



UM ELEMENTO FINITO DE INTERFACE PARA SIMULAR A CONEXÃO DEFORMÁVEL ENTRE ELEMENTOS PLANOS DE CASCA

Luís Eduardo S. D.

luis_civil12@yahoo.com.br

Amilton R. da S.

amilton@em.ufop.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo: *Nesse estudo é desenvolvido um elemento finito bidimensional de interface capaz de associar elementos planos de casca posicionados um sobre o outro. O elemento de interface implementado tem a função de simular fisicamente o contato entre os elementos planos de casca e conectar as superfícies de referência dos elementos planos de casca acima e abaixo dele. Por exemplo, nas análises de lajes de concreto ligadas a vigas de aço com conexão deformável sendo a laje e a viga de aço discretizadas por elementos planos de casca a interface de contato pode ser simulada por esse elemento de interface desenvolvido aqui. Os elementos finitos planos de casca e de interface bidimensional devem ter graus de liberdade compatíveis para que possam ser utilizados juntos, já que os elementos finitos de interface não podem ser utilizados de maneira isolada para representar o comportamento mecânico real de alguma estrutura. Nesse estudo foi utilizado o elemento de casca com nove nós e o elemento bidimensional de interface de dezoito nós, ambos com cinco graus de liberdade por nó (a nível local). Para a validação dos elementos implementados foram utilizados resultados obtidos de modelos numéricos e experimentais da literatura, de soluções analíticas e de softwares comerciais.*

Palavra-chave: Elemento plano de casca, Conexão deformável, Elementos bidimensionais de interface

1 INTRODUÇÃO

A utilização de métodos numéricos para descrever problemas físicos tem sido uma ferramenta cada vez mais recorrente entre os pesquisadores. Um dos motivos é o grande desenvolvimento dos computadores tornando a solução de um problema matemático cada vez mais rápido e eficiente. Outro motivo está associado à praticidade em se trabalhar com as análises numéricas baseadas em algoritmos, uma vez que a solução dos problemas segue uma sequência de cálculo e uma rotina de resolução.

Um dos métodos mais utilizados na resolução dos modelos matemáticos que descrevem os problemas físicos é o método dos elementos finitos (MEF). O método teve sua origem na análise estrutural transformando a solução do problema de equações diferenciais em um problema matricial. Dessa forma os elementos finitos unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais representam de maneira adequada o comportamento dos elementos estruturais lineares, planos ou sólidos quando submetidos a algum carregamento.

A aplicação do MEF independe do material, podendo ser utilizado, por exemplo, em estruturas de aço, concreto, madeira ou elementos mistos de aço concreto. As estruturas mistas de aço e concreto vêm sendo bastante utilizadas na construção civil desde a década de 60, já que são exploradas as principais características mecânicas de cada material, tanto em termos estruturais quanto construtivos.

Elementos estruturais mistos de aço e concreto como, por exemplo, os pisos mistos, vigas mistas e pilares mistos, possuem uma interface de conexão deformável entre os diferentes materiais. Dentre esses, os pisos formados por uma laje de concreto armado ligada por conectores mecânicos a vigas de aço é o mais comum. As normas de dimensionamento utilizam modelos simplificados para representação desse elemento o que pode levar a resultados espúrios. Uma forma de representar melhor o comportamento mecânico desse elemento estrutural é modelar a laje de concreto e as vigas de aço por elementos planos de casca e a conexão deformável por elementos de interface bidimensional.

Um efeito comumente encontrado na análise de vigas mistas e que pode levar erros significativos, quando são usados elementos finitos unidimensionais de viga para representação da laje de concreto, é o *shear lag*. O efeito *shear lag* consiste em uma variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto da viga mista. Esse efeito é mais relevante quanto maior for a largura da laje não podendo ser capturado pelos elementos unidimensionais. Dessa forma Silva (2010) cita que mesmo em vigas mistas isoladas o uso do elemento de casca/placa para simular a laje de concreto evita o efeito *shear lag* gerando assim resultados mais confiáveis do que os obtidos através de elementos unidimensionais de viga.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Elementos de Casca/Placa

Segundo Batoz et. al. (2000), a utilização de elementos de casca usando o método dos elementos finitos em uma análise estrutural começou com uma série de elementos planos de casca tentando aproximar a forma verdadeira da casca. Foi levada em consideração a rigidez da membrana e da flexão sendo estas sobrepostas ao nível do elemento. Devido à facilidade da formulação, da eficiência computacional e da possibilidade de aplicações (cascas e

estruturas de placas dobradas) que o elemento permite, elementos planos de casca são usados em diversas análises na prática.

Segundo Hughes (1987) existe duas teorias clássicas que descrevem o comportamento de cascas/placas finas e grossas, sendo a teoria de Kirchhoff e de Reissner/Mindlin respectivamente. O ponto crucial que difere uma teoria da outra é a consideração da deformação por cisalhamento na teoria de Reissner/Mindlin. Devido a essa diferença nas teorias percebe-se uma preferência maior por parte dos autores em trabalhar com os elementos de casca, no estudo de cascas espessas, considerando a formulação baseada na teoria de Reissner/Mindlin, já que os resultados se mostraram mais interessantes quando comparados aos elementos planos da teoria clássica de Kirchhoff.

A utilização da teoria de Reissner/Mindlin pode levar a problemas de locking (em uma tradução livre seria travamento, podendo ser: resultados numéricos espúrios que podem ocorrer quando os polinômios interpoladores não se casam). Um dos problemas comumente encontrados quando se utiliza a teoria de Reissner/Mindlin na avaliação de cascas finas é o *shear locking*, que surge devido o efeito da deformação por cortante ser muito pequeno. Para contornar o problema, a solução mais simples é o refinamento da malha, ou seja, o aumento do número de elementos utilizados.

Na literatura existem inúmeros trabalhos envolvendo a utilização de elementos de cascas como o de Silva (2010), Dias (2016), Ko et al. (2017), Nie et al. (2008), entre outros. Algumas abordagens são relevantes, como no trabalho de Ko et al. (2017) em que os autores desenvolveram um elemento de casca de quatro nós considerando os efeitos de membrana e do cisalhamento. Ressalta-se no artigo proposto pelos autores que os efeitos de travamento, por membrana e por cisalhamento, são contornados pela abordagem MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) e a eficácia de uma formulação baseada no Lagrangiano total utilizando o tensor de deformação de Green-Lagrange, porém para grandes deslocamentos.

