



APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS PARA RESOLVER PROBLEMAS ELÁSTICOS SETORIALMENTE HOMOGÊNEOS

Luciano de Oliveira Castro Lara

castrolara@hotmail.com

Departamento de Engenharia Mecânica, DEM/UFES

Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29075 – 910, Vitória, ES – Brasil

Carlos Friedrich Loeffler

carlosloeffler@bol.com.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES

Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29075 – 910, Vitória, ES – Brasil

Webe João Mansur

webe@coc.ufrj.br

LAMEMO/COPPE/UFRJ, Av. Pedro Calmon s/n, Centro de Tecnologia, Ilha do Fundão, 21941-596, Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Abstract. *The Boundary Element Method (BEM) has been distinguished by its good performance in several applications where the field of variables is stationary and the constitutive medium is homogeneous. However, there are a range of problems in applied physics and engineering that are known to be difficult to solve by BEM. Among these are the physically inhomogeneous problems, where physical properties may vary locally or sectorally. For these problems, domain formulations such as Finite Element Methods (FEM), Finite Volumes (FVM) or even Finite Differences (FDM) have considerable advantages. However, even for these cases, it is possible to obtain consistent formulations for the BEM, such as the sub-region technique. In this work, an alternative technique is presented, within the scope of the BEM, to solve sectorial homogeneous elastic problems. This new formulation has already been successfully tested on Laplace's Problems. The goal is extend it to stationary cases of elasticity and to evaluate its applicability in this new class of problems.*

Keywords: *Boundary Element Method, Sectorial Homogeneous Problems, Elastic Problems.*

1 INTRODUÇÃO

Considera-se que entre as aplicações menos adequadas para o Método dos Elementos de Contorno (MEC) está a modelagem de problemas fisicamente não homogêneos, caso muito comum na Mecânica dos Solos. Considerando-se que a heterogeneidade está localizada setorialmente, a utilização da técnica de sub-regiões ainda é a abordagem mais comumente encontrada (Brebbia et al., 1984). Nesta abordagem, cada subdomínio é examinado de modo estanque e, posteriormente, cada parte é acoplada ao domínio completo através das condições de continuidade e equilíbrio. Como o procedimento é baseado em um conceito simples, considerando a partição de domínio, mudanças significativas não foram observadas relativamente a esta técnica ao longo de vários anos (Brebbia e Dominguez, 1992; Wrobel e Aliabadi, 2002). Isto não significa que o procedimento seja eficaz; devido à inserção de fronteiras internas, em certas situações complexas a técnica de sub-regiões é insatisfatória porque se torna menos precisa, dispendiosa e requer uma programação computacional mais elaborada, típica das técnicas de domínio.

Infelizmente, não há outra abordagem eficiente no MEC sobre a solução desta importante classe de problemas; portanto, os métodos de domínio como o Método dos Elementos Finitos (Reddy, 2005; Zienkiewicz et al., 2013) e o Método das diferenças finitas (LeVeque, 2007), são geralmente escolhidos para modelagem e solução desses casos.

Em outros ramos de engenharia, importantes, tais como mecânica da fratura, em que o MEC é mais adequado do que outros métodos discretos tradicionais, restrições semelhantes podem ocorrer. Se matrizes com camadas de materiais secundários estão envolvidas, como nos materiais compósitos, a técnica de sub-regiões deve ser introduzida e o tamanho da matriz final pode ser aumentada significativamente. Neste caso, para preservar as vantagens do MEC, ocasionalmente algumas estratégias são propostas para reduzir o tamanho da matriz final, quando um grande número de elementos precisa ser utilizado (Xiaoping e Wei-Liang, 2005). De qualquer forma, a criação de fronteiras adicionais no interior e a consequente perda de precisão numérica devido à aproximação neles embutida ainda persiste.

