



## OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA MÁXIMA CARGA ESTRUTURAL COM RESTRIÇÃO VOLUMÉTRICA

**Juliano Fin<sup>a</sup>**

**Lavinia Maria Sanabio Alves Borges<sup>b</sup>**

**Eduardo Alberto Fancello<sup>a</sup>**

juliano.fin@posgrad.ufsc.br

lavinia@mecanica.ufrj.br

eduardo.fancello@ufsc.br

<sup>a</sup>Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica

<sup>b</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica

**Resumo.** A maioria de trabalhos na área de otimização estrutural topológica analisa problemas baseados em modelos constitutivos de comportamento elástico linear. Caso restrições de tensão sejam utilizadas, estas são impostas através da fixação de limites sobre alguma medida de tensão equivalente. Dependendo da aplicação, projetos desta natureza podem ser excessivamente conservativos ao não admitir possibilidade de deformações plásticas da estrutura. Um critério de falha alternativo frequentemente utilizado em projetos mecânicos, é o conceito de carga limite de colapso plástico, isto é, o carregamento no qual a estrutura falha por plastificação completa de alguma seção resistente. A área que lida com esse tipo de critério é chamada *Análise Limite*. Nessa abordagem, o estado limite é obtido de forma direta como solução de um conjunto não linear de condições de otimalidade, diferentemente de uma abordagem elasto-plástica incremental clássica. Este trabalho propõe um procedimento de otimização topológica estrutural que incorpora o problema de estado limite de colapso plástico como equação de estado do problema. O trabalho apresenta a formulação do problema de ótimo, o cálculo de sensibilidade às variáveis de projeto e exemplos numéricos preliminares mostrando resultados promissores para a abordagem.

*Palavras-chave:* Otimização Topológica, *Análise Limite*

## 1 Introdução

A otimização estrutural topológica é uma área de desenvolvimento contínuo devido a sua utilidade demonstrada nas fases iniciais de projeto, minimizando custos e agregando qualidade aos produtos. A grande maioria das abordagens formulam o problema considerando comportamento linear elástico do material, deixando de lado abordagens mais complexas como elastoplasticidade, devido aos custos de cálculo da equação de estado (problema não linear incremental) e de sua correspondente sensibilidade às variáveis de projeto. Tentando mudar esse foco, (Zhang et al., 2017; Alberdi e Khandelwal, 2017; Li et al., 2017; Wallin et al., 2016), utilizando elastoplasticidade incremental clássica, desenvolvem topologias de estruturas com a característica de maximizar a dissipação de energia quando solicitadas. Já Amir (2017), utilizando a mesma abordagem incremental, propõe formas alternativas para tratar o problema de restrição de tensão, substituindo-as por uma medida global de deformação plástica acumulada. No entanto, verifica-se que, utilizando esse tipo de abordagem, a etapa de obtenção da sensibilidade do problema ainda apresenta elevada complexidade e dificuldade de cálculo.

Uma forma de contornar este problema sem perder a característica de comportamento plástico do material consiste em fazer uso do conceito de Análise Limite. Este consiste em identificar a carga máxima que uma estrutura pode suportar prévia ao colapso plástico incipiente (Borges et al., 1996). Nesta abordagem é possível obter o estado limite através da solução de um problema variacional tendo, como principal vantagem, a ausência do cálculo de estados intermediários, diferentemente de uma abordagem incremental. O trabalho de Kammoun e Smaoui (2015), utilizando esta técnica em sua formulação estática, foi capaz de produzir resultados iniciais com topologias associadas ao problema de minimização de massa e restrição a admissibilidade plástica dos campos de tensão em equilíbrio com o carregamento prescrito.

Nesse trabalho é proposto um problema de otimização topológica que utiliza o conceito de Análise Limite como equação de estado. Diferentemente da abordagem de Kammoun e Smaoui (2015), formula-se aqui a maximização de carga de colapso da estrutura considerando uma quantidade de material disponível. Para tal, utiliza-se a formulação mista do problema de Análise Limite junto a determinação analítica da sensibilidade do problema de ótimo. Mostra-se que a formulação permite a reprodução de uma heurística clássica e simples para atualizar, elemento a elemento, o campo de densidade (SIMP) que define a geometria da solução. O documento apresenta em forma sequencial a abordagem utilizada para o problema de Análise Limite, a formulação do problema de projeto ótimo, o cálculo de sua sensibilidade às variáveis de projeto e resultados preliminares, finalizando com discussão e conclusões pertinentes.

## 2 Análise Limite

Seja  $\Omega_m \subset \mathcal{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) um domínio aberto com fronteira  $\partial\Omega_m$  ocupado por um corpo  $B$ . Admite-se que na fronteira  $\Gamma_t$  de  $\Omega_m$  são aplicadas forças de superfície  $\mathbf{t}$  enquanto a fronteira  $\Gamma_u$  de  $\Omega_m$  está submetida a condições de velocidade nula (condição homogênea por simplicidade de apresentação).