Uma das aplicações práticas mais comuns de elementos planos de casca é em elementos estruturais mistos, mais precisamente em vigas mistas e pisos mistos. Apesar da grande utilização na construção civil não existem na literatura muitos estudos numéricos e experimentais referentes aos pisos mistos, dessa forma outro trabalho muito relevante nessa linha de pesquisa é o de Nie et. al. (2008). Nesse trabalho o autor realiza um estudo numérico e experimental de uma laje de concreto armada ligada a vigas de aço através de uma conexão deformável. Uma das grandes contribuições do estudo é a nova definição de largura efetiva proposta pelos autores, usando uma distribuição de tensão retangular para determinação da resistência final de vigas mistas submetidas a um momento de flexão.

Izzuddin et. al. (2004) também utilizaram a teoria de Reissner/Mindlin para desenvolver um elemento plano de casca, porém aqui aplicado a lajes mistas. As lajes mistas são constituídas por chapas de aço dobradas a frio e envolvidas pelo concreto, além de uma armadura superior. A formulação apresenta particularidades que torna o elemento de capaz de simular a geometria ortotrópica e a descontinuidade do material entre as nervuras adjacentes.

2.2 Elementos de Interface

A utilização de elementos de interface teve como objetivo inicial representar uma fina camada de material ou o contato entre dois materiais distintos, sempre trabalhando em conjunto com elementos bi e tridimensionais. Dentre os diversos trabalhos encontrados na literatura o precursor em trabalhar com elementos de interface foi Goodman et. al. (1968). Os

autores propõem nesse trabalho um elemento de interface capaz de simular o deslizamento e a separação entre dois corpos em contato.

Kalikin e Li (1995) utilizaram elementos bidimensionais de interface para descrever o comportamento de materiais distintos, no caso o solo e a sapata de fundação, a fim de modelar o problema de contato existente entre o solo e a estrutura. Já Carol et. al. (2001) utilizaram o elemento de interface para analisar o processo de fissuração em elementos de concreto.

Uma das aplicações mais frequentes encontradas na literatura utilizando os elementos de interface é no estudo de vigas mistas considerando a conexão deformável entre os elementos que compõem a seção transversal. As pesquisas envolvendo o estudo de vigas mistas com interação parcial entre os elementos começou com Newmark et al. (1951) utilizando soluções analíticas com base na teoria de Euler-Bernoulli para casos particulares de vigas mistas. Desde então existe um série de pesquisas envolvendo os diversos parâmetros e as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko em conjunto com elementos de interface no desenvolvimento de novas formulações e elementos que sejam capazes de descrever o comportamento das vigas mistas.

No trabalho de Silva (2006) e Sousa e Silva (2007) o elemento de interface implementado é associado a elementos unidimensionais de viga considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, a não linearidade física dos materiais e a possibilidade de seções transversais genéricas. Nesse trabalho o elemento de interface desenvolvido é capaz de simular o deslizamento longitudinal e separação vertical na interface de contato entre os elementos da seção mista.

Sousa e Silva (2009) desenvolveram uma série de elementos de interface que podem ser associados a elementos unidimensionais de viga para a análise numérica de vigas mistas levando em consideração o deslizamento longitudinal entre os elementos. Os elementos de interface implementados apresentam uma versatilidade muito grande, já que podem atuar em conjunto com a teoria de viga de Euler-Bernoulli, teoria de viga de Timoshenko, além de trabalhar como elementos com quantidades diferentes de nós e diferentes processos de integração dos deslocamentos ao longo do elemento.

Sousa e Silva (2010) promoveram um avanço no estudo de estruturas mistas com múltiplas camadas e com conexão deformável entre os elementos, apresentando uma solução analítica para vigas mistas com múltiplas camadas. O estudo permite determinar a capacidade última de vigas com múltiplas camadas e verificar a capacidade do elemento de interface em simular problemas com mais de um plano de deslizamento.

3 FORMULAÇÃO

Na Fig. 1 é mostrada a modelagem de um piso misto formado por duas vigas de aço conectadas a laje de concreto. Na discretização da viga de aço e da laje de concreto são utilizados elementos planos de casca e a conexão entre eles é feita através de elementos de interface bidimensional que são capazes de simular uma possível conexão deformável entre os elementos.

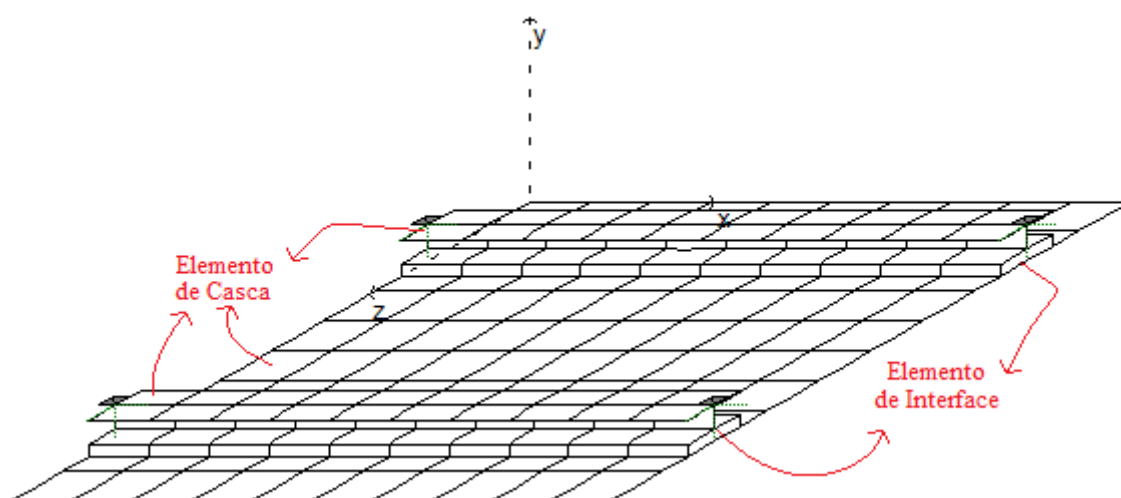


Figura 1 Piso Misto discretizado por elementos planos de casca e de interface

3.1 Elemento plano de Casca

O elemento plano de casca implementado nesse trabalho é o elemento retangular de nove nós com cinco graus de liberdade por nó como mostrado na Fig. 2. Considerando as hipóteses cinemáticas da teoria de placa de Reissner/Mindlin obtêm-se as Eqs. (1) a (3) para os deslocamentos.