Este trabalho apresenta a extensão de uma técnica que mostrou resultados animadores em problemas de potencial escalar (Loeffler e Mansur, 2016) para tratar esta categoria de problemas que, devido à sua simplicidade, pode credenciar o MEC para outras aplicações mais elaboradas sem grandes dificuldades de execução, destacando problemas interessantes, tais como problemas elásticos setorialmente homogêneos e problemas de plasticidade.

Com a técnica proposta, uma vez que o domínio é constituído por homogeneidades setoriais, a modelagem se faz sobrepondo um domínio completo homogêneo com outros subdomínios com propriedades diferentes. Todos os setores estão ligados por meio de coeficientes de influência, que no procedimento MEC são gerados por integrações realizadas em fronteiras dos setores não homogêneas, com os pontos de fonte localizados tanto no domínio completo como no circundante. Particularmente, os princípios de energia apoiam o procedimento proposto, que o tornam ainda mais distinto ao conceito de sub-região.

De certa forma a idéia deste trabalho é apresentada em modelos que consideram ações de domínio localizadas. Loeffler e Mansur (1987) utilizaram esta abordagem para ter em conta as cargas setoriais com a técnica de Dupla Recirpocidade (Partridge et al., 1992). Além disso, a solução de problemas de interação entre o solo e estruturas que empregam o MEF e o MEC

em conjunto (Soares et al., 2004), bem como os casos de integração entre setores compostos por placas flexionadas (Paiva e Venturini, 1988; Paiva e Venturini, 1993) e também a interação placa-viga-pilar (Paiva e Venturini, 1987; Reis et al., 2011) empregam parcialmente a idéia mostrada aqui, nos quais os pontos nodais comuns de sistemas diferentes são montados em uma matriz geral. Vale ressaltar que Wagdy e Rashed (2014) também propuseram uma formulação onde é montada uma matriz de rigidez adicional para equação integral de contorno. Com efeito, os autores ligam diferentes subdomínios (tais como placas com colunas em estruturas), utilizando pontos internos. O procedimento final e os objetivos deles são distintos da abordagem apresentada aqui, uma vez que não foi proposto um modelo matemático para lidar com subdomínios que têm propriedades diferentes. Eles estão em destaque na bibliografia do presente trabalho apenas porque a metodologia aqui apresentada utiliza a idéia de ligação de domínios distintos usando pontos internos.

O objetivo deste trabalho é aplicar a técnica denominada de superposição de domínios para solução dos problemas elásticos lineares setorialmente homogêneos, em duas dimensões, regidos pela Equação do Navier.

2 A TÉCNICA DA SUPERPOSIÇÃO

A Equação de Navier modela matematicamente o problema elástico em termos de deslocamentos, é representada em um sistema 2-D como:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,kj} + b_j = 0, \quad em \ \Omega \quad (1)$$

Para apresentação da Técnica de Superposição (TSBEM) é mais conveniente escrever a equação geral de governo do problema elástico, a conhecida Equação de Navier (Timoshenko e Goodier, 1970), na forma que utiliza as constantes λ e μ , ditas constantes de Lamé (Boresi, 2000), ou seja:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu)u_{i,ij} + b_j = 0 \quad (2)$$

Na Eq. (1), $u_i(X)$ representa o campo de deslocamentos, enquanto o vetor b_j representa possíveis forças de corpo, como o peso próprio, que não são aqui consideradas.

Seguindo a metodologia apresentada por Vera-Tudela (1999) a formulação tradicional do MEC via Teoria das Equações Integrais consiste em ponderar a Eq. (2) por uma função vetorial auxiliar $u_j^*(\zeta; X)$, chamada de solução fundamental, e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, mostrado a seguir, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

A função $u_j^*(\zeta; X)$ é a solução de um problema elástico correlato, cujo domínio é infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas. Assim, também obedece à Equação de Navier:

$$\mu u_{j,ii}^* + (\lambda + \mu)u_{i,ij}^* + b_j^* = 0 \quad (3)$$

Na equação anterior têm-se a força de domínio b_j^* representando uma carga concentrada num dado ponto ζ , ou seja:

$$b_j^* = \Delta(\zeta, X) P_j, \quad P_j = 1 \quad (4)$$

Usualmente o ponto de aplicação da carga concentrada ζ é chamado ponto fonte enquanto X representa o ponto campo. $\Delta(\zeta, X)$ é a função Delta de Dirac, que possui propriedades especiais (Brebbia et al., 1984).