A forma bilinear  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{w} \rangle$  denota a potência externa realizada pelas forças de corpo  $\mathbf{b}$  e de superfície  $\mathbf{t}$  sobre um campo de velocidade virtual  $\mathbf{w} \in V$ :

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{w} \rangle := \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma, \quad (1)$$

Todo campo de tensão  $\sigma \in W'$  em equilíbrio com a força externa generalizada  $F$  deve satisfazer o Princípio das Potencias Virtuais. Assim, denota-se  $S(F)$  ao conjunto de estados de tensão em equilíbrio com as cargas externas:

$$S(F) := \left\{ \sigma \in W' \mid \int_{\Omega} \sigma \cdot \mathcal{D}w \, d\Omega = \langle F, w \rangle \, \forall w \in V \right\}, \quad (2)$$

onde  $\mathcal{D} = \nabla^s$  denota o operador de deformação infinitesimal e  $\mathcal{D}w \in W$  o campo taxa de deformação virtual.

Admite-se que o corpo possui um comportamento plástico ideal com regra de fluxo associativa e que todo ponto do domínio satisfaz admissibilidade plástica, isto é,  $\mathcal{F}(\sigma(x)) \leq 0$  onde  $\mathcal{F}$  é a denominada função limite de escoamento.

Denota-se potencial de dissipação  $\mathcal{D}(\mathbf{D}^p)$  à função convexa (linear), positiva e homogênea do tensor da taxa de deformação plástica, dado por

$$\mathcal{D}(\mathbf{D}^p) := \sup \left\{ \sigma \cdot \mathbf{D}^p \mid \mathcal{F}(\sigma) \leq 0 \right\}, \quad (3)$$

Se diz que o corpo  $B$  se encontra num Estado Limite de colapso plástico se existem campos de tensão  $\sigma \in W'$ , velocidade  $v \in V'$ , e de taxa de deformação plástica  $\mathbf{D}^p \in W$  tal que:

1. O campo de tensão é plasticamente admissível, ou seja,  $\mathcal{F}(\sigma(x)) \leq 0 \, \forall x \in \Omega$ ;
2. O campo de tensão está em equilíbrio com um o carregamento externo,  $\sigma \in S(\alpha F)$ , onde  $\alpha \in R^+$  é um fator de carga;
3. A velocidade e a taxa de deformação plástica são compatíveis, ou seja,  $\mathbf{D}^p = \mathcal{D}v$ ;
4. A tensão e a taxa de deformação plástica são associados pela regra de fluxo  $\sigma \in \partial \mathcal{D}(\mathbf{D}^p)$ , onde  $\partial \mathcal{D}$  representa o conjunto subdiferencial de  $\mathcal{D}$  (Rockafellar, 1970).

Mostra-se em (Zouain et al., 2014) que este estado corresponde aquele que resolve o seguinte problema variacional de ponto de sela, denominado Abordagem Mista do problema de Análise Limite:

$$\alpha = \sup_{\sigma \in W'} \inf_{v \in V} \left\{ \int_{\Omega} \sigma \cdot \mathcal{D}v \, d\Omega \mid \langle F, v \rangle = 1; \mathcal{F}(\sigma(x)) \leq 0 \, \forall x \in \Omega \right\}, \quad (4)$$

As condições de otimalidade de primeira ordem do problema dado pela Eq. (4) definem o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\mathbf{R}(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathcal{D}v \, d\Omega - \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \\ \int_{\Omega} \mathcal{D}^T \sigma \, d\Omega - \alpha F \\ \langle F, v \rangle = 1 \\ \dot{\lambda} \mathcal{F}(\sigma) = 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (5)$$

sendo  $\mathcal{X} = [\sigma \ v \ \alpha \ \dot{\lambda}]^T$  o vetor de variáveis do problema.

Cabe aqui lembrar que a formulação de Análise Limite, embora clássica na literatura, difere substancialmente daquela correspondente elastoplasticidade incremental. Nesta, a solução do problema fornece em forma direta o campo de tensões assim como o campo de velocidades de fluxo plástico ocorrendo na situação limite. A geometria do domínio, na presente abordagem, corresponde à configuração deformada no instante de colapso (fluxo) plástico, isto é, não existe configuração de referência nem campo de deslocamentos que mapeia ambas as configurações. Pelo mesmo motivo, não há modelo de elasticidade que associe o estado de tensões com deformações elásticas cinematicamente compatíveis com o campo de deslocamentos.

### 3 Problema de projeto ótimo

Considere o domínio  $\Omega \subset \mathcal{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) com fronteira  $\partial\Omega$  separado em subdomínios  $\Omega_m \subset \Omega$  e  $\Omega_v = \Omega \setminus \Omega_m$  representando respectivamente as regiões ocupadas por um corpo  $B$  e pelos vazios do seu complemento em  $\Omega$  (ver Figura 1). Admite-se que a fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega_m$  é suficientemente suave e contém a parte  $\Gamma_t \in \partial\Omega$  onde são aplicadas forças externas  $t$  e a fronteira  $\Gamma_u$  onde o campo de velocidades é considerado nulo. O problema de otimização topológica é classicamente caracterizado pela busca do domínio  $\Omega_m$  contido em  $\Omega$  que maximiza um desempenho pretendido satisfazendo restrições, dentre elas, a satisfação da equação de estado que define o problema físico estudado. Diferentes formas de controle da geometria  $\Omega_m$  definem diferentes técnicas de otimização topológica. A mais conhecida é a técnica SIMP (Bendsøe e Kikuchi, 1988) que utiliza o conceito de densidade intermediária, na qual a variável de controle topológico consiste num campo de densidade fictícia  $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ . As condições extremas de material sólido e vazio são alcançadas para pontos onde  $\rho(x) = 1$  e  $\rho(x) = 0$  respectivamente.