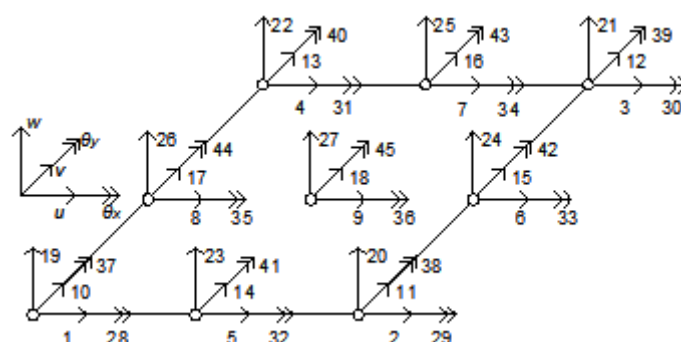


Figura 1 Elemento de casca de nove nós

Nas Equações (1) a (3), os deslocamentos de translação da superfície média (ou uma superfície de referência qualquer) do elemento plano de casca nas direções x , y e z são representados por u^0 , v^0 e w^0 . θ_x e θ_y representam as rotações das seções em relação aos eixos x e y . z representa o ponto ao longo da espessura do elemento em relação à superfície média em que se deseja avaliar os deslocamentos. Para facilitar a notação, o subscrito zero será omitido nas equações seguintes.

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z\theta_x(x, y) \quad (2)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x, y) \quad (3)$$

Na definição das equações de deformações do elemento plano de casca foi usado o tensor de deformação de Green-Lagrange considerando a hipótese de Von Karman, que implica que as derivadas de u e v em relação à x , y e z são pequenas, podendo ser desprezadas, e desprezando também a variação de w com z . A partir do princípio dos trabalhos virtuais aplicado ao elemento plano de casca deformável, tem-se a Eq. (4) para o trabalho virtual interno.

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V [(\delta u_{,x} + z\delta\theta_{y,x})\sigma_x + (\delta v_{,y} - z\delta\theta_{x,y})\sigma_y + (\delta u_{,y} + z\delta\theta_{y,y} + \delta v_{,x} - z\delta\theta_{x,x})\tau_{xy} + (\delta\theta_y + \delta w_{,x})\tau_{xz} + (\delta w_{,y} - \delta\theta_x)\tau_{yz}]dV \quad (4)$$

Como os variacionais dos deslocamentos variam apenas em relação à largura e comprimento, sendo constantes em relação à espessura do elemento plano de casca e definindo os esforços N_x , N_y , M_y , M_x , como mostrado nas Eqs. (5) a (8), e $N_{xy} = \int_h \tau_{xy} dz$, $Q_{xz} = k \int_h \tau_{xz} dz$, $Q_{yz} = k \int_h \tau_{yz} dz$ e $M_{xy} = \int_h z \tau_{xy} dz$, chega-se a Eq. (9) para o trabalho virtual interno do elemento plano de casca.

$$N_x = \int_h \sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i)) \quad (5)$$

$$N_y = \int_h \sigma_y^c dz + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (\sigma_y^s(z_i) - \sigma_y^c(z_i)) \quad (6)$$

$$M_y = \int_h z \sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} z_i (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i)) \quad (7)$$

$$M_x = \int_h z \sigma_y^c dz + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} z_i (\sigma_y^s(z_i) - \sigma_y^c(z_i)) \quad (8)$$

Como existe a possibilidade da laje de concreto ser reforçada, influenciando diretamente na resistência do elemento, nas Eqs. (5) a (8) é considerado a contribuição das barras de reforço nas expressões dos esforços internos. Para isso é feito o somatório do número de camadas de barras na seção (nx ou ny , dependendo da direção) levando em conta a área da barra (A_{xi}) disposta na direção x e distribuída com um espaçamento (S_{xi}) ao longo da direção y , o mesmo acontecendo para as barras dispostas na direção y . $\sigma_x^s(z_i)$ e $\sigma_y^s(z_i)$ são, respectivamente, as tensões no aço e no concreto no centro da camada de barras dispostas na direção x .

$$\delta W_{\text{int}} = \iint_A (\delta u_{,x} N_x + \delta\theta_{y,x} M_y + \delta v_{,y} N_y - \delta\theta_{x,y} M_x + \delta u_{,y} N_{xy} + \delta\theta_{y,y} M_{xy} + \delta v_{,x} N_{xy} - \delta\theta_{x,x} M_{xy} + \delta\theta_y Q_{xz} + \delta w_{,x} Q_{xz} - \delta\theta_x Q_{yz} + \delta w_{,y} Q_{yz}) dA \quad (9)$$

Para o desenvolvimento da formulação foi utilizando o método dos elementos finitos baseado em deslocamentos, dessa forma as equações dos deslocamentos são aproximadas por

funções de forma associadas aos deslocamentos nodais, Eq. (10). Para evitar alguns problemas de travamento as rotações e translações são interpoladas independentemente e adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos em relação às coordenadas paramétricas ξ e η , essas funções são representadas pelo vetor coluna Φ de nove termos.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & sim & & \Phi^T & \mathbf{O}^T \\ & & & & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (10)$$

Na Eq. (10), $\mathbf{q}$ é um vetor coluna com seus termos dados por quarenta e cinco deslocamentos nodais e $\mathbf{O}$ é um vetor coluna nulo com nove elementos. Sendo os deslocamentos u , v , w , θ_x e θ_y funções dos deslocamentos nodais, os seus variacionais podem ser escritos a partir da expressão $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$, onde a deve ser substituído por u , v , w , θ_x e θ_y . Substituindo esses variacionais na Eq. (9) e igualando trabalho virtual interno com trabalho virtual externo dado por $\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{ext}$, chega-se a expressão $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0$, onde $\mathbf{f}_{int}$ é o vetor de forças internas dado pela Eq. (11).