Então, tomando-se a Eq. (2), ponderando-a e integrando-a no domínio, tem-se a expressão seguinte:

$$\mu \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = 0 \quad (5)$$

Doravante, apenas o ponto fonte figurará explicitamente como argumento das funções por simplicidade.

Sem perda de generalidade, para apresentação das particularidades da técnica de superposição considere um domínio constituído por duas regiões com diferentes propriedades físicas, conforme mostrado na Fig. 1.

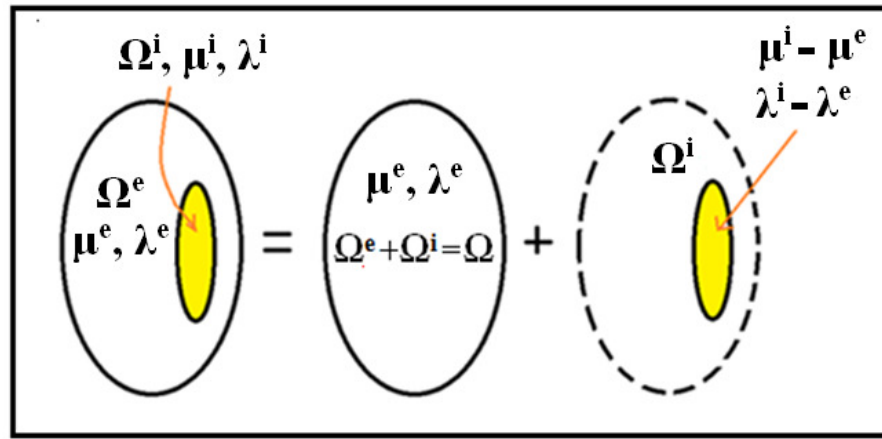


Figura 1: Domínios completos e setoriais com propriedades homogêneas

Na Fig. 1, o domínio completo $\Omega(X)$ é composto pela soma de Ω^e e Ω^i ; tanto λ^e , λ^i , μ^e e μ^i são propriedades admitidas constantes dentro de cada sub-domínio. Nesta formulação, ao contrário do que é feito em sub-regiões, um domínio completo ou circundante é eleito; como é mostrado acima, com propriedades homogêneas.

Considere-se que o núcleo das integrais é composta por funções integráveis. Supondo que $\lambda^i = \lambda^e + \lambda^*$ e $\mu^i = \mu^e + \mu^*$, as equações seguintes podem ser escritas:

$$\begin{aligned}
 & \mu \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = \\
 & \mu^e \int_{\Omega^e} u_{j,ii}^e u_j^* d\Omega^e + (\lambda^e + \mu^e) \int_{\Omega^e} u_{i,ij}^e u_j^* d\Omega^e + \mu^i \int_{\Omega^i} u_{j,ii}^i u_j^* d\Omega^i + (\lambda^i + \mu^i) \int_{\Omega^i} u_{i,ij}^i u_j^* d\Omega^i = \\
 & \mu^e \int_{\Omega^e} u_{j,ii}^e u_j^* d\Omega^e + (\lambda^e + \mu^e) \int_{\Omega^e} u_{i,ij}^e u_j^* d\Omega^e + (\mu^e + \mu^*) \int_{\Omega^i} u_{j,ii}^i u_j^* d\Omega^i + \\
 & + (\lambda^e + \lambda^* + \mu^e + \mu^*) \int_{\Omega^i} u_{i,ij}^i u_j^* d\Omega^i = \\
 & \mu^e \int_{\Omega^e} u_{j,ii}^e u_j^* d\Omega^e + (\lambda^e + \mu^e) \int_{\Omega^e} u_{i,ij}^e u_j^* d\Omega^e + \mu^e \int_{\Omega^i} u_{j,ii}^i u_j^* d\Omega^i + \mu^* \int_{\Omega^i} u_{j,ii}^i u_j^* d\Omega^i + \\
 & + (\lambda^e + \mu^e) \int_{\Omega^i} u_{i,ij}^i u_j^* d\Omega^i + (\lambda^* + \mu^*) \int_{\Omega^i} u_{i,ij}^i u_j^* d\Omega^i = \\
 & \mu^e \int_{\Omega^e} u_{j,ii}^e u_j^* d\Omega^e + (\lambda^e + \mu^e) \int_{\Omega^e} u_{i,ij}^e u_j^* d\Omega^e + \mu^* \int_{\Omega^i} u_{j,ii}^i u_j^* d\Omega^i + (\lambda^* + \mu^*) \int_{\Omega^i} u_{i,ij}^i u_j^* d\Omega^i = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