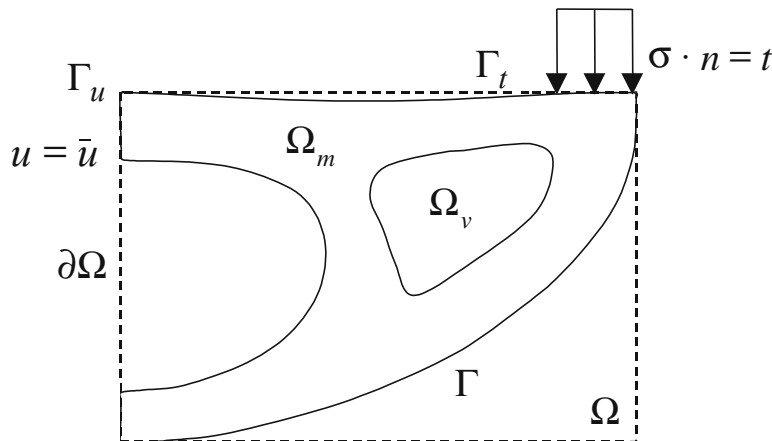


Figura 1: Domínio composto por regiões sólidas e vazias

No presente trabalho busca-se encontrar a distribuição de densidade  $\rho$  que maximiza a carga limite  $\alpha$  da estrutura para uma dada quantidade de material disponível. Formalmente,

$$\min f(\mathcal{X}) = -\alpha$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathcal{X}, \rho) &= \mathbf{0}, \\ M(\rho) &= M_0, \\ \rho_{min} &\leq \rho \leq 1 \end{aligned} \tag{6}$$

onde  $M(\rho) = \int_{\Omega} \rho d\Omega$  é uma medida de massa fictícia. A dependência da equação de estado  $\mathbf{R}(\mathcal{X}, \rho)$  em relação à variável de projeto  $\rho$  ocorre através da função  $\mathcal{F}$ , tornando a tensão limite de escoamento dependente do valor da densidade:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \rho) = \frac{1}{2} \mathcal{C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - [\rho^p \sigma_y]^2 \leq 0, \tag{7}$$

onde  $\mathcal{C}$  é uma matriz de projeção adequada para calcular a tensão equivalente de von Mises, e  $p$  um fator de penalização para valores de densidades intermediárias.

Percebe-se que a Eq. (7) restringe o campo de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , de modo a satisfazer as condições descritas por:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, 1) = \frac{1}{2} \mathcal{C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \sigma_y^2 \leq 0 & \rightarrow \sigma_{vM} \leq \sigma_y, \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, 0) = \frac{1}{2} \mathcal{C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq 0 & \rightarrow \sigma_{vM} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

#### 4 Discretização e Solução de Análise Limite

Para discretizar o problema, são utilizados elementos mistos: a velocidade é aproximada por um campo contínuo baseado em elementos triangulares quadráticos (6 nós) enquanto a tensão é aproximada por um campo descontínuo de elementos triangulares lineares (3 nós) sendo desse modo desacoplado entre elementos (Borges et al., 1996). Os campos dentro do domínio assumem a forma

$$\mathbf{v}(x) \approx \sum_{i=1}^{n_E} \mathbf{N}_v^i \tilde{\mathbf{v}}^i \quad \boldsymbol{\sigma}(x) \approx \sum_{i=1}^{n_E} \mathbf{N}_\sigma^i \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^i \tag{9}$$

sendo  $\mathbf{N}_v^i$  e  $\mathbf{N}_\sigma^i$  as matrizes de forma de velocidade e tensão, respectivamente, e  $\tilde{\mathbf{v}}^i$  e  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^i$  os vetores contendo os valores nodais dos respectivos campos para cada tipo de elemento. Assim,

$$\mathbf{F} \approx \tilde{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{n_E} \left[ \int_{\Omega_i} (\mathbf{N}_v^i)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} (\mathbf{N}_v^i)^T \mathbf{t} d\Gamma \right], \tag{10}$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathfrak{D} \mathbf{v} d\Omega \approx \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (\mathbf{N}_\sigma^i)^T \mathfrak{D} \mathbf{N}_v^i d\Omega, \tag{11}$$

e o fator de colapso  $\alpha$  é aproximado pela sua expressão discreta como:

$$\tilde{\alpha} = \sup_{\sigma \in W'} \inf_{v \in V} \left\{ \tilde{\sigma} \cdot B\tilde{v} \mid \tilde{F}^T \tilde{v} = 1; \tilde{\sigma}^i \in \mathcal{F} \forall x^i, i = 1 : 3n_E \right\}, \quad (12)$$

sendo  $x^i$  os  $i$ -ésimos<sup>1</sup> pontos de verificação de admissibilidade plástica da tensão.

Dessa forma o conjunto de equações não lineares que representam a condição de otimalidade do problema de Análise Limite pode ser reescrito como:

$$R(\tilde{\mathcal{X}}, \rho) = \begin{bmatrix} B\tilde{v} - \nabla_{\tilde{\sigma}} \mathcal{F}(\tilde{\sigma}) \dot{\lambda} \\ B^T \tilde{\sigma} - \tilde{\alpha} \tilde{F} \\ -\tilde{F}^T \tilde{v} + 1 \\ -G(\tilde{\sigma}, \rho) \dot{\lambda} \end{bmatrix} = 0, \quad (13)$$

onde  $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{\sigma}, \tilde{v}, \tilde{\alpha} e \dot{\lambda})$  e  $G(\tilde{\sigma}, \rho)$  é uma matriz diagonal tal que  $[G(\tilde{\sigma}, \rho)]_{ii} = \mathcal{F}(\tilde{\sigma}, \rho)|_{x^i}$ .

