



## PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO A BIBLIOTECA FEniCS.

**Fernando Molon Abreu**

**Lucia Catabriga**

fernando.molon.abreu@gmail.com

luciac@inf.ufes.br

Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, 29075-910, Vitória, Espírito Santo, Brasil

**Abstract.** *Este trabalho tem por objetivo estudar problemas de interação fluido-estrutura (FSI - Fluid-Structure Interaction) utilizando a Biblioteca de domínio público FEniCS na solução de problemas de formação e ruptura de aneurismas por fluxo sanguíneo anormal. A formulação Lagrangeana-Euleriana-Arbitrária (ALE) é uma das abordagens mais utilizadas para resolver problemas de FSI, entretanto também é reconhecidamente uma das mais onerosas. Neste trabalho vamos considerar o método de impulso acoplado para problemas de interação fluido-estrutura (CMM-FSI - Coupled momentum method for FSI). Este método define o sólido como uma membrana, sendo consideradas formulações variacionais para as equações de Navier-Stokes em um domínio rígido, modificando-o de tal forma que a deformidade da membrana é levada em consideração. Assim, não há necessidade de remalhamento o que torna o método computacionalmente mais rápido do que a abordagem ALE. Para a formulação variacional do fluido a formulação estabilizada Streamline-Upwind/Petrov Galerkin (SUPG) para a velocidade e Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin (PSPG) para a pressão são utilizadas. Um conjunto de experimentos com geometria simplificada mostra a eficiência da abordagem considerada.*

**Keywords:** *Interação fluido-estrutura, FEniCS, CMM-FSI, SUPG/PSPG*

## 1 INTRODUÇÃO

A interação fluido-estrutura (FSI) representa o acoplamento entre leis de diferentes físicas, em especial as da fluidodinâmica e mecânica estrutural. Os fenômenos estudados tem dependência mútua entre as áreas de mecânica dos fluidos e a dinâmica dos sólidos. As variáveis do fluido dependem da estrutura e as reações do sólido dependem das forças que o fluido produz na estrutura.

Os problemas FSI estão presentes em varias áreas do ramo da engenharia, tais como: civil, mecânica, aeronáutica (Stein et al., 2000; Wren et al., 1997; Bazilevs et al., 2013; Gomes, 2013), em simulações geológicas (Kumagai, 2002), e vão além, estando também presentes em problemas de biomecânica (Kamensky et al., 2015; Vignon-Clementel et al., 2006; Figueroa et al., 2006; Helmig, 2013; Selim & Logg, 2017), dentre outras áreas de aplicação.

Um problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contorno associado a cada domínio (fluido e sólido), formando um único conjunto acoplado de equações. A natureza inerentemente não linear e dependente do tempo de problemas FSI dificultam a busca por soluções analíticas. Entretanto, grandes avanços na pesquisa de métodos computacionais vem sendo desenvolvidos nas últimas décadas (Mittal & Tezduyar, 1995; Kuhl et al., 2003; Figueroa et al., 2006; Bazilevs et al., 2013; Court et al., 2014; Court & Fournié, 2015).

Diante dos avanços computacionais os modelos matemáticos aplicados nas áreas da medicina e biologia têm sido cada vez mais utilizados, especialmente para aplicações envolvendo artérias tridimensionais. Esses modelos possibilitam estudo em regiões favoráveis à aterosclerose e aneurismas (Perktold et al., 1991; Taylor et al., 1998; Steinman, 2002), mecanismos reguladores do coração (Magosso & Ursino, 2002; Brebbia, 2009), e ainda podem possibilitar planejamentos cirúrgicos (de Leval et al., 1996; Migliavacca et al., 1999; Taylor et al., 1999; Laganá et al., 2002). Em indivíduos saudáveis o fluxo sanguíneo é normal, mas pessoas com determinadas patologias estão sujeitas a fluxos anormais, e a formação e propagação dos aneurismas são diretamente afetados por estes campos de fluxos nas artérias (Glagov et al., 1988; Moore, 1991). Com isso a fisiologia do corpo humano pode ser examinada com riquezas de detalhes, sem risco à vida, e ainda, simulações podem ajudar na proposição de melhorias nas técnicas de diagnósticos e tratamentos (Stergiopulos et al., 1992).

Grande parte das aplicações de modelos de fluxo sanguíneo em artérias não contabilizam a deformação da parede do vaso, ou seja, o sólido é assumido rígido (Oshima et al., 2001; R. Cerebral et al., 2003; Salmon et al., 2003; Shojima et al., 2004), ou a configuração geométrica é altamente simplificada (Perktold & Rappitsch, 1995; van de Vosse et al., 2003). Mas esses tipos de suposições não remetem de forma realista o comportamento destes problemas, pois a deformidade do sólido está diretamente relacionada com forças de fluxo e vice-versa. Diante desses fatos, existe a necessidade de levar em conta a deformação do vaso acoplando as equações provenientes do fluido e sólido, obtendo assim os problemas de interação fluido-estrutura.

A formulação Lagrangeana-Euleriana-Arbitrária (ALE) é uma das abordagens mais utilizadas para resolver os problemas FSI (Tezduyar et al., 1992; Mittal & Tezduyar, 1994; Sanchez & Coda, 2009). Mas a utilização desta técnica encontra grandes desafios para modelos fisiológicos, pois existe necessidade de atualização, a cada passo de tempo, da geometria do fluido e da parte estrutural, resultando em um método computacionalmente oneroso. Em geral, aplicações em medicina necessitam que os modelos sejam resolvidos em tempo clínica-

mente importante (horas, por exemplo) (Figuerola et al., 2006), sendo portanto não indicada a estratégia ALE para essas aplicações.

Devido a isso, técnicas mais simples para impor a deformação da parede do vaso são primordiais para aplicações fisiológicas. O método de impulso acoplado para problemas de interação fluido-estrutura (CMM-FSI - *Coupled Momentum Method for FSI*) foi introduzido por (Figuerola et al., 2006, 2004), contornando as dificuldades relacionadas com a formulação ALE. Esta abordagem define o sólido como uma membrana. Esta consideração se justifica pelo fato dos diâmetros das artérias serem pequenos quando comparados com o comprimento de onda do pulso cardíaco. Portanto, o sólido apresenta um comportamento de membrana ao invés de um comportamento de flexão, não sendo necessário graus de liberdade adicionais na parede da membrana. Além disso, para simplificar o modelo, uma abordagem cinemática linearizada é adotada. Sendo que, um reforço de cisalhamento transversal para a membrana linear é adotado, não acrescentando graus de liberdade na interface para a membrana linear a fim de conter instabilidades.