No procedimento efetuado a seguir fazem-se as operações clássicas de integração por partes e aplicação do Teorema da Divergência, expressando algumas integrais em termos do contorno $\Gamma(X)$ do problema. Desenvolvendo, então, o núcleo que aparece na primeira parcela da última igualdade dada na Eq. (6) tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{j,i} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_j u_{j,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{j,ii}^*) d\Omega \tag{7}$$

O mesmo pode ser feito para a terceira parcela, dada em termos de Ω^i . De modo análogo, desenvolve-se o núcleo da segunda parcela da última igualdade dada na Eq. (6):

$$\int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{i,j} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_i u_{j,ji}^*) d\Omega \tag{8}$$

Esta mesma transformação se aplica a quarta parcela, em termos de Ω^i .

Sabe-se que trocando os índices apenas da última parcela da Eq. (8) não haverá mudanças no resultado final destas equações. Assim fazendo, substituindo a Eq. (7) e (8) na Eq. (6), apenas na primeira e segunda parcela, e rearranjando:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [\mu^e (u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda^e + \mu^e) (u_{j,i} u_{ij}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu^e (u_{j,i} u_j^* n_i - u_j u_{j,i}^* n_i)] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma} [(\lambda^e + \mu^e) (u_{i,j} u_j^* n_j - u_i u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{9}$$

A Eq. (3) apresenta u_j^* como solução fundamental, de modo que:

$$\int_{\Omega} [\mu^e (u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda^e + \mu^e) (u_{j,i} u_{ij}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta(\zeta; x) P_j u_j d\Omega = -P_j u_j(\zeta; x) \tag{10}$$

Assim, substituindo a Eq. (10) na Eq. (9) e procedendo-se ao reagrupamento de termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} & -P_j u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu^e(u_{j,i}^*, u_j n_i) + \lambda^e(u_{j,j}^*, u_i n_i)] d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma} \mu^e(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

Nesta última expressão também foi utilizada a equação de equilíbrio no contorno em termos das constantes de Lamé, dada por:

$$\mu^e(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda^e u_{k,k} n_i = p_i \quad (12)$$

Trocando-se a ordem dos índices da primeira parcela da segunda integral do lado direito, introduzindo-se uma nova identidade auxiliar e reagrupando a expressão, chega-se a:

$$\begin{aligned} & -P_j u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu^e(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda^e(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma} \mu^e(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i - u_{j,i}^* u_i n_j) d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

Simples manipulações com a notação indicial mostram que a última integral de contorno na equação (13) é nula. Já a segunda integral da Eq. (13) tem a mesma estrutura da Eq. (12), de tal forma que será substituída por p_i^* . Assim:

$$\int_{\Gamma} [\mu^e(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda^e(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad (14)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (14) na Eq. (13) tem-se, então, a expressão da Equação Integral de Contorno, apenas para a primeira e segunda parcela da Eq. (6):

$$\mu^e \left[-P_j u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma \right] \quad (15)$$