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ Q_{xz} \Phi_{,x} + Q_{yz} \Phi_{,y} \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} - Q_{yz} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + Q_{xz} \Phi \end{bmatrix} dA \quad (11)$$

Utilizando o método de Newton-Rapshon na solução do problema $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0$ é necessária a determinação da derivada dessa expressão em relação aos deslocamentos nodais, obtendo assim a matriz de rigidez tangente. Sendo $\mathbf{f}_{ext}$ constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente é dada por $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{q}}$.

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (12)$$

As Eqs. (13) e (14) fornecem o esforço axial e sua derivada em relação aos deslocamentos nodais. Os outros esforços e suas derivadas são obtidos de forma análoga. Na definição dessas equações foi considerada superfície de referência tomada na superfície média do elemento plano de casca.

$$N_x = \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} \Phi_{,x} (\lambda + 2G)h \\ \Phi_{,y} \lambda h \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z_i \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} (\lambda + 2G)h \\ \Phi_{,y} \lambda h \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z_i \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

3.2 Elemento de Interface bidimensional

Nessa seção é apresentada a formulação do elemento de interface bidimensional de dezoito nós responsável por simular a conexão deformável e fazer a ligação entre elementos planos de cascas paralelos de nove nós conforme mostrado na Fig. 3.

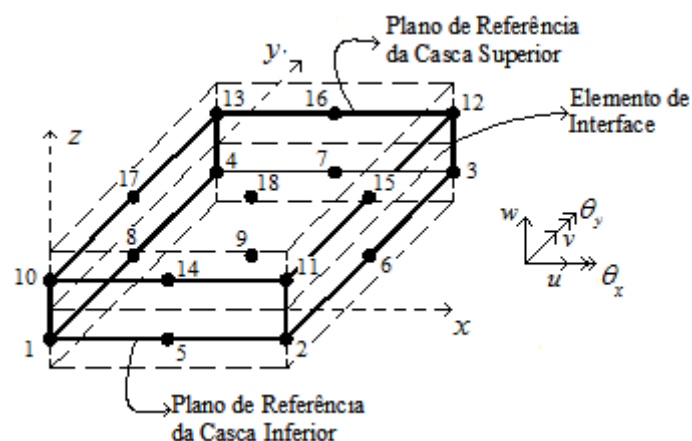


Figura 3 Elemento bidimensional de interface associado aos elementos e casca.

Assim como o elemento de casca, o elemento de interface implementado apresenta a nível local 5 graus de liberdade por nó. No entanto, a possibilidade de simulação de estruturas formadas por planos não colineares exige que o sexto grau de liberdade seja inserido para montagem da matriz de rigidez global do problema, tanto para o elemento de interface quanto para o elemento plano de casca. Na Fig. 4 é mostrada a sequência dos graus de liberdade para a formação do vetor dos deslocamentos nodais.

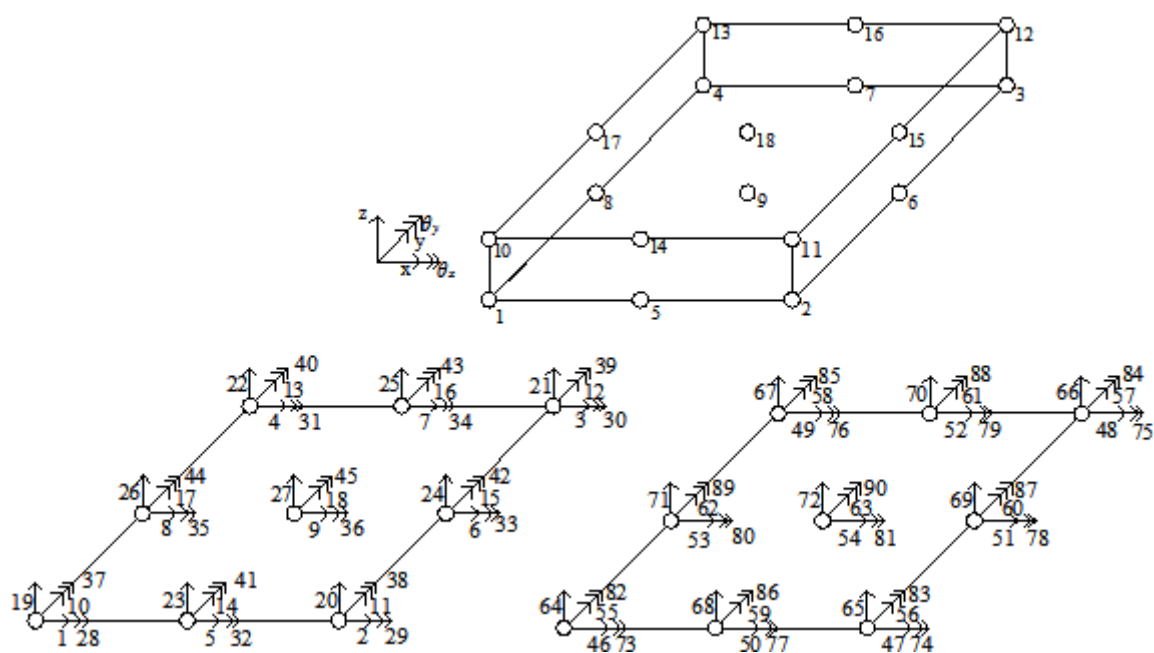


Figura 4. Graus de liberdade do elemento de interface.

Como o elemento de interface bidimensional tem, além da função de simular fisicamente o contato entre os elementos planos de casca, a função de conectar as superfícies de referência dos elementos planos de cascas acima e abaixo dele, então a distância vertical entre os nós inferiores e superiores do elemento de interface depende das posições das superfícies de referências. No caso de superfícies de referências adotadas no plano médio do elemento de casca, essa distância será dada pela soma das metades das espessuras dos elementos planos de

casca abaixo e acima do elemento de interface. Apesar dessa distância não ser nula, a sua espessura física real é sempre nula.