São consideradas formulações variacionais para as equações de Navier-Stokes em um domínio rígido, modificando-o de tal forma que a deformação da membrana é levada em consideração. A deformação da parede do vaso é acoplada nas equações do fluido, no nível variacional, como uma condição de contorno. Assim sendo, não há necessidade de remalhamento e são incorporados alguns termos adicionais no contorno, tornando o método computacionalmente mais eficaz do que a abordagem ALE.

Neste artigo é considerada para o fluido a formulação estabilizada *Stremline-Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) (Elias, 2007) para a velocidade, *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG) (Elias, 2007) para a pressão, e um termo de captura (LSIC) (Elias, 2007), com elementos de ordem linear para a velocidade e pressão. Dada a complexidade dos problemas FSI, a abordagem é implementada utilizando a Biblioteca numérica de domínio público FEniCS (Logg et al., 2012), que utiliza a linguagem C ou python para implementar as equações diferenciais pelo métodos dos elementos finitos, no qual gerenciam essas dificuldades, liberando o pesquisador para se concentrar nos aspectos mais relevantes da simulação e/ou formulação escolhida. Um conjunto de experimentos com geometria simplificada foi escolhido para mostrar a eficiência da abordagem considerada.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Nesta seção apresentamos as equações governantes do problema e as condições de contorno pertinentes ao fenômeno estudado. As equações do fluido, sólido e o acoplamento ao nível variacional são descritas, sendo que a equação do sólido é inserida como uma condição de contorno na equação do fluido. A Fig.(1) descreve o domínio do problema, sendo que a estrutura é considerada como uma parede fina. Com isso, o domínio do sólido ( $\Omega^s$ ) pode ser considerado como a interface ( $\Gamma^s$ ) com espessura da parede ( $\zeta$ ):  $\Omega^s = \Gamma^s \times \zeta$ . Devido a esta consideração e a definição adequada de um modelo de membrana é gerado um forte acoplamento dos graus de liberdade no nível variacional.

### 2.1 Formulação do fluido

O fluxo sanguíneo em vasos de parede fina pode ser aproximado por um fluido newtoniano incompressível em um domínio tridimensional descrito pelas equações de Navier-Stokes (ENS).

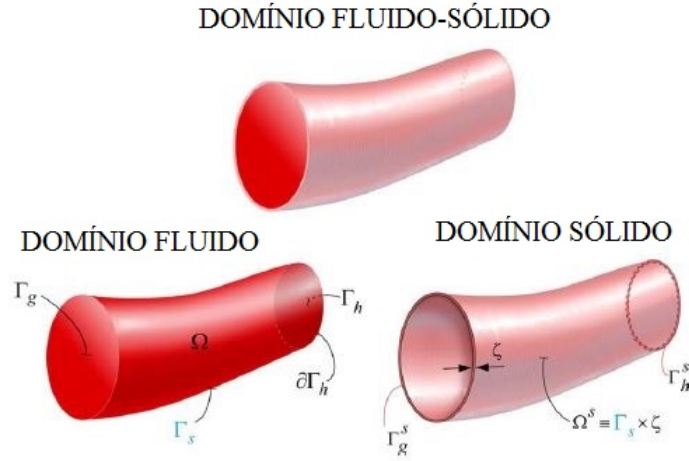


Figura 1: Representação dos domínios, adaptado de Figueroa et al. (2006)

As ENS são provenientes da lei de conservação da massa e do momento, que com condições de contorno formam um sistema fechado de equações diferenciais parciais. Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  o domínio do fluido e  $\Gamma$  as condições de contorno, tal que  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h \cup \Gamma_s$  e  $\Gamma_g \cap \Gamma_h \cap \Gamma_s = \emptyset$ , a forma forte das equações de Navier-Stokes, descritas em Elias (2007), são dadas por:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \cdot \sigma(\vec{v}, p) = \vec{f}, \text{ em } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$\vec{v} = \vec{g}, \text{ em } \Gamma_g \times (0, T), \quad (3)$$

$$\vec{t}_{\vec{n}} = \sigma(\vec{v}, p) \vec{n} = \vec{h}, \text{ em } \Gamma_h \times (0, T), \quad (4)$$

$$\vec{t}_{\vec{n}} = \vec{t}^f, \text{ em } \Gamma_s \times (0, T), \quad (5)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{v}^0(\vec{x}), \text{ em } \Omega^0, \quad (6)$$

onde  $\vec{v}$  é o vetor velocidade do sangue,  $\vec{f}$  é a força de corpo por unidade de volume,  $\vec{v}^0(\vec{x})$  é a condição inicial do problema,  $T$  é o tempo final,  $\rho$  é a densidade do fluido e  $\sigma(\vec{v}, p)$  é o tensor das tensões de Cauchy,

$$\sigma(\vec{v}, p) = -pI + 2\mu\epsilon(\vec{v}) \quad (7)$$

onde  $p$  representa a pressão do sangue,  $I$  o tensor identidade,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $\epsilon(\vec{v})$  é o tensor deformação do sangue,

$$\epsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \right) \quad (8)$$

A Eq. (3) representa à parte do contorno com velocidade prescrita (condição de Dirichlet), e as Eq. (4) e (5) representam condições de Neumann. A Eq. (5) representa à interface do fluido com a parede do vaso. Nos casos de parede rígida são impostas condições de Dirichlet do tipo de não escorregamento, mas neste trabalho essa condição não será considerada, sendo inserida a força de tração, devido a interação do sangue com a membrana.  $\vec{t}^f$  é proveniente da interação

do sangue com a parede do vaso, que será determinada utilizando as equações elastodinâmicas da estrutura.