Uma expressão similar a esta seria obtida em termos das propriedades do contorno interno λ^* e μ^* , ou seja:

$$\mu^* \left[-P_j u_j^i(\zeta) + \int_{\Gamma^i} p_j^i u_j^* d\Gamma^i - \int_{\Gamma^i} p_j^* u_j^i d\Gamma^i \right] \quad (16)$$

Por necessidades operacionais, uma estrutura diádica precisa ser adotada para a solução fundamental e sua derivada normal. Dessa forma u_{ij}^* e p_{ij}^* passam a representar deslocamentos e forças de superfície na direção j no ponto X , resultado de uma carga unitária agindo na direção i e aplicada no ponto ζ . Um coeficiente diádico C_{ij} é introduzido em função do posicionamento do ponto fonte se situar dentro do domínio, fora dele ou exatamente sobre o contorno. Desse modo, a Eq. (15) transforma-se em:

$$\mu^e \left[-C_{ij}(\zeta) u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) \right] \quad (17)$$

Onde as expressões de u_{ij}^* e p_{ij}^* são as soluções fundamentais de Kelvin para problemas bidimensionais, apresentadas por Brebbia et al., (1984):

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (18)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,j} r_{,i}) - (1-2\nu)(r_{,i} r_{,j} - r_{,j} r_{,i}) \right] \quad (19)$$

Com relação ao contorno interno, a expressão integral seria dada por:

$$\mu^* \left[-C_{ij}^i(\zeta) u_j^i(\zeta) + \int_{\Gamma^i} p_j^i(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma^i(x) - \int_{\Gamma^i} u_j^i(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma^i(x) \right] \quad (20)$$

A expressão integral completa ficaria na forma:

$$\begin{aligned} & \mu^e \left[-C_{ij}^i(\zeta) u_j^i(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j^i(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_j^i(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) \right] + \\ & + \mu^* \left[-C_{ij}^i(\zeta) u_j^i(\zeta) + \int_{\Gamma^i} p_j^i(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma^i(x) - \int_{\Gamma^i} u_j^i(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma^i(x) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Contudo, a contribuição em termos de energia do setor interno pode ser computada apenas pela energia elástica, dada em termos dos valores de deslocamento u_j^i em pontos fontes internos, conforme justificado em trabalhos anteriores (Loeffler e Mansur, 2016). Assim, a Eq. (21) pode ser simplificada de modo que:

$$\begin{aligned} & \left[-C_{ij}^i(\zeta) u_j^i(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j^i(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_j^i(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) \right] = \\ & + \frac{\mu^*}{\mu^e} \left[- \int_{\Gamma^i} u_j^i(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma^i(x) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Dois exemplos simples são resolvidos a seguir pela técnica proposta, visando mostrar a consistência de seu modelo matemático. Os exemplos simulados têm geometria regular e o carregamento é aplicado uniformemente, na ausência de ações de domínio. Foram considerados apenas dois setores com propriedades físicas distintas. Para validação dos resultados obtidos por meio da técnica de superposição, no primeiro exemplo foi feita a comparação com os resultados colhidos por meio da solução analítica; no segundo exemplo, foram considerados os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

4.1 Primeiro Exemplo

A primeira simulação apresenta um domínio com dois setores com propriedades distintas. A geometria do problema, assim como as condições de contorno e os valores das propriedades de cada setor são mostrados conforme Fig. 2.

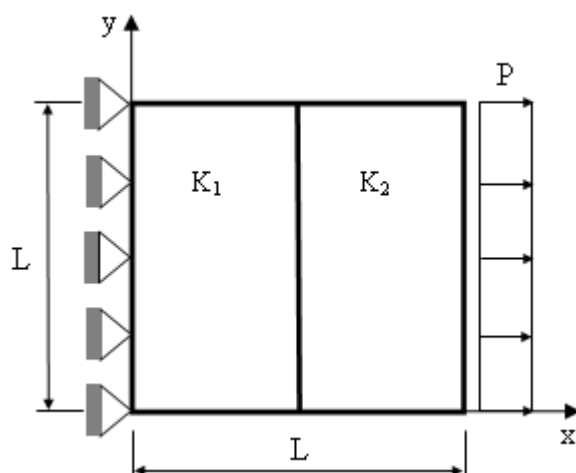


Figure 2: Características geométricas e condições de contorno para o primeiro exemplo.

