Resistencia à Punção de Ligações Laje-pilar. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*, Belém-PA, v.8, n.3, p.260-295, jun.2015.

Pinheiro, L.M. ; Baraldi, L.T. ; Porem, M.E. *Concreto Armado: Ábacos para Flexão Oblíqua*. Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1994.

Rabello, F.T. *Estudo de Lajes Lisas de Concreto com Visão Integrada de Flexão e Punção*. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina., Florianópolis, SC, 268 p, 2016.

Venturini, W.S. *Dimensionamento de Peças Retangulares de Concreto Armado Solicitadas à Flexão Reta*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1987.