A formulação variacional, definida a partir das Eqs. (1-6), considera os seguintes espaços variacionais (Figueroa et al., 2006):

$$\mathcal{V}_h^k = \{\vec{v} | \vec{v}(\cdot, t) \in H^k(\Omega)^3, t \in [0, T], \vec{v}|_{\vec{x} \in \Omega_e} \in P_k(\Omega_e)^3, \vec{v}(\cdot, t) = \vec{g} \text{ em } \Gamma_g\}, \quad (9)$$

$$\mathcal{P}_h^m = \{p | p(\cdot, t) \in H^m(\Omega), t \in [0, T], p|_{\vec{x} \in \Omega_e} \in P_m(\Omega_e)\}, \quad (10)$$

Considerando as funções testes e os espaços definidos nas Eqs. (9) e (10), a formulação semi-discreta de Galerkin resulta em:

Encontrar  $\vec{v} \in \mathcal{V}_h^k$  e  $p \in \mathcal{P}_h^m$ , de tal modo que

$$F(\vec{v}; p; \vec{w}, q) = \int_{\Omega} \left\{ \vec{w} \cdot \left( \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{f} \right) + \nabla \vec{w} : \sigma(\vec{v}, p) - q \nabla \cdot \vec{v} \right\} d\vec{x} - \int_{\Gamma_h} \vec{w} \cdot \vec{h} ds + \int_{\Gamma_s} -\vec{w} \cdot \vec{t}^f ds = 0 \quad (11)$$

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{V}_h^k \text{ e } q \in \mathcal{P}_h^m.$$

## 2.2 Formulação do sólido

O movimento da parede do vaso é descrito pelas clássicas equações elastodinâmicas, considerando vasos de paredes finas, supondo assim uma dependência do domínio do sólido ( $\Omega^s$ ) com a interface do fluido ( $\Gamma_s$ ). A formulação variacional do sólido se relacionará com a tração do fluido na interface. Além disso, é considerado um modelo de membrana para o sólido, que define um alto grau de acoplamento dos graus de liberdade do domínio do fluido e do sólido, resultando em (Figueroa et al., 2006):

$$\int_{\Gamma_s} -\vec{w} \cdot \vec{t}^f ds \quad (12)$$

As equações elastodinâmicas para o sólido são dadas por:

$$\rho^s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma^s + \vec{b}^s, \text{ em } \Omega^s \times (0, T), \quad (13)$$

$$\vec{u} = \vec{g}^s, \text{ em } \Gamma_g^s \times (0, T), \quad (14)$$

$$\vec{t}_{\vec{n}} = \sigma^s \vec{n} = \vec{h}^s, \text{ em } \Gamma_g^s \times (0, T), \quad (15)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}^0(\vec{x}) \text{ em } \Omega_0^s, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}^0(\vec{x})}{\partial t} \text{ em } \Omega_0^s, \quad (17)$$

onde  $\vec{u}$  é a deformação,  $\vec{b}^s$  força de corpo do sólido,  $\sigma^s$  é o tensor das tensões do vaso,  $\vec{h}^s$  é a tensão na interface, e as Eqs. (16) e (17) são as condições iniciais.

Para acoplar as equações do sólido com a interface do fluido, é necessário definir uma relação do domínio ( $\Omega^s$ ) da membrana com a interface  $\Gamma_s$ . Assim, considerando um vaso de parede fina, podemos utilizar as seguintes relações:

$$\int_{\Omega^s} (\cdot) dx = \zeta \int_{\Gamma_s} (\cdot) ds, \quad (18)$$

$$\int_{\Gamma_h^s} (\cdot) ds = \zeta \int_{\partial\Gamma_h} (\cdot) dl, \quad (19)$$

onde  $\zeta$  é a espessura da parede. A força que o fluido faz na parede,  $\vec{t}^f$ , é igual e oposta a que o sólido faz na interface. Assim, considerando novamente um vaso de parede fina, a força de corpo é distribuída de forma uniforme sobre a espessura (Figuroa et al., 2006):

$$-\vec{t}^f = \vec{t}^s, \quad (20)$$

$$\vec{t}^s = \frac{-\vec{b}^s}{\zeta}. \quad (21)$$

Portanto existe um forte acoplamento dos graus de liberdade entre os domínios do fluido e do sólido e, ainda, as equações que descrevem o comportamento da parede possuem as mesmas condições daquelas descritas pela forma variacional do fluido. Com isso, os mesmos espaços de funções podem ser utilizados para a formulação do sólido, ou seja:

$$\mathcal{V}_h^{sk} = \{\vec{u} | \vec{u}(\cdot, t) \in H^k(\Omega^s)^3, t \in [0, T], \vec{u}|_{\vec{x} \in \Omega_e^s} \in P_k(\Omega_e^s)^3, \vec{u}(\cdot, t) = \vec{g}^s \text{ em } \Gamma_g^s\}, \quad (22)$$

$$\mathcal{W}_h^{sk} = \{\vec{w} | \vec{w}(\cdot, t) \in H^k(\Omega^s)^3, t \in [0, T], \vec{w}|_{\vec{x} \in \Omega_e^s} \in P_k(\Omega_e^s)^3, \vec{w}(\cdot, t) = \vec{0} \text{ em } \Gamma_g^s\}. \quad (23)$$

A partir dessas considerações, a formulação semi-discreta de Galerkin para a parte sólida resulta em:

Encontrar  $\vec{v} \in \mathcal{V}_h^{sk}$ , de tal modo que:

$$\int_{\Omega^s} \rho^s \vec{w} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} d\vec{x} + \int_{\Omega^s} \nabla \vec{w} : \sigma^s d\vec{x} = \int_{\Omega^s} \vec{w} \cdot \vec{b}^s d\vec{x} + \int_{\Gamma_h^s} \vec{w} \cdot \vec{h}^s ds \quad (24)$$