O primeiro exemplo escolhido para ilustrar o desempenho da técnica consiste em analisar um sólido em forma de quadrado composto por dois setores, representado na Fig. 2. A análise foi realizada adotando o comprimento do lado do quadrado L igual a uma unidade e a tração aplicada P também igual a uma unidade.

Os resultados foram comparados com os valores analíticos para esta geometria, ao longo de uma linha do domínio em $y=1$ para $K_1=1$ e $K_2=2$, os valores comparados são mostrados na Fig. 3.

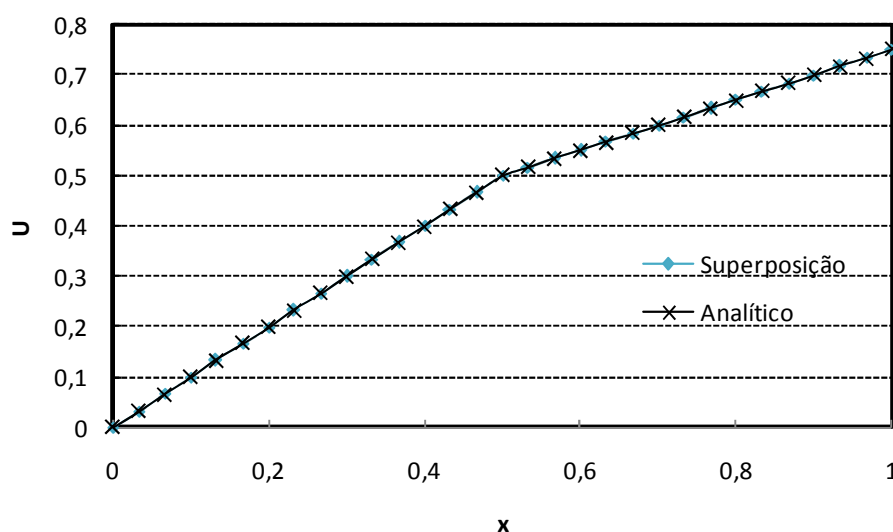


Figure 3: Comparação entre deslocamentos, obtido analiticamente e pelo MEC (Superposição) para 150 elementos.

Como esperado, a extensão da técnica de superposição para problemas elásticos setorialmente homogêneos mostra resultados animadores.

Uma excelente concordância foi alcançada entre a técnica de superposição e resultados obtidos analiticamente. A malha com 150 elementos lineares é mais que suficiente para obtenção de resultados precisos, conforme mostrado na Fig. 3.

4.2 Segundo Exemplo

Neste exemplo, escolhido para ilustrar o desempenho da técnica de superposição de domínios, utilizou-se uma configuração geométrica com duas regiões com propriedades distintas, uma imersa na outra. A Fig. 4, a seguir, mostra a geometria simulada com as condições de contorno utilizadas.

Este exemplo consiste em analisar um sólido em forma de quadrado com uma pequena inclusão quadrada, representado na Fig. 4. Assim como no primeiro exemplo, a análise foi realizada adotando o comprimento do lado do quadrado L igual a uma unidade e a tração aplicada P também igual a uma unidade.

Dois casos foram escolhidos para se avaliar o desempenho da técnica de superposição de domínios. No primeiro caso são avaliados os deslocamentos obtidos ao longo de uma linha do domínio em $x=0,75$ para $K_1=1$ e $K_2=10$, ao longo da interface entre as duas regiões. No segundo caso são avaliados os deslocamentos obtidos ao longo de uma linha do domínio em $x=0,75$ para $K_1=1$ e $K_2=100$, também ao longo da interface entre as duas regiões.