Para um dado campo de densidade  $\rho$  fixo, o conjunto de equações (13) pode ser resolvido utilizando o método de Newton-Raphson que fornece iterações do tipo

$$\left. \frac{\partial R(\tilde{\mathcal{X}}; \rho)}{\partial \tilde{\mathcal{X}}} \right|_{\tilde{\mathcal{X}}_0} \Delta \tilde{\mathcal{X}} = -R(\tilde{\mathcal{X}}; \rho) \Big|_{\tilde{\mathcal{X}}_0}, \quad (14)$$

onde a matriz tangente  $K = \frac{\partial R(\tilde{\mathcal{X}}; \rho)}{\partial \tilde{\mathcal{X}}}$  adota, no presente caso a forma

$$K = \begin{bmatrix} -H & B & 0 & -\nabla_{\tilde{\sigma}} \mathcal{F}(\tilde{\sigma}) \\ B^T & 0 & -F & 0 \\ 0 & -F^T & 0 & 0 \\ -\Lambda \nabla_{\tilde{\sigma}} \mathcal{F}(\tilde{\sigma})^T & 0 & 0 & -G(\tilde{\sigma}, \rho) \end{bmatrix},$$

sendo  $\Lambda$  uma matriz de formato diagonal, contendo a informação do vetor  $\dot{\lambda}$  ( $\dot{\lambda} = \text{diag}(\Lambda)$ )<sup>2</sup>, e  $H$  dada pela Eq. (15)

$$H = \dot{\lambda} \frac{\partial \nabla_{\tilde{\sigma}} \mathcal{F}(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}}. \quad (15)$$

É possível simetrizar  $K$  multiplicando o último conjunto de equações por  $\Lambda^{-1}$ , sendo  $\mathcal{O}(\bullet)$  o operador responsável por realizar essa operação. Assim, a Eq. (14) é reescrita como:

$$K^s \Delta \tilde{\mathcal{X}} = -\mathcal{O}(\Lambda^{-1}) R(\tilde{\mathcal{X}}; \rho) \Big|_{\tilde{\mathcal{X}}_0}, \quad (16)$$

<sup>1</sup>Para se garantir a admissibilidade plástica do campo de tensão, em todo ponto, em elementos triangulares lineares, são necessários somente três pontos por elemento. Desse modo, tendo um total de  $3n_E$  pontos de verificação

<sup>2</sup> $\text{diag}(\cdot)$  é um operador diagonalizador que transforma os elementos da diagonal de uma matriz em um vetor. Seja  $A$  uma matriz,  $l = \text{diag}(A)$ ,  $l_i = A_{ii}$

sendo

$$\mathbf{K}^s = \mathcal{O}(\Lambda^{-1})\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\nabla_{\tilde{\sigma}}\mathcal{F}(\tilde{\sigma}) \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\tilde{\sigma}}\mathcal{F}(\tilde{\sigma})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda^{-1}\mathbf{G}(\tilde{\sigma}, \rho) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Finalmente é fácil verificar que utilizando a condição de equilíbrio mecânico pode-se, por conveniência e mediante breve manipulação algébrica, reescrever o sistema apresentado na Eq. (16) para a seguinte expressão que define a atualização de Newton das variáveis físicas do problema de Análise Limite.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\nabla_{\tilde{\sigma}}\mathcal{F}(\tilde{\sigma}) \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_{\tilde{\sigma}}\mathcal{F}(\tilde{\sigma})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Lambda^{-1}\mathbf{G}(\tilde{\sigma}, \rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\sigma} \\ \tilde{v} \\ \Delta\alpha \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (18)$$

## 5 Análise de Sensibilidade

É possível reescrever problema dado pela Eq. (6) como dependente apenas da densidade ao se garantir a satisfação da equação de estado para cada  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{X}}(\rho)) = -\alpha \\ \text{tal que} \quad & \\ & M(\rho) - M_0 = 0 \\ & \rho - 1 \leq 0 \\ & \rho_{min} - \rho \leq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(\rho) = \arg \left\{ \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{X}}(\rho), \rho) = \mathbf{0} \right\},$$

Para resolver este problema define-se o funcional Lagrangeano,

$$\mathcal{L}(\rho, \mu, \gamma^+, \gamma^-) = f(\tilde{\mathbf{X}}(\rho)) + \mu(M(\rho) - M_0) + \gamma^+(\rho - 1) + \gamma^-(\rho_{min} - \rho) \quad (20)$$

cujas condições de estacionariedade são dadas por

$$\nabla_{\rho} f(\rho) + \mu \nabla_{\rho} (M(\rho) - M_0) + \gamma^+ \nabla_{\rho} (\rho - 1) + \gamma^- \nabla_{\rho} (\rho_{min} - \rho) = 0 \quad (21)$$

$$M(\rho) - M = 0 \quad (22)$$

$$\gamma^+ (\rho - 1) = 0 \quad (23)$$

$$\gamma^- (\rho_{min} - \rho) = 0 \quad (24)$$

$$\rho - 1 \leq 0 \quad (25)$$

$$\rho_{min} - \rho \leq 0 \quad (26)$$

$$\gamma^+ \geq 0 \quad (27)$$

$$\gamma^- \geq 0 \quad (28)$$

Devido ao elemento  $\nabla_{\rho} f(\rho)$  apresentar dependência implícita com o campo de densidades, utiliza-se o método adjunto para se obter o valor de cada componente do gradiente (Komkov et al., 1986). Após certa manipulação algébrica, mostra-se que

$$[\nabla_{\rho} f(\rho)]_i = -\mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (29)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}$  é o denominado vetor adjunto obtida partir da solução do sistema apresentado pela Eq. (30):

$$\mathbf{K}^s \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_{sol}} \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}. \quad (30)$$