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{W}_h^{sk}.$$

## 2.3 Acoplamento fluido-sólido

O método CMM-FSI tem por objetivo considerar a forma fraca do sólido em função da velocidade do fluido na interface. Como a derivada segunda da deformação na interface está relacionada com a aceleração do fluido, utilizando as Eqs. (18), (19) e (21), podemos reescrever a Eq. (24), resultando em:

$$\zeta \int_{\Gamma_s} \rho^s \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds + \zeta \int_{\Gamma_s} \nabla \vec{w} : \sigma^s ds = \int_{\Gamma_s} \vec{w} \cdot \vec{t}^f + \zeta \int_{\partial\Gamma_h} \vec{w} \cdot \vec{h}^s dl, \quad (25)$$

ou

$$-\int_{\Gamma_s} \vec{w} \cdot \vec{t}^f = \zeta \int_{\Gamma_s} \rho^s \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds + \zeta \int_{\Gamma_s} \nabla \vec{w} : \sigma^s ds - \zeta \int_{\partial\Gamma_h} \vec{w} \cdot \vec{h}^s dl. \quad (26)$$

Todo os termos da Eq. (26) são definidos, exceto o tensor das tensões do sólido que será definido mais adiante. Portanto, as equações elastodinâmicas provenientes do sólido podem ser acopladas a formulação variacional do fluido como uma condição de contorno:

$$\begin{aligned} F(\vec{v}, p; \vec{w}, q) = \int_{\Omega} \left\{ \vec{w} \cdot \left( \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{f} \right) + \nabla \vec{w} : \sigma(\vec{v}, p) - q \nabla \cdot \vec{v} \right\} d\vec{x} \\ - \int_{\Gamma_h} \vec{w} \cdot \vec{h} ds + \zeta \int_{\Gamma_s} \rho^s \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds + \zeta \int_{\Gamma_s} \nabla \vec{w} : \sigma^s ds - \zeta \int_{\partial \Gamma_h} \vec{w} \cdot \vec{h}^s dl = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

## 2.4 Formulação estabilizada

Para fluxos com convecção dominante a formulação padrão de Galerkin considerando polinômios interpoladores de mesma ordem é instável. Neste trabalho adotaremos formulações estabilizadas: SUPG para a velocidade, PSPG para a pressão e o termo de captura LSIC, conforme descritas em Elias (2007):

Encontrar  $\vec{v} \in \mathcal{V}_h^1$  e  $p \in \mathcal{P}_h^1$ , de tal modo que

$$\begin{aligned} F(v, p; w, q) = \int_{\Omega} \left\{ w \cdot \left( \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \nabla v - f \right) + \nabla w : \sigma(v, p) - q \nabla \cdot v \right\} dx \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} (\tau_{SUPG} \rho v \cdot \nabla w + \tau_{PSPG} \nabla q) \cdot R(v, p) dx + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{LSIC} \rho \nabla \cdot w \nabla \cdot v dx \\ - \int_{\Gamma_h} w \cdot h ds + \zeta \int_{\Gamma_s} \rho^s w \cdot \frac{\partial v}{\partial t} ds + \zeta \int_{\Gamma_s} \nabla w : \sigma^s(u) ds - \zeta \int_{\partial \Gamma_h} w \cdot h^s dl = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$\forall \vec{w} \in \mathcal{V}_h^1$  e  $q \in \mathcal{P}_h^1$ , onde  $\tau_{SUPG}$ ,  $\tau_{PSPG}$ ,  $\tau_{LSIC}$  e  $R(\vec{v}, p)$  são, respectivamente, o parâmetro de estabilização SUPG, PSPG, LSIC e o resíduo da equação de Navier-Stokes. Os parâmetros podem ser encontrados em Shakib et al. (1991), e são dados por:

$$\begin{aligned} \tau_{SUPG} = \tau_{SUPG} = \left( \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2||v||}{h} \right)^2 + 9 \left( \frac{4\mu}{\rho h^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \tau_{LSIC} = \frac{||v||h}{2} \\ R(\vec{v}, p) = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \nabla v - \sigma(v, p) - f \end{aligned} \quad (29)$$

## 2.5 Discretização da parede do vaso

Neste trabalho a discretização do tensor  $\sigma^s$ , que representa a tensão da parede, será considerada como em (Figuerola et al., 2006). A malha do sólido é definida por triângulos lineares enquanto que a malha do fluido por elementos tetraédricos. Um triângulo linear é um plano cujo campo varia linearmente com as coordenadas  $x$  e  $y$ . Na análise do sólido, a deformação linear produz uma tensão constante. Dessa forma, o triângulo linear pode ser chamado de triângulos de tensões constantes (*Constant Strain Triangles* - CST), recaído no problema em que os CST são instáveis para geometrias tridimensionais com cargas transversais. Portanto, será considerado uma rigidez adicional ao elemento do vaso com cargas transversais – detalhes na Fig. 2 –

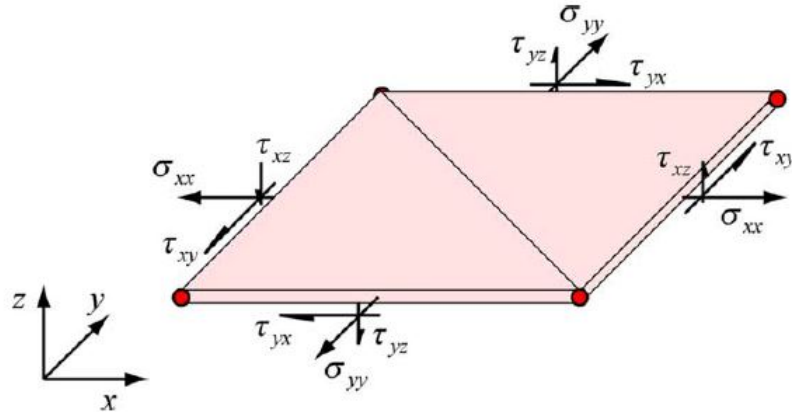


Figura 2: Esforço na membrana com carga transversal, retirado de Figueroa et al. (2006)

contornando a falta de instabilidade sem adicionar graus de liberdade ao problema. Além disso, a adição de rigidez, considerada a nível local, deve mapear o tensor a nível global. O tensor da tensão e deformação linear são dados por:

$$\begin{aligned}\sigma^s &= C : \epsilon, \\ \epsilon &= \frac{1}{2} \left( \nabla u + (\nabla u)^T \right),\end{aligned}\tag{30}$$

onde  $C$  representa um tensor de quarta ordem com as propriedades do material.