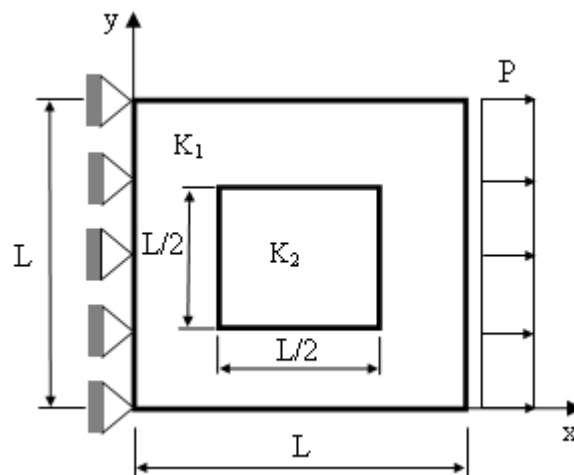


Figure 4: Características geométricas e condições de contorno para o segundo exemplo.

Os resultados, para o primeiro e segundo caso, os obtidos ao longo de uma linha do domínio em $x=0,75$, com K_2 igual a 10 e 100 respectivamente, são mostrados na Fig. 5.

A solução de referência para esses casos é dada pelo Método dos Elementos Finitos. A solução de referência utilizada foi obtida por simulações realizadas através do Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando uma malha estruturada com 6400 elementos (Leite e Venturini, 2005).

Assim como no exemplo anterior, os resultados são animadores. Uma boa concordância foi alcançada entre a técnica de superposição e resultados obtidos pelo MEF. A malha com 200 elementos lineares é mais que suficiente, para obtenção de resultados satisfatórios, conforme mostrado na Fig. 5.

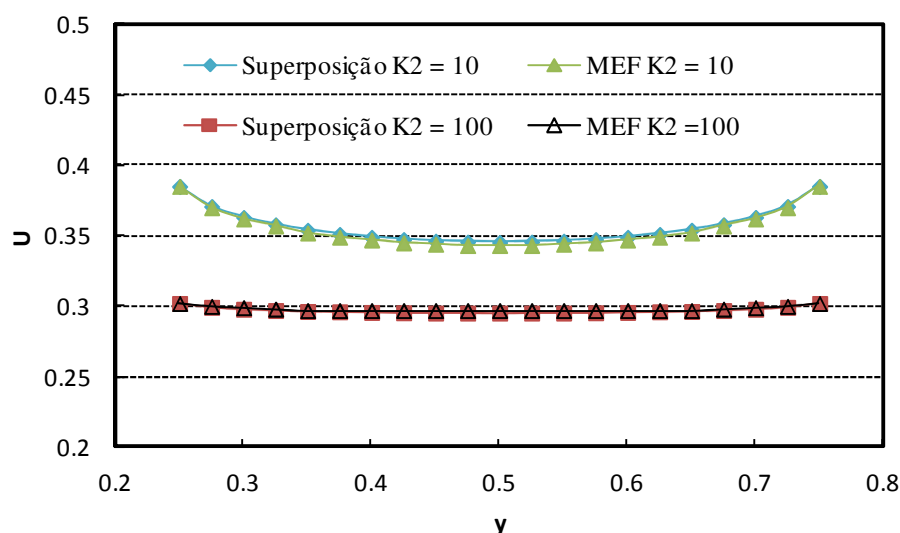


Figure 5: Comparação entre deslocamentos, obtido pelo MEF e pelo MEC (Superposição) para 200 elementos.

Uma malha maior que os 200 elementos lineares utilizados não foi implementada, visto que o objetivo deste trabalho, conforme foi destacado, não é abordar a precisão do método, e sim avaliá-lo quanto a possibilidade de aplicação em casos estacionários da elasticidade.