Uma simples manipulação algébrica permite verificar que o sistema linear dado pela Eq. (30) é idêntica ao sistema linear de Newton<sup>3</sup> da Eq. (18) avaliado para as variáveis de estado de convergência de Análise Limite. Desse modo, a sensibilidade da função objetivo, dada pela Eq. (29) é obtida através de

$$\begin{aligned} [\nabla_{\rho} f(\rho)]_i &= \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \\ \Delta \alpha \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \cdot \left[ -\mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \\ \Delta \alpha \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left( \Lambda^{-1} \mathbf{G}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

---

<sup>3</sup>  $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$

onde o termo  $\Lambda^{-1} \mathbf{G}(\tilde{\sigma}, \rho) \dot{\lambda}$  resulta em  $\mathbf{g}(\tilde{\sigma}, \rho) = \text{diag}(\mathbf{G}(\tilde{\sigma}, \rho))$ . Assim, a Eq. (31) se simplifica para

$$[\nabla_{\rho} f(\rho)]_i = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\sigma} \\ \tilde{v} \\ \Delta \alpha \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \mathbf{g}(\sigma, \rho)}{\partial \rho_i} \end{bmatrix} = -2p\rho_i^{2p-1} \sigma_y^2 \sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j^i, \quad (32)$$

onde  $\sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j^i$  indica a soma dos fluxos plásticos dos  $j$ -ésimos pontos de verificação de admissibilidade plástica da tensão, dentro do  $i$ -ésimo elemento a qual  $\rho_i$  pertence.

Os demais termos de Eq. (21) podem ser obtidos componente a componente por

$$\begin{aligned} \mu \nabla_{\rho_i} (M(\rho) - M_0) + \gamma^+ \nabla_{\rho_i} (\rho - 1) + \gamma^- \nabla_{\rho_i} (\rho_{min} - \rho) = \\ \mu \frac{\partial}{\partial \rho_i} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \gamma^+ \frac{\partial}{\partial \rho_i} (\rho - 1) + \gamma^- \frac{\partial}{\partial \rho_i} (\rho_{min} - \rho) = \mu V_i + \gamma^+ - \gamma^-, \end{aligned}$$

sendo  $V_i$  o volume do  $i$ -ésimo elemento ao qual  $\rho_i$  pertence. Desse modo Eq. (21) satisfaz para cada componente Eq. (33).

$$\nabla_{\rho_i} \mathcal{L} = -2p\rho_i^{2p-1} \sigma_y^2 \sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j^i + \mu V_i + \gamma^+ - \gamma^- = 0. \quad (33)$$

## 6 Algoritmo

Baseado na informação do gradiente Eq. (32) e na não negatividade dos seus argumentos, verifica-se que para minimizar  $f(\mathcal{X}(\rho)) = -\alpha$  deve-se agregar massa à elementos cujo fluxo plástico seja elevado e reduzir massa aos elementos de fluxo plástico reduzido ou nulo. Como consequência, apenas elementos com alta taxa de deformação ou elevada dissipação de potência produzem influência sobre o máximo fator de colapso. Desse modo, pode-se propor um algoritmo de atualização de densidades elementares.

Sabe-se que para densidades intermediárias a condição Eq. (33) resume-se a

$$\nabla_{\rho_i} \mathcal{L} = -2p\rho_i^{2p-1} \sigma_y^2 \sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j^i + \mu V_i = 0, \quad (34)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{2p\rho_i^{2p-1} \sigma_y^2 \sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j^i}{\mu V_i} = 1 \quad (35)$$

Pode-se então, baseado em (Bendsøe e Sigmund, 2003), propor a lei de atualização das densidades como função de um parâmetro  $\beta_i$ , de acordo com:

$$\rho_i^{k+1} = \begin{cases} \max \{ (1 - \xi) \rho_i^k, \rho_{\min} \} & \text{se } \rho_i^k \beta_i^\eta \leq \max \{ (1 - \xi) \rho_i^k, \rho_{\min} \} \\ \min \{ (1 + \xi) \rho_i^k, 1 \} & \text{se } \rho_i^k \beta_i^\eta \geq \min \{ (1 + \xi) \rho_i^k, 1 \} \\ \rho_i^k \beta_i^\eta & \text{demais casos} \end{cases}, \quad (36)$$

sendo  $\beta_i$  calculado por

$$\beta_i = \frac{2p \rho_i^{2p-1} \sigma_y^2 \sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j^i}{\mu V_i}, \quad (37)$$

com a propriedade de que  $\beta_i \rightarrow 1$  quando  $\rho \rightarrow \rho_{\text{ótimo}}$ .