Devido a parede da membrana ser fina e, ainda, a tensão ser distribuída de forma uniforme na espessura da parede, podemos negligenciar a tensão normal na direção da espessura. Utilizando a simetria de  $C$ ,  $\sigma^s$  e  $\epsilon$ , é possível utilizar tensores com ordens reduzidas e um tensor de segunda ordem para as propriedades do material. Dessa forma, o tensor das tensões e o tensor de deformação, na forma reduzida, são dados por:

$$\begin{aligned}\{\sigma^{s,l}\} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^l & \sigma_{yy}^l & 0 & \tau_{xy}^l & \tau_{xz}^l & \tau_{yz}^l \end{pmatrix}^T, \\ \{\epsilon^l\} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u^l}{\partial x^l} & \frac{\partial v^l}{\partial y^l} & 0 & \frac{\partial u^l}{\partial y^l} + \frac{\partial v^l}{\partial x^l} & \frac{\partial w^l}{\partial x^l} & \frac{\partial w^l}{\partial y^l} \end{pmatrix}^T,\end{aligned}\tag{31}$$

onde  $u^l$ ,  $v^l$  e  $w^l$  são as componentes da deformação local e,  $x^l$  e  $y^l$  são as coordenadas locais da membrana. Considerando um material isotrópico, incompressível e utilizando a simetria, o tensor do material, na forma reduzida, é definido por:

$$D = \frac{E}{(1 - (\nu^s)^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu^s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu^s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5(1 - \nu^s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5k(1 - \nu^s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5k(1 - \nu^s) \end{bmatrix},\tag{32}$$

onde  $E$  e  $\nu^s = 0.5$  são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson. O parâmetro  $k$  foi inserido a fim de descrever uma variação parabólica do esforço de cisalhamento transversal. Figueroa et al. (2006) sugere um valor de  $k = 5/6$ , para uma membrana sólida e homogênea.

## 2.6 Inicialização

A derivada temporal da velocidade será aproximada por diferenças finitas atrasada, Eq. (33). Enquanto que a deformação será determinada de forma explícita – fórmula de Newmark (Eq. (34)), relacionando a velocidade e aceleração do fluido na interface:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v - v^n}{\Delta t}, \quad (33)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta) v_{,t_n} + 2\beta v_{,t_{n+1}}), \quad (34)$$

considerando  $\beta = 1.0$ .

Para inicializar o método CMM-FSI, o problema de parede rígida deve ser resolvido, obtendo a velocidade que será a condição inicial para o problema deformável. A inicialização do campo de deformação pode ser considerada de duas formas: deformação zero e pressão hidrostática.

Os principais passos da **deformação zero** são:

- Resolva o problema de parede rígida, dado pela Eq. (11) acrescida dos termos de estabilização presentes na Eq. (28);
- Inicialize a deformação e velocidade na interface como zero;
- Resolva o problema deformável, dado pela Eq. (28).

Os principais passos da **pressão hidrostática** estão descritos a seguir.

A ideia básica é requerer que a tensão do fluido na parede se equilibre com a do sólido na interface, começando a partir de um ponto de equilíbrio (Figueroa et al., 2006). Para tanto é considerado que a parede seja carregada com a pressão média na interface, proveniente do problema de parede rígida. Caracterizando-se, portanto, como um caso hidrostático, uma vez que pressão na parede inicialmente é estritamente devido a pressão estática ( $v = \partial v / \partial t = \tau = 0$ ). Dessa forma, a Eq. (27) pode ser reescrita por:

$$\zeta \int_{\Gamma_s} \nabla w : \sigma^s ds = \int_{\Gamma_h} w \mathcal{P} \cdot n ds \quad (35)$$

onde  $\mathcal{P}$  é a pressão média na interface  $\Gamma_s$ . Com isso a inicialização do algoritmo pode ser resumida por:

- Resolva o problema de parede rígida, dado pela Eq. (11) acrescida dos termos de estabilização presentes na Eq. (28);
- Inicialize a velocidade na interface como zero, solucione Eq. (35) e inicialize a deformação;
- Resolva o problema deformável, dado pela Eq. (28).

### 3 A BIBLIOTECA FEniCS

FEniCS é uma biblioteca de domínio público para solucionar equações diferenciais parciais utilizando o método dos elementos finitos. A FEniCS possibilita, de forma automatizada, o controle de erros, adaptatividade de malha, pacotes de álgebra linear de alto desempenho, soluções em paralelo, entre várias outras opções, detalhes podem ser consultados em Logg et al. (2012). A programação é simples, pois a formulação variacional pode ser descrita numa notação quase matemática. As implementações podem ser feitas em códigos C++ ou Python, adotado neste trabalho.

Para exemplificar, considere o problema de Poisson discretizado pelo método de Galerkin (Logg et al., 2012) em um domínio quadrado  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  com condição de contorno de valor prescrito. A forma variacional é dada por:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V. \quad (36)$$

A Fig. 3 mostra o código em python para esta aplicação. A primeira linha do código importa a biblioteca FEniCS, contendo todos os requisitos para resolver o problema por elementos finitos. Em seguida é gerada a malha do domínio  $\Omega$  com seis divisões na direção longitudinal e quatro na transversal. O espaço de função é definido no próximo comando, definindo elementos Lagrangeanos com polinômios lineares. As condições de contorno começam a ser definidas, sendo que  $v_0$  representa a expressão que será aplicada ao contorno e, logo abaixo, é definido em qual parte do contorno será inserida a condição – neste exemplo será inserido em todo o contorno. Na sequência é explicitado que as condições de contorno são do tipo Dirichlet, sendo informado qual o espaço de função, o valor e a parte do contorno que será imposta. Nas linhas a seguir, o problema variacional é descrito, onde  $a = a(v, w)$  é a forma bilinear e  $L = L(w)$  é a forma linear. Por fim, o problema é solucionado, sendo informado a variável de interesse e a condição de contorno. Neste comando está inserido a solução do sistema linear resultante, sendo que o método padrão é a decomposição LU, entretanto é possível explicitamente escolher um conjunto grande de métodos e preconditionadores utilizando diferentes bibliotecas de domínio público.