4 CONCLUSÕES

Embora apenas dois exemplos simples tenham sido apresentados, os resultados auferidos da simulação foram satisfatórios, mostrando que o procedimento proposto se apresenta como uma alternativa importante à técnica padrão de sub-regiões, no contexto do método do elemento de contorno. Este desempenho confirmou que os princípios basilares da técnica da superposição, avaliados com rigor e maior diversidade de exemplos na classe dos problemas de potencial escalar, pode ser estendido aos problemas elásticos como preconizado por Loeffler e Mansur (2016). Não obstante a necessidade de uma maior gama de testes ainda no contexto dos problemas elásticos estacionários é possível cogitar que esta técnica possa ser estendida com êxito à solução de problemas elastoplásticos e da Mecânica da Fratura. Isto porque nestes casos a técnica de sub-regiões não tem mostrado a necessária adequação, pois que muitas aplicações do MEC nesta linha acabam por utilizar as integrações por células. O potencial promissor da técnica também se alarga rumo a outros casos especiais da mecânica de grande importância, que lidam com problemas setorialmente homogêneos como a análise sísmica.

Deve-se ressaltar que além de uma boa precisão, a técnica da superposição mostra uma enorme vantagem em termos de trabalho de programação computacional e formatação da entrada de dados. Para implementação do modelo é necessário apenas criar novas matrizes similares à matriz clássica H , referentes à energia elástica contida nos setores internos.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa foi apoiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - *CNPq* (Brasil).

REFERÊNCIAS

- Boresi, A. P., 2000. *Elasticity in engineering mechanics*. 2nd ed ed. New York: Wiley.
- Brebbia, C. A., Dominguez, J., 1992. *Boundary Elements – An Introductory Course*, WIT Press.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C., 1984. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin.
- Leite, L. G. S., Venturini, W. S., 2005. Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft thin inclusions. *Analysis with Boundary Elements*, v. 29, pp. 257–267.
- LeVeque R., 2007. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*, SIAM, Philadelphia.
- Loeffler, C. F., Mansur, W. J., 1987. Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems, in: C.A. Brebbia (Ed.), *Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer*, Computational Mechanics Publishing, UK, pp. 105-124.
- Loeffler, C. F., Mansur, W. J., 2016. Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. vol. 71, p.169-173.
- Paiva, J. B., Venturini, W. S., 1993. Alternative boundary element approach to compute efforts along zoned domain interfaces. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, v. 12, pp. 143-148.
- Paiva, J. B., Venturini, W.S., 1987. Analysis of building structures considering plat-beam-column interactions, in *Boundary Element Technique: application in stress Analysis and Heat Transfer*, ed. C.A Brebbia & W.S. Venturini, CML Publisher.
- Paiva, J. B., Venturini, W.S., 1988. Plate Bending analysis by the boundary element method considering zoned thickness domain, *Soft. Eng. Workstations*, v. 4, 183-185.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., & Wrobel, L. C., 1992. *The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London.
- Reddy, J., 2005. *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York.
- Reis, A., Albuquerque, E. L., Torsani, L., Palermo Jr., L., Sollero, P., 2011. Computation of moments and stresses in laminated composite plates by the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 35, p. 105-113.
- Soares, D., Von Estorff, O., Mansur, W.J., 2004. Iterative coupling of BEM and FEM for nonlinear dynamic analyses. *Computational Mechanics*, 34, v. 1, p. 67-73.
- Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., 1970. *Theory of elasticity*. 3. ed. New York: McGraw-Hill.

- Vera-Tudela, C. A. R., 1999. *Elastodinâmica Bidimensional através do Método dos Elementos de Contorno com dupla reciprocidade*. Tese M.Sc., Vitoria: Universidade Federal do Espírito Santo.
- Wagdy, M., Rashed, Y. F., 2014. Boundary Element analysis of multi-thickness shear-deformable slabs without sub-regions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 43, p. 86–94.
- Wrobel, L. C., Aliabadi, M. H., 2002. *The Boundary Element Method*, Wiley, Chichester.
- Xiaoping, L., Wei-Liang W., 2005. A new sub-region Boundary Element Technique based on the Domain Decomposition Method. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, v. 29, pp. 944–952.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., Zhu, J. Z., 2013. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 7th Ed.