Conforme dito no parágrafo anterior o elemento de interface representa fisicamente apenas o contato entre os elementos de casca, dessa forma devem ser definidas as equações dos deslocamentos relativos que acontecem nessa interface. Tomando a diferença entre as equações dos deslocamentos na direção x , y e z ao longo dos elementos de casca abaixo ($\alpha=1$) e acima ($\alpha=2$) do elemento de interface analisado, chega-se às equações para os deslocamentos relativos longitudinal (s_l), transversal (s_t), e vertical (s_v), nas direções x , y e z do elemento de interface bidimensional.

$$s_l(x, y) = u_2^0(x, y) - u_1^0(x, y) - \frac{h_2}{2} \theta_{y2}(x, y) - \frac{h_1}{2} \theta_{y1}(x, y) \quad (15)$$

$$s_t(x, y) = v_1^0(x, y) - v_2^0(x, y) + \frac{h_2}{2} \theta_{x2}(x, y) + \frac{h_1}{2} \theta_{x1}(x, y) \quad (16)$$

$$s_v(x, y) = w_2^0(x, y) - w_1^0(x, y) \quad (17)$$

Nas Eqs. (15) a (17), u_α^0 , v_α^0 , e w_α^0 representam os deslocamentos de translação da superfície média (ou uma superfície de referência qualquer) dos elementos planos de casca, já $\theta_{x\alpha}$ e $\theta_{y\alpha}$ representam as rotações em relação aos eixos x e y , que independem da posição ao longo da espessura, hipótese da manutenção da seção plana. h_1 e h_2 são as espessuras dos elementos planos de casca abaixo e acima, respectivamente, do elemento de interface. Nas equações a seguir o índice 0 será omitido para facilitar as notações.

Os deslocamentos relativos apresentados nas Eqs. (15) a (17) estão relacionados a uma deformação da conexão na interface de contato, ou seja, a uma força por unidade de área que surge nessa interface. Sendo E_{S_b} , E_{V_b} e E_{N_b} as rigidezes de deformação do elemento de interface na direção dos deslocamentos relativos s_l , s_t e s_v então as forças por unidade de área que surgem nessa interface são: $S_b = E_{S_b} s_l$, $V_b = E_{V_b} s_t$ e $N_b = E_{N_b} s_v$. Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface da Fig. 4 tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_A (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t + N_b \delta s_v) dA \quad (18)$$

Substituindo a variação dos deslocamentos relativos na Eq. (18) do trabalho virtual, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_A [& S_b (\delta u_2 - \delta u_1) + V_b (\delta v_1 - \delta v_2) + N_b (\delta w_2 - \delta w_1) - \frac{h_2}{2} S_b \delta \theta_{y2} + \\ & - \frac{h_1}{2} S_b \delta \theta_{y1} + \frac{h_1}{2} V_b \delta \theta_{x1} + \frac{h_2}{2} V_b \delta \theta_{x2}] dA \end{aligned} \quad (19)$$

Na aproximação por elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais ($\mathbf{q}$). Como os graus de liberdade inferiores e superiores são interpolados independentemente e a ordem desses seguiu a mesma ordem usada para o elemento plano de casca apresentado no item 3.1, então as funções de interpolação para o elemento de interface bidimensional são as

mesmas adotadas para o elemento plano de casca. Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos representadas pelo vetor coluna Φ de nove termos.

Seguindo a mesma sequência da formulação do elemento de casca chega-se a expressão abaixo para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento de interface bidimensional.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_A \begin{Bmatrix} -S_b \Phi \\ +V_b \Phi \\ -N_b \Phi \\ \frac{h_1}{2} V_b \Phi \\ -\frac{h_1}{2} S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ -V_b \Phi \\ N_b \Phi \\ \frac{h_2}{2} V_b \Phi \\ -\frac{h_2}{2} S_b \Phi \end{Bmatrix} dA, \quad \mathbf{K} = \int_A \begin{Bmatrix} -\Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \frac{h_1}{2} \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\frac{h_1}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \frac{h_2}{2} \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\frac{h_2}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dA \quad (20)$$

Os esforços S_b , V_b e N_b são obtidos diretamente da curva força por unidade de área versus deslocamento relativo. Já as derivadas desses esforços em relação aos deslocamentos nodais são definidas a seguir.

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} -\Phi E_{S_b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{h_1}{2} \Phi E_{S_b} \\ \Phi E_{S_b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{h_2}{2} \Phi E_{S_b} \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Phi E_{V_b} \\ 0 \\ \frac{h_1}{2} \Phi E_{V_b} \\ 0 \\ 0 \\ \Phi E_{V_b} \\ 0 \\ \frac{h_2}{2} \Phi E_{V_b} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi E_{N_b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi E_{N_b} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

4 EXEMPLOS

4.1 Laje de Concreto

Esse exemplo trata-se de uma laje de concreto, com módulo de elasticidade de 35.4 GPa, de 5 m de comprimento por 3 m de largura e espessura de 10 cm. A laje encontra-se apoiada nos seus vértices e submetida a uma carga concentrada de 20 kN no centro, conforme ilustra a Fig. 5.

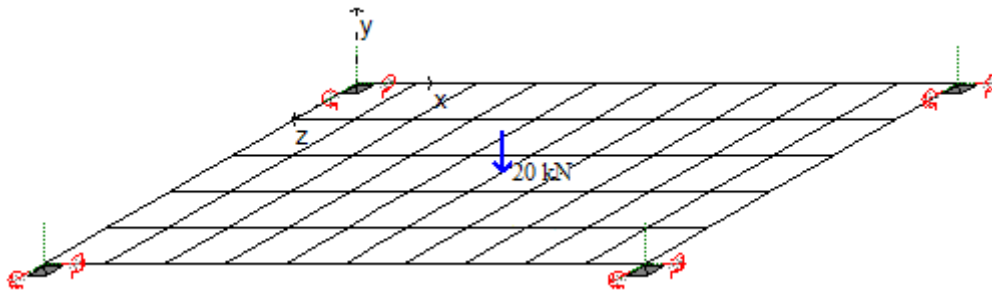


Figura 5. Laje modelada com elementos de casca de nove nós

A simulação numérica da laje de concreto foi feita de três formas diferentes sendo que na primeira foi usado apenas o elemento plano de casca de nove nós, como mostrado na Fig. 5. Em seguida a laje de concreto de 10 cm de espessura foi dividida em duas lajes iguais de 5 cm de espessura cada, sendo a ligação entre elas feita pelo elemento de interface bidimensional.

A ligação usando o elemento de interface bidimensional foi feita com três discretizações diferentes, usando 1, 25 e 50 elementos, na Fig. 6 é mostrado a discretização da laje para 25 elementos de interface conectados a 50 elementos planos de casca, sendo metade na face inferior e a outra metade na face superior. Também foi feita uma análise com o software comercial SAP2000 usando o elemento *Shell Thick*. Na Tabela 1 podem-se observar os resultados das análises descritas e o erro associado.