### 4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os experimentos numéricos obtidos para três problemas. Primeiramente, consideramos um problema teste com paredes laterais deformáveis. Dois experimentos, uma artéria idealizada com um fluxo constante na entrada e uma artéria aneurismática com um fluxo senoidal de entrada, foram considerados. Para solução dos sistemas lineares foi utilizado o método iterativo GMRES com preconditionador ILU(0), com tolerância de  $10^{-3}$ . A não linearidade do problema foi aproximada pelo método de Newton com tolerância de  $10^{-5}$ . Todos os códigos desenvolvidos foram executados pela biblioteca FEniCS em uma máquina com a seguinte configuração: 7.3 GB de memória RAM e processador com velocidade de clock de 3 GHz.

#### 4.1 Parede deformável

O problema é definido por um canal retangular com paredes laterais deformáveis e fluxo constante. O domínio é dado por  $\Omega = [-1, -0.5, -1] \times [1, 0.5, 1](cm^3)$ , com velocidade pres-

```

from fenics import * #Importando a biblioteca FEniCS

mesh = UnitSquare(6, 4) # Gerando a malha [0,1]x[0,1]

V = FunctionSpace(mesh, "Lagrange", 1) #Funcao de espaco

v0 = Expression("1 + x[0]*x[0] + 2*x[1]*x[1]") #Expressao para o contorno

def contorno(x, on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V, v0, contorno) #Aplicando a condicao de contorno

# Definindo o problema variacional
v = TrialFunction(V)
w = TestFunction(V)
f = Constant(-6.0)

a = inner(nabla_grad(v), nabla_grad(w))*dx #Forma bilinear
L = f*w*dx # Forma linear

v = Function(V) #Funcao a ser solucionada
solve(a == L, v, bc) #Resolvendo o problema

```

Figura 3: Código FEniCS

crita na entrada ( $v_z = V_{max}(1 - x^2)$ ) e pressão constante na saída ( $p_{out}$ ). Os valores das propriedades do fluido e do sólido, bem como outros parâmetros são apresentados na Tab. 1. Neste experimento é considerada uma malha com 6000 tetraedros, conforme mostra a Fig. 4, onde as paredes deformáveis são as que estão normal à direção  $x$ . O passo de tempo utilizado para este experimento foi de  $\Delta t = 0.005$  segundos.

Tabela 1: Propriedades e parâmetros para parede deformável

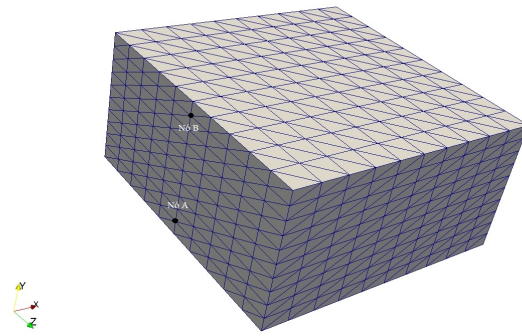
| $\rho$            | $\mu$                 | $E$                 | $\rho^s$          | $\nu^s$ | $k$ | $\zeta$ | $V_{max}$ | $p_{out}$           |
|-------------------|-----------------------|---------------------|-------------------|---------|-----|---------|-----------|---------------------|
| g/cm <sup>3</sup> | dyn.s/cm <sup>2</sup> | dyn/cm <sup>2</sup> | g/cm <sup>3</sup> | -       | -   | cm      | cm/s      | dyn/cm <sup>2</sup> |
| 1.06              | 0.04                  | 5320                | 1.09              | 0.5     | 5/6 | 0.1     | 12.5      | 2660                |

Os resultados são apresentados em quatro nós, posicionados de acordo com a Tab.2. Os nós A e B podem ser visualizados na Fig. 4 e os nós C e D estão na parede paralela. Esses nós

Tabela 2: Posição dos nós

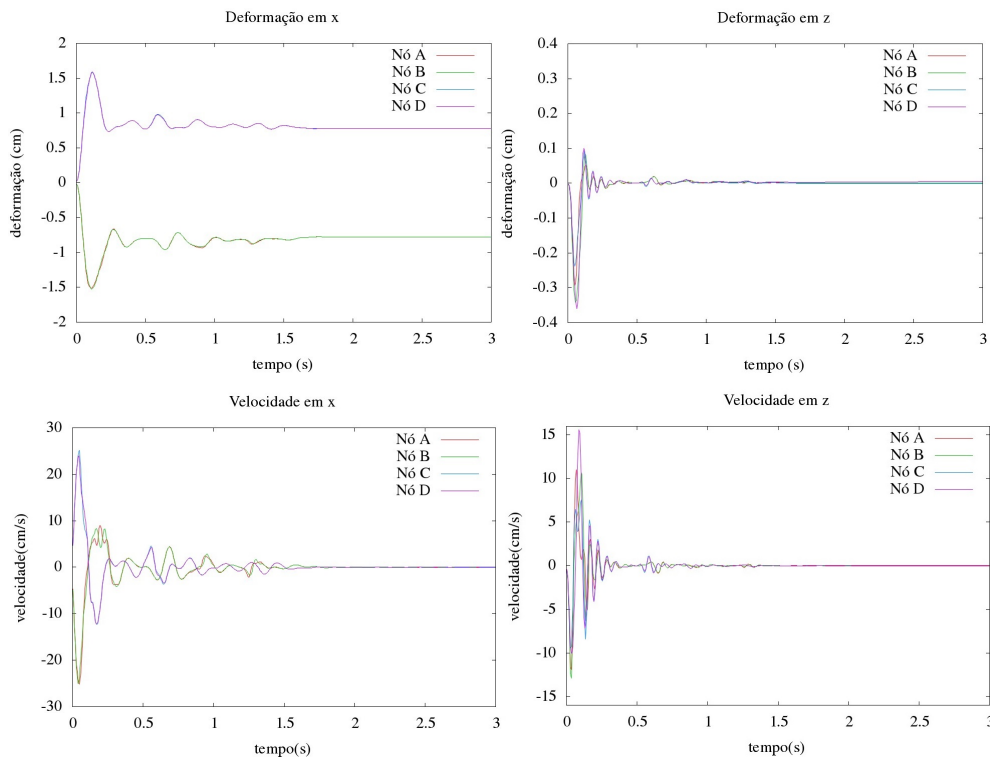
| -    | x(cm) | y(cm) | z(cm) |
|------|-------|-------|-------|
| Nó A | -1.0  | -0.4  | 0.0   |
| Nó B | -1.0  | +0.4  | 0.0   |
| Nó C | +1.0  | +0.4  | 0.0   |
| Nó D | +1.0  | -0.4  | 0.0   |

são livres para se moverem na direção do fluxo, devido a tensão de cisalhamento, e na direção