Para se evitar os efeitos conhecidos como *checker board*, pode-se incorporar uma suavização sobre o campo de sensibilidade baseado em conceitos de filtros. De acordo com Sigmund e Petersson (1998) é possível obter essa suavização, através de ponderação, pela distância, da sensibilidade do elemento e seus vizinhos, ou seja

$$[\widehat{\nabla_\rho f(\rho)}]_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_E} \mathcal{H}_j \rho_j [\nabla_\rho f(\rho)]_j}{\rho_i \sum_{j=1}^{n_E} \mathcal{H}_j}, \quad (38)$$

sendo  $\mathcal{H}_j$  o fator de ponderação de distância, definido por

$$\begin{cases} \mathcal{H}_j := r_{\min} - \text{dist}(k, j) & \text{se } \text{dist}(k, j) < r_{\min} \\ \mathcal{H}_j := 0 & \text{se } \text{dist}(k, j) \geq r_{\min} \end{cases},$$

e  $\text{dist}(k, j)$  sendo definida como a distância entre o centro do elemento  $k$  ao centro do elemento  $j$ , para todas as distâncias menores que  $r_{\min}$ , ou seja

$$\text{dist}(k, j) := \|\mathbf{c}^k - \mathbf{c}^j\|,$$

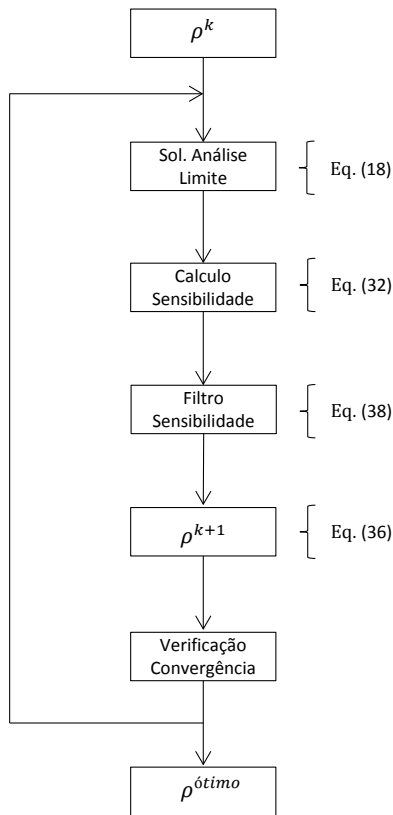
onde  $\mathbf{c}^e$  representa a coordenada do centroide do elemento  $e$ . Dessa forma,  $\beta_i$  pode ser modificado como:

$$\beta_i = -\frac{[\widehat{\nabla_\rho f(\rho)}]_i}{\mu V_i},$$

ou

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_E} \mathcal{H}_j \left[ 2p \rho_j^{2p} \sigma_y^2 \sum_{k=1}^3 \dot{\lambda}_k^j \right]}{\mu \rho_i V_i \sum_{j=1}^{n_E} \mathcal{H}_j}. \quad (39)$$

A Figura 2 apresenta as etapas do procedimento de otimização topológica partindo de um campo de densidades  $\rho^k$  até a obtenção da topologia ótima,  $\rho^{ótimo}$ .



**Figura 2: Fluxograma**

## 7 Resultados

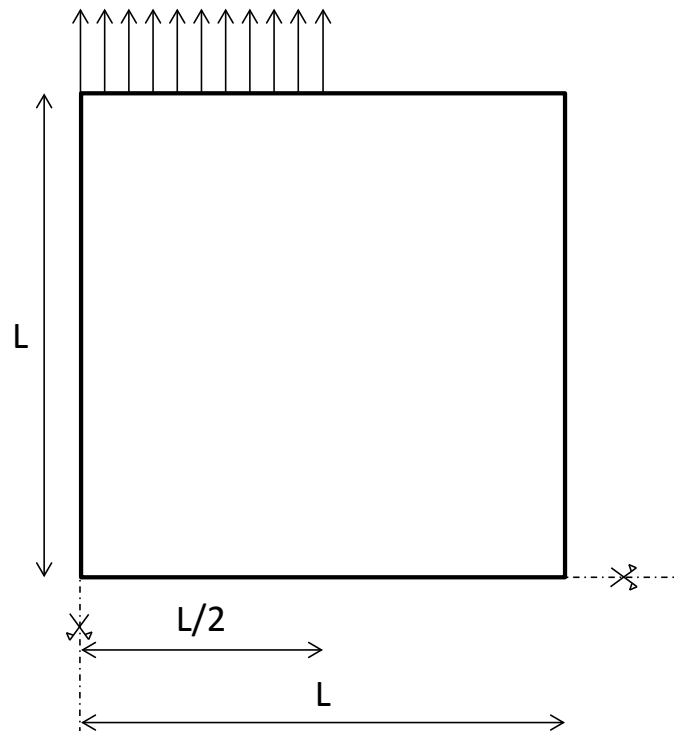
Com objetivo de analisar o desempenho do método proposto apresentam-se a seguir dois exemplos iniciais. O primeiro possui solução analítica esperada e serve como teste inicial para o procedimento proposto. O segundo trata de uma viga bi-apoiada, exemplo clássico em problemas de otimização topológica bidimensional, que permite uma primeira apreciação da capacidade do método em obter topologias complexas.