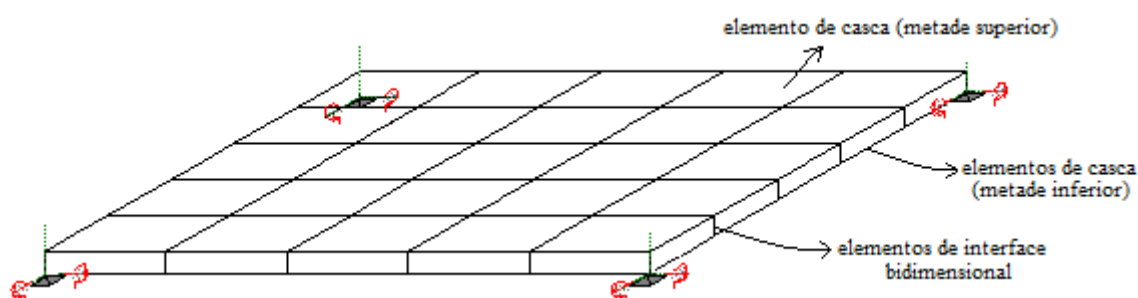


Figura 6. Laje modelada com 50 elementos planos de casca e 25 elementos de interface bidimensional

Da Tabela 1, nota-se que quando melhoramos a discretização de 100 elementos de casca *Shell Thick* do SAP2000 para 200 elementos, a flecha máxima aumenta significativamente, já aumentando de 200 para 400 a flecha máxima já não mostra mais variação significativa mostrando que esse deslocamento tende a convergir para próximo de 0.6357 cm, valor esse usado para comparação dos resultados obtidos pelos elementos implementados nesse trabalho. Na Tabela 1 é mostrado a aproximação dos resultados quando se faz a análise usando apenas elementos planos de casca de nove nós implementado na seção 3 desse trabalho.

Tabela 1. Flecha máxima na laje

Item	Software	Elementos de casca	Elm. Interface bidimensional	Desloc. (cm)	Item Avaliado	Erro
1	SAP	100	0	-0.1067	3--1	-83.21%
2	SAP	200	0	-0.6342	3--2	-0.23%
3	SAP	400	0	-0.6357		
4	FEMOOP	50	0	-0.6317	3--4	-0.63%
8	FEMOOP	2	1	-0.4463	3--8	-29.79%
9	FEMOOP	50	25	-0.6073	3--9	-4.47%
10	FEMOOP	100	50	-0.6237	3--10	-1.89%

Para a análise com a placa dividida em duas partes iguais e a simulação feita por elementos planos de casca mais elementos de interface, os resultados são ruins para 1 elemento de interface, são bons para 25 elementos de interface e muito bons para 50 elementos de interface. A alteração de 25 para 50 não apresenta mais uma variação significativa na resposta, concluindo que a flecha obtida usando na análise elementos planos de casca associados a elementos de interface bidimensional converge para um valor próximo de 0.6237 muito próximo do valor obtido pelo software SAP2000, que analisa a placa sem dividi-la em duas partes. Essa melhora do resultado está atrelada justamente ao refinamento da malha utilizada tanto dos elementos de casca quanto dos elementos de interface. Na Fig. 7 observa-se a deformada das duas lajes conectadas com elementos de interface bidimensionais. Nas análises com elementos de interface foram consideradas interação total longitudinal, transversal e vertical.

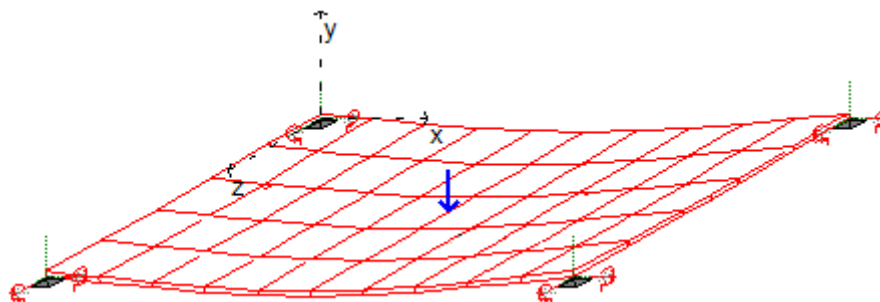


Figura 7. Deformada da laje usando elementos de casca e de interface.

4.2 Viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre

O exemplo a seguir trata-se de uma viga mista engastada em uma extremidade e livre na outra com 10 m de comprimento e submetida a uma carga de 50 kN aplicada na extremidade livre conforme ilustrado na Fig.8.

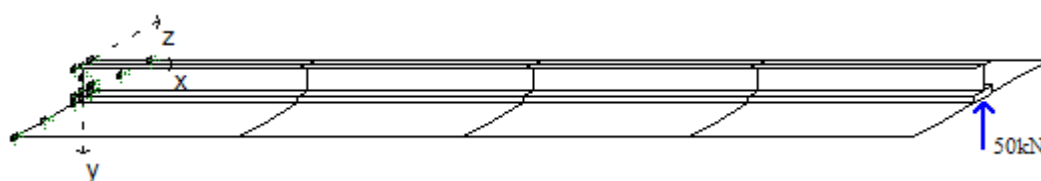


Figura 8. Viga mista engastada e livre.

A seção transversal é composta por uma laje de concreto com o módulo de elasticidade de 13GPa e o perfil de aço IPE 300 com módulo de elasticidade de 200GPa , conforme ilustrado na Fig. 9 com as dimensões em milímetros.

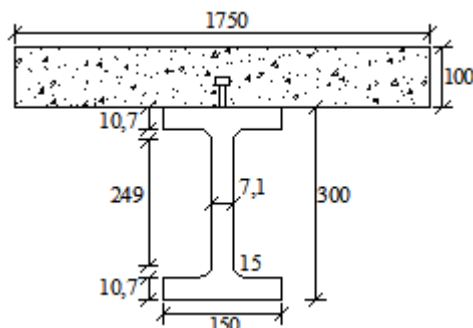


Figura 9. Seção transversal da viga mista

A viga mista foi avaliada por Brighenti e Bottoli (2014) que propuseram um elemento finito unidimensional usando a teoria de viga de Euler-Bernoulli com 8 graus de liberdade. Os autores propõem a formulação considerando o regime linear elástico e o método da rigidez direta para avaliar o deslizamento longitudinal entre os elementos da seção mista.