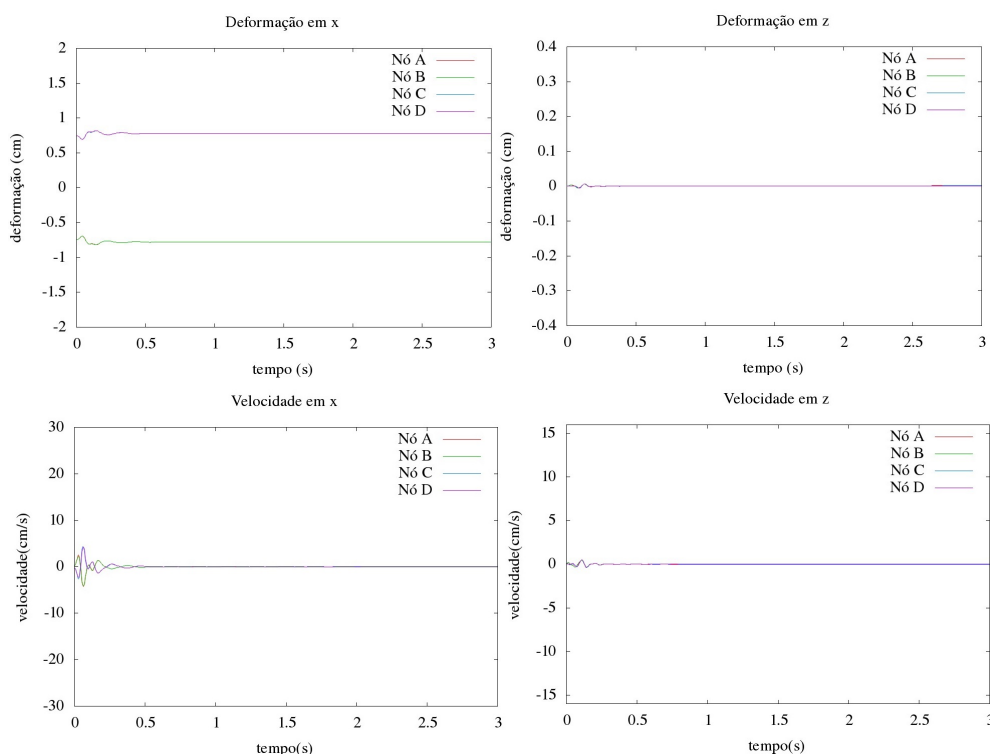
**Figura 4: Malha para a parede deformável**

perpendicular a parede em razão da tensão normal. Portanto, a deformação e a velocidade nestes nós são observadas nas direções  $z$  e  $x$ . Os resultados das deformações e velocidades (Figs. 5 e 6), incluem as duas formas de inicialização: deformação zero e pressão hidrostática.



**Figura 5: Velocidade e deformação dos nós nas paredes (deformação zero)**

Podemos observar na Fig. 5 que a variação inicial da tensão, devido a interação do fluido com a estrutura, causa uma oscilação do deslocamento nas paredes laterais. O sistema atinge o equilíbrio, como esperado, onde a velocidade na parede é zero e a deformação é um valor fixo. O deslocamento na direção  $x$  ocorre devido a pressão do fluido nas paredes laterais da estrutura e na direção longitudinal ( $z$ ) ser nula, pois a velocidade na interface é zero. Vale ressaltar que inicialmente temos uma tensão maior devido à carga súbita imposta na parede.



**Figura 6: Velocidade e deformação dos nós nas paredes (pressão hidrostática)**

O problema deformável é inicializado com a velocidade de parede rígida. Devido a este fato, existe naturalmente uma deformação inicial, que é o deslocamento sofrido pelas forças de pressão do fluido na interface, o que do ponto de vista mecânico é muito desejável, uma vez que existe um equilíbrio entre as forças internas do fluido e o sólido na interface.

A Fig. 6 representa os resultados com a inicialização do algoritmo com pressão hidrostática, ou seja, deslocamento inicial diferente de zero. Podemos observar que neste caso o regime estacionário é atingido mais rapidamente. As oscilações iniciais, tanto nos campos de velocidade como nos de deformação, são bem menores. Analisando mais detalhadamente a parte do deslocamento em  $x$ , observamos que iniciando com deformação zero demora cerca de 1.5 segundos para atingir o estado estacionário e já no caso pré-carregado (pressão hidrostática) o tempo para atingir o estado estacionário é de cerca de 0.3 segundos. Portanto, é vantajoso iniciar o problema deformável com uma pré-carga.

Utilizamos o mesmo passo de tempo para as diferentes inicializações, entretanto o tempo de CPU foi cerca de 1470 segundos para a deformação zero e 844 segundos para o caso hidrostático. O que demonstra que o caso com inicialização hidrostática necessita de menos iterações lineares e não lineares para atingir as tolerâncias pré-fixadas, resultando em um procedimento numérico mais vantajoso.

## 4.2 Artéria Idealizada

Neste experimento uma artéria idealizada com raio de 0.3 cm e comprimento de 4.2 cm é considerada para descrever o fluxo sanguíneo. Na entrada é prescrito fluxo constante ( $v_{in}$ ) com um perfil parabólico e na saída uma pressão constante ( $p_{out}$ ). A malha utilizada para o

problema é formada por 36000 elementos e 6970 nós, sendo considerado um passo de tempo igual a  $6.2 \times 10^{-5}$  segundos. A Fig. 7 mostra a malha bem como as dimensões da artéria. Os resultados são obtidos utilizando o caso pré-carregado para inicializar a deformação, com uma pressão média de  $1510 \text{ dyn/cm}^2$  na interface. As propriedades e parâmetros necessários para o problema se encontram na Tab. 3. Destacamos que, com exceção do módulo de Young, todos os parâmetros do experimento são fisiologicamente reais.