### 7.1 Barra sob tração

A Figura 3 apresenta o domínio base  $\Omega$  submetido a uma carga distribuída de valor constante unitário aplicada na metade do contorno superior e submetido a condições de simetria nos contornos esquerdo e inferior, representando assim o primeiro quadrante da representação real do problema. O problema está formulado de maneira a identificar a geometria que maximiza o fator de colapso considerando uma massa disponível  $M = 0,5$ .

Os parâmetros utilizados são  $p = 4$ ,  $\eta = 0,5$  e  $\xi = 0,175$ . O tamanho médio de elemento da malha base é  $L_e = 0,02L$  sendo  $L = 1$ . Em função desta escolha, o parâmetro  $r_{min} = 0,021L$  de forma que no máximo dois elementos na proximidade fossem utilizados na

suavização do campo de sensibilidade. A tensão de escoamento do material foi escolhida com o valor  $\sigma_y = 2$ . A geometria ótima esperada corresponde à de uma barra de largura  $L/2$  submetida a um estado de tensão homogêneo igual à tensão de colapso do material (*fully stressed design*). Com os dados fornecidos, o fator de colapso teórico deve ser  $\alpha = 2$ .



**Figura 3: Condições de contorno do Problema**

A Figura 4 apresenta a topologia final do processo de otimização, alcançando o fator de colapso  $\alpha = 1,94$  bem próximo do esperado. A diferença estima-se ser causado pelo volume das regiões sólidas ( $\rho = 1$ ) ser menor que o valor total de material disponível, já que parte do domínio apresenta regiões no limite inferior da densidade ( $\rho_{min} = 0,01$ ) e outras em regiões intermediárias que, pela penalização, contribuem pouco para a rigidez. O volume sólido presente na estrutura final fica na proximidade de  $V_{\rho=1} = 0,47$ .

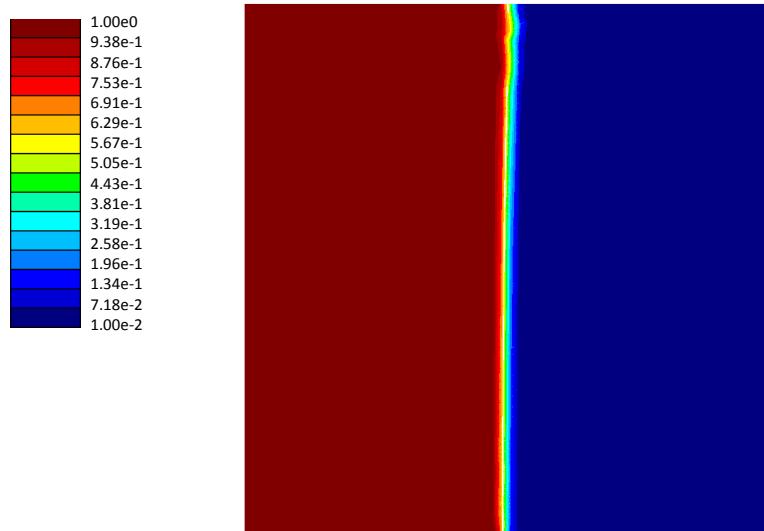


Figura 4: Campo de densidades da topologia final

## 7.2 Viga bi apoiada

A Figura 5 descreve o caso clássico de uma viga bi-apoiada com carregamento distribuído na sua parte central, sendo modelada pela metade da sua geometria devido às condições de simetria do problema. Em forma análoga ao caso anterior, a distribuição de carga possui valor constante unitário, trazendo por consequência as mesmas características quanto a interpretação do fator de colapso.

Considerando que sendo  $L = 1$ , o tamanho médio de elemento  $L_e = 0,02 L$  e o parâmetro  $r_{min} = 0,018 L$ . A quantidade de massa requerida foi  $M = 0,5$  e os restantes parâmetros algorítmicos foram os mesmos que do Exemplo 1.

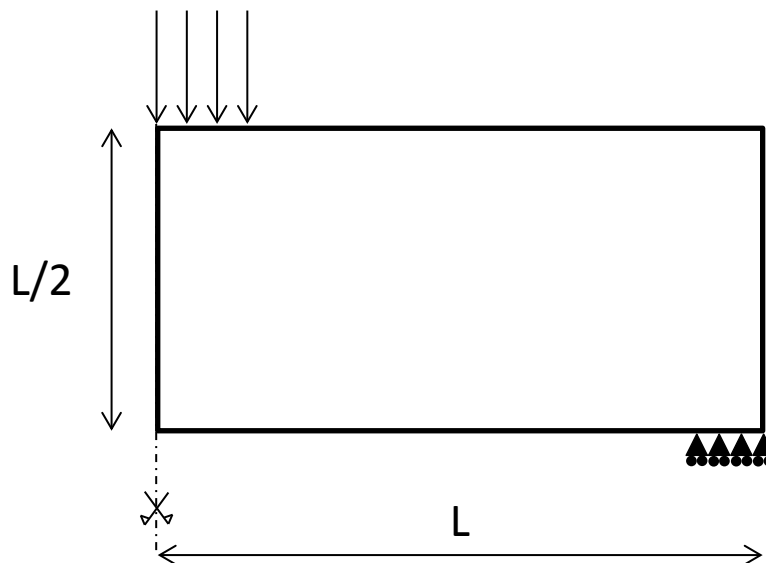


Figura 5: Condições de contorno do Problema

A Figura 6 apresenta o campo de densidades no estágio final da sequência minimizante, alcançando um fator de colapso  $\alpha = 1,07$ . Observa-se que o algoritmo mostra dificuldades para eliminar densidades intermediárias. Estima-se que a inclusão de procedimentos para atualização do parâmetro  $\xi$  parte destas dificuldades possa ser contornada. Percebe-se entretanto que o método proposto foi capaz de produzir uma topologia definida satisfazendo os requerimentos solicitados.