A discretização usada para a laje na direção longitudinal foi de 4 divisões e na direção transversal 3, totalizando 12 elementos. Já para o perfil de aço foram usadas 4 divisões na direção longitudinal e sem divisões das mesas na direção transversal e da alma na direção vertical, totalizando 12 elementos. Para os elementos de interface bidimensionais foram usados 4 elementos.

Brighenti e Bottoli (2014) avaliam apenas a influência da variação da rigidez longitudinal no deslocamento vertical ao longo do comprimento da viga. Os valores de rigidez longitudinal que são avaliados por Brighenti e Bottoli (2014) e no presente trabalho são $E_{SB} = 10^3 \text{ KPa}$ e $E_{SB} = 10^7 \text{ KPa}$.

Nas figuras nessa seção Shell9+int18 é o resultado obtido simulando a viga mista através dos elementos de casca de nove nós e o elemento de interface de dezoito nós implementados nesse trabalho. BeamTQ+intTQ é o resultado obtido simulando a viga com o elemento de barra BeamTQ de três nós e o elemento de interface intTQ de 6 nós, ambos elementos apresentados no trabalho de Souza e Silva (2007). O elemento BeamTQ é um elemento de viga de Timoshenko com interpolação quadrática para translação e rotação, já intTQ é um elemento de interface que faz a ligação entre os elementos de vigas de Timoshenko abaixo e acima da conexão deformável e simula essa conexão permitindo um deslocamento relativo longitudinal e vertical. REF é o resultado obtido pela referência Brighenti e Bottoli (2014).

Nas Figs. 10 a 13 são mostrados os resultados obtidos para a linha elástica e para a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto da viga mista engastada e livre usando os elementos finitos descritos no parágrafo anterior.

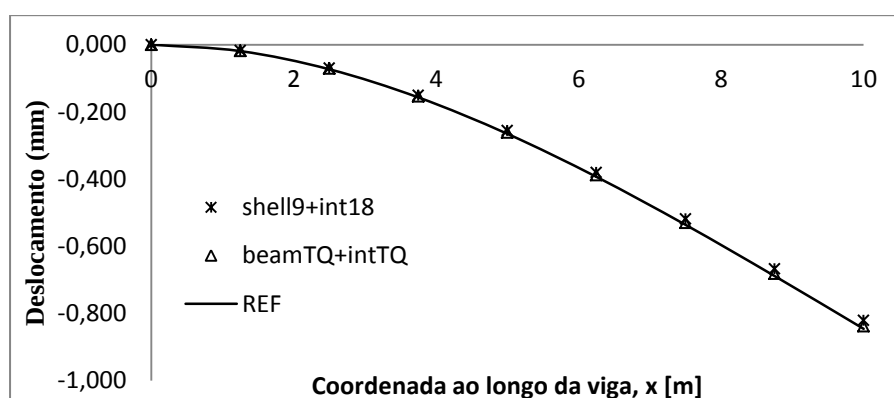


Figura 10. Linha elástica da viga mista em balanço com $E_{sb} = 10^3 \text{ kPa}$.

Observa-se na Fig. 10 que a flecha ao longo da viga mista para rigidez longitudinal $E_{sb} = 10^3 \text{ kPa}$ apresenta resultados muito próximos para os elementos implementados no presente trabalho, o elemento implementado por Souza e Silva (2007) e os resultados obtidos por Brighenti e Bottoli (2014). Isso indica que mesmo usando diferentes teorias na formulação de cada elemento, análise de placa e de viga, não há influência do efeito *shear lag* e do efeito de Poisson. Observa-se também que não há influência do efeito do cortante no cálculo da flecha.

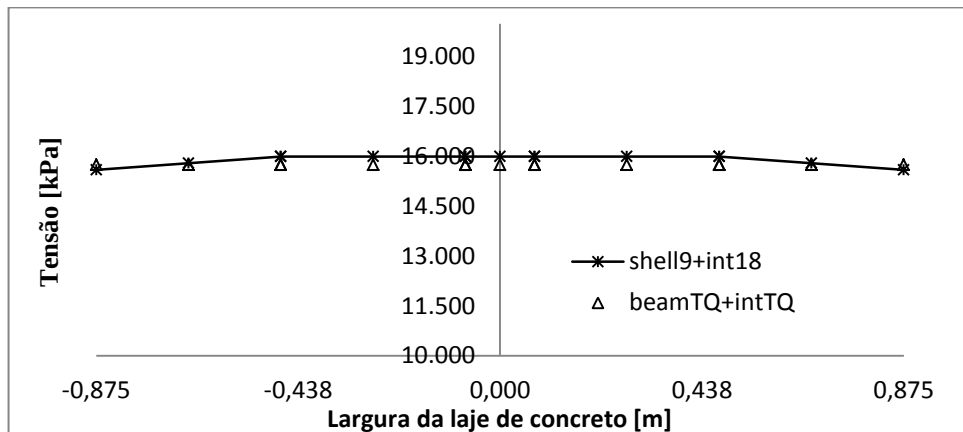


Figura 11. Variação da tensão na fibra mais tracionada ao longo da largura da laje de concreto
 $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$.

A variação da tensão normal ao longo da largura da seção transversal é ilustrada no gráfico da Fig. 11. Observa-se uma variação pequena quando comparamos o elemento Shell9+int18, que é capaz de captar a variação da tensão ao longo da largura, com o elemento BeamTQ+intTQ que não leva em consideração essa variação. Isso mostra que o efeito *shear lag* não é relevante quando comparamos os resultados obtidos usando elementos de placa e de viga para a viga mista engastada e livre com a rigidez de $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$.