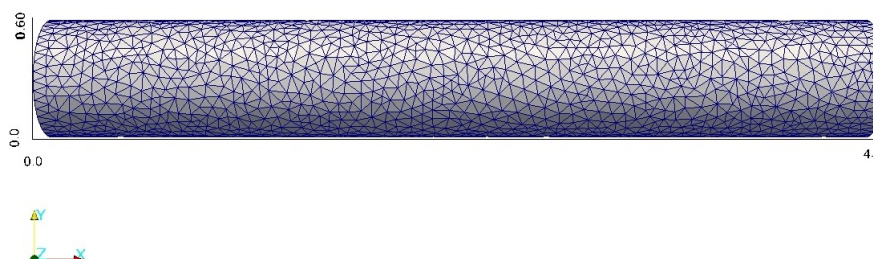


Figura 7: Dimensões e malha da artéria

Tabela 3: Propriedades e parâmetros para a artéria idealizada

| $\rho$          | $\mu$               | $E$                | $\rho^s$        | $\nu^s$ | $k$ | $\zeta$ | $V_{max}$ | $p_{out}$         |
|-----------------|---------------------|--------------------|-----------------|---------|-----|---------|-----------|-------------------|
| $\text{g/cm}^3$ | $\text{dyn.s/cm}^2$ | $\text{dyn/cm}^2$  | $\text{g/cm}^3$ | -       | -   | cm      | cm/s      | $\text{dyn/cm}^2$ |
| 1.06            | 0.04                | $4.07 \times 10^6$ | 1.09            | 0.5     | 5/6 | 0.03    | 45        | 1330              |

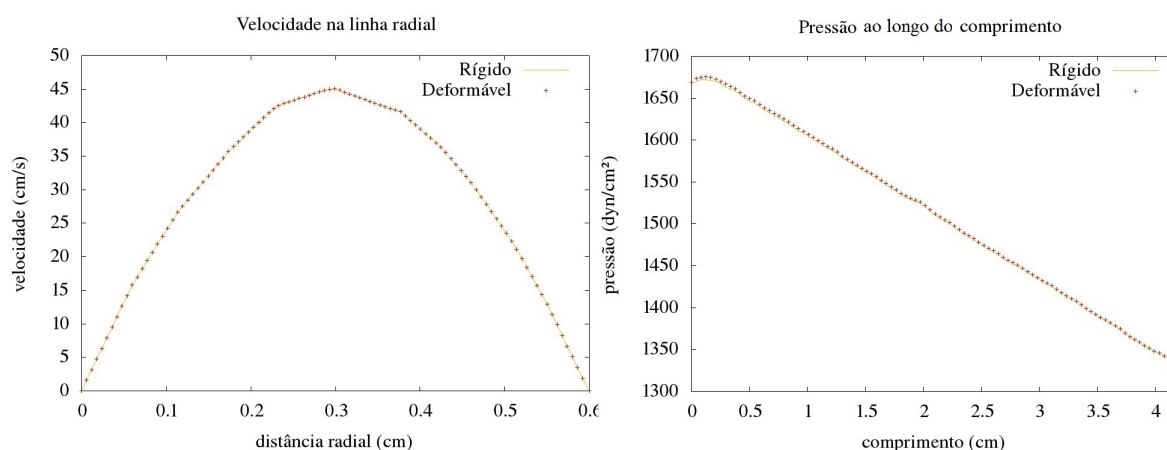
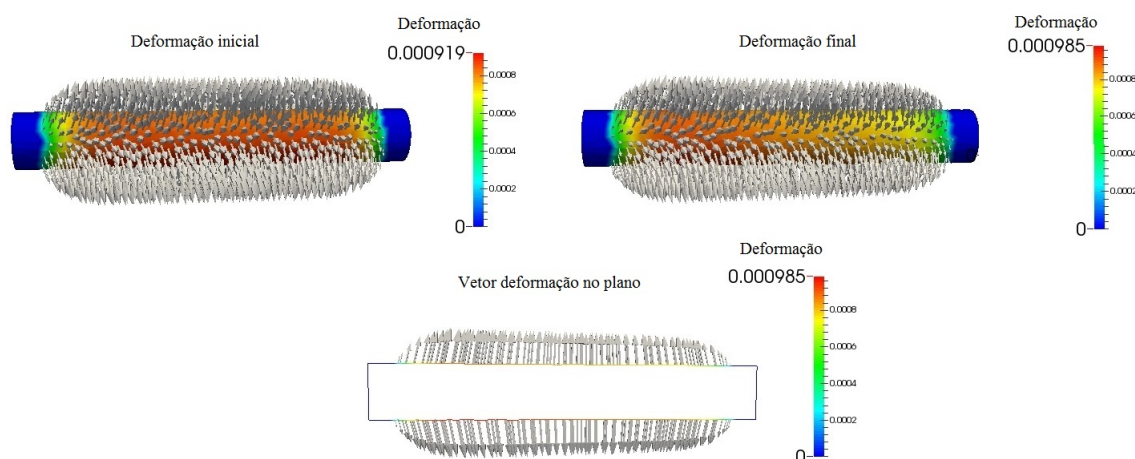


Figura 8: Velocidade e pressão

A Fig. 8 apresenta a velocidade na linha radial ( $x = 2.1 \text{ cm}$ ) e a pressão ao longo do comprimento para os problemas rígido e deformável até que uma tolerância pré-estabelecida de  $10^{-4}$  seja atingida para a norma relativa da velocidade. O mesmo perfil parabólico do exemplo anterior é considerado para a artéria idealizada. Podemos observar que após atingir a tolerância, tanto o caso rígido como o deformável possuem a configuração parabólica. Além disso, a velocidade na interface é zero e a pressão decai linearmente até o valor imposto na saída. Esses

resultados são esperados, pois devido a imposição de fluxo constante, o escoamento é consequência do gradiente constante de pressão fazendo com que o problema atinja o estado de equilíbrio, obtendo uma deformação fixa.