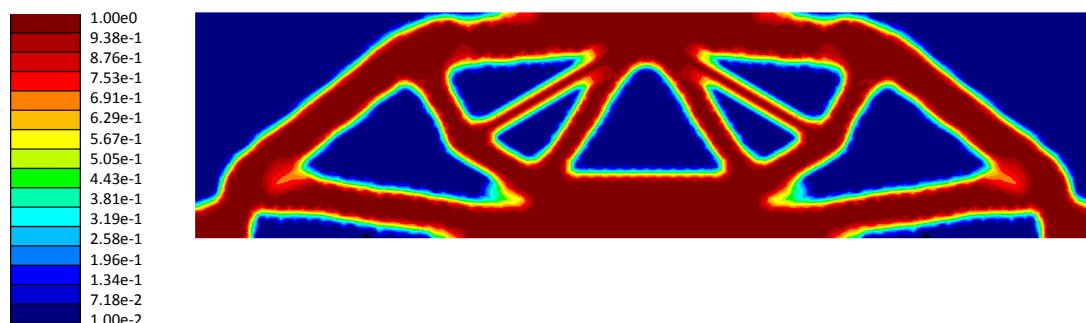


Figura 6: Campo de densidades da topologia final em seu domínio completo

## 8 Conclusão

Foi apresentada uma formulação para a determinação da topologia que maximiza a carga sustentada por uma estrutura considerando esta no estado limite de colapso plástico. Esta formulação baseia-se na extremização da carga de colapso provista pela solução do problema direto conhecido como Análise Limite. Diferentemente da abordagem clássica de plasticidade, onde a determinação da carga última exige um procedimento incremental de cálculo, a proposta de Análise Limite permite sua identificação direta como solução de um problema convexo. Mais ainda, tal estrutura matemática permite que o cálculo da sensibilidade em relação à variável de projeto seja obtido como a solução de um problema linear, ou no caso particular da presente abordagem, de uma simples avaliação matricial, dado que a solução do problema adjunto é idêntico à solução de uma iteração de Newton para atualização das variáveis de Análise Limite.

O controle de topologia foi realizado através do conceito de material intermediário (SIMP) sendo a variável de controle uma distribuição de densidade fictícia. A distribuição ótima de densidade (solução do problema de topologia) foi obtida mediante a abordagem clássica dada pela solução iterativa, elemento a elemento, das condições de otimalidade do problema junto ao uso de filtros para impedir a solução dependente da malha conhecida como *checkerboard*.

Finalmente, foram apresentados dois exemplos numéricos mostrando as potencialidades da abordagem. O primeiro trata da recuperação de uma solução analítica esperada, enquanto o segundo apresenta o problema clássico de uma viga biapoada. Ambos mostram que a técnica é capaz de conduzir os campos de densidade para a representação de estruturas que efetivamente aumentam a carga de colapso para uma quantidade de material disponível. A formulação proposta, no conhecimento dos autores, é inédita na literatura e fornece um método de projeto para amplo grupo de aplicações tecnológicas.

## **Agradecimentos**

Os autores gostariam de agradecer ao "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq" pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

## Referências

- Alberdi, R. & Khandelwal, K., 2017. Topology optimization of pressure dependent elastoplastic energy absorbing structures with material damage constraints. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 133, December 2016 , pp. 42–61.
- Amir, O., 2017. Stress-constrained continuum topology optimization : a new approach based on elasto-plasticity. pp. 1797–1818.
- Bendsøe, M. P. & Kikuchi, N., 1988. Generating optimal topologies in structural design using a homogenisation method. *Computer {M}ethods in {A}ppplied {M}echanics and {E}ngineering*, 71, 2 , 197–224.
- Bendsøe, M. P. & Sigmund, O., 2003. *Topology optimization: theory, methods, and applications*, volume 2nd Editio.
- Borges, L., Zouain, N., & Huespe, A., 1996. Nonlinear optimization procedure for limit analysis. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 15, n. 3 , pp. 487–512.
- Kammoun, Z. & Smaoui, H., 2015. *Direct Methods of Limit and Shakedown Analysis*.
- Komkov, V., Choi, K. K., & Haug, E. J., 1986. *Design sensitivity analysis of structural systems*, volume 177. Academic press.
- Li, L., Zhang, G., & Khandelwal, K., 2017. Design of energy dissipating elastoplastic structures under cyclic loads using topology optimization. pp. 391–412.
- Rockafellar, R. T., 1970. *Convex Analysis*. Princeton University Press.
- Sigmund, O. & Petersson, J., 1998. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16, 1 , 68–75.
- Wallin, M., Jönsson, V., & Wingren, E., 2016. Topology optimization based on finite strain plasticity. pp. 783–793.
- Zhang, G., Li, L., & Khandelwal, K., 2017. Topology optimization of structures with anisotropic plastic materials using enhanced assumed strain elements. pp. 1965–1988.
- Zouain, N., Borges, L., & Silveira, J. L., 2014. Quadratic velocity-linear stress interpolations in limit analysis. , January , 469–491.