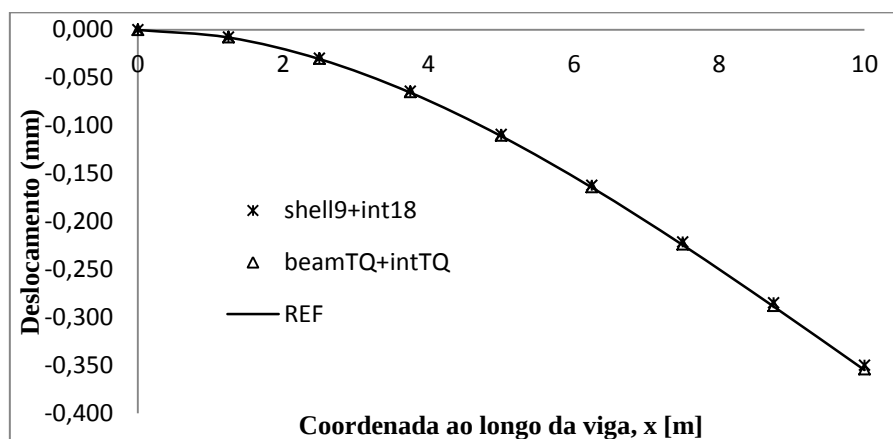


Figura 12. Linha elástica da viga mista em balanço com $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$.

Também foram calculados os valores da flecha ao longo da viga mista com a rigidez longitudinal $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$ para os elementos implementados no presente trabalho e por Souza e Silva (2007) e comparados com os resultados obtidos por Brighenti e Bottoli (2014). Os resultados expostos no gráfico da Fig. 12 mostram a eficiência dos elementos implementados nesse trabalho, já que os valores são bem próximos. Além disso, nota-se que a consideração ou não do efeito do cortante não traz diferenças relevantes nos resultados para esse caso.

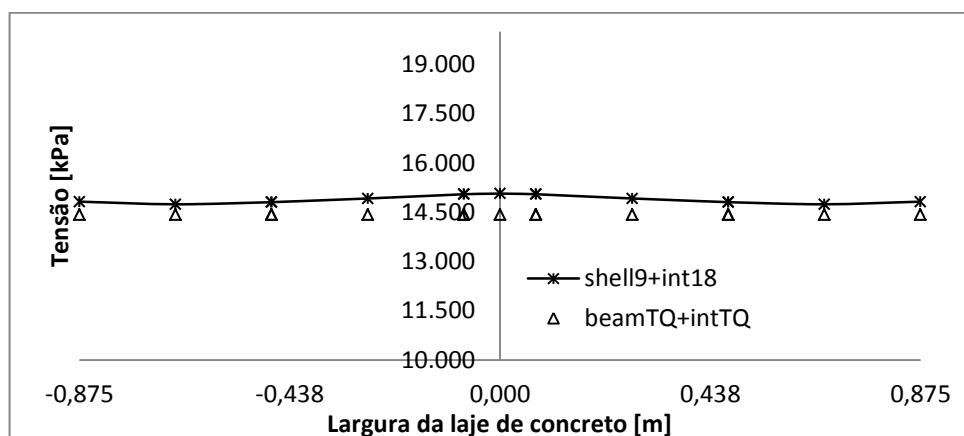


Figura 13. Variação da tensão na fibra mais tracionada ao longo da largura da laje de concreto para $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$.

A Fig. 13 apresenta os valores da variação de tensão normal ao longo da largura da laje de concreto para a viga engastada livre com rigidez longitudinal $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$. Observa-se que o efeito *shear lag* considerado na análise de placas não é relevante para esse caso, já que os valores de tensão obtidos pelos elementos implementados no presente trabalho não apresentam diferenças consideráveis quando comparados com os resultados obtidos pelo elemento de Sousa e Silva (2007).

5 CONCLUSÕES

Nesse trabalho são apresentadas formulações de elementos finitos planos de casca e de interface bidimensional para análise numérica de estruturas de superfícies que apresentem, de alguma forma, conexões deformáveis. O elemento finito de interface implementado é capaz de se associar aos elementos planos paralelos de casca, mostrando ser eficazes quando se utiliza um modelo de discretização em elementos de casca para uma análise estrutural qualquer.

Pode-se observar que a influência do efeito *shear lag* e do esforço cortante podem não ser relevantes em determinadas vigas mistas, devendo sempre ser avaliados de maneira minuciosa para que o problema seja modelado corretamente.

Alguns desses exemplos foram avaliados por outros pesquisadores usando métodos numéricos e com resultados utilizando o software comercial SAP2000. Os resultados mostram que os elementos implementados são uma alternativa útil para análise estrutural de alguns problemas práticos.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Universidade Federal de Ouro Preto/PROPEC, o CNPq, e a FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Batoz J.L., Hammadi F., Zheng C., Zhong W. (2000) On the linear analysis of plates and shells using a new-16 degrees of freedom flat shell elemento. *Computers and Structures*, v.78, p. 11 – 20 (2000).
- Brighenti R., Bottoli S. (2014) A novel finite element formulation for beams with composite cross-section. *International Journal of Mechanical Sciences*, v.89, p.112-122 (2014).
- Carol I., López C. M., Roa O. (2001). Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 193 – 215 (2001).
- Dias, L.E.S., *Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface* Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, 2016.
- Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T. L. (1968). *A model for the mechanics of jointed rock*. J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE, v. 99, p. 637 – 659, (1968).
- Hughes Thomas J. R. (1987) *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Izzudin B. A., Tao X. Y., Elghazouli (2004). Realistic modeling of composite and reinforced Concrete floor slabs under extreme loading, *Journal of Structural Engineering*, v. 130, p. 1972 – 1984 (2004).
- Kaliakin V. N., Li J. (1995). Insight into deficiencies associated with commonly used zero thickness interface elements. *Computers and Geotechnics*, v. 17, p. 225 – 252 (1995).
- Ko, Y., Lee, P., Bathe, K., The MITC4+ shell element in geometric nonlinear analysis. *Computer and Structures*, 2017.
- Newmark N. M., Siess C. P., Viest, I. M. (1951) Test and analysis of composite beam with incomplete interaction. *Proc Soc Exp Stress Anal*, v. 9, p. 75-92.
- Nie J., Fana J., Cai C.S. (2008) Experimental study of partially shear-connected composite beams with profiled sheeting. *Engineering Structures*, v. 30, p. 1 – 12 (2008).
- SAP2000 *Análisis Reference Manual*, versão 16.0, Computers & Structures, Inc., Berkeley 1978-2013.
- Silva A. R. (2006) *Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP.

Silva Jr, J. B. M., Silva, A. R. (2010) Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Engineering Structures*, v. 32, p. 1671 – 1680 (2010).

Sousa Jr. J. B. M., Silva, A. R. (2007) Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.43, p. 954 – 964 (2007).

Sousa Jr., J.B. M., Silva, A. R. (2009) A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 45, p. 305 – 314 (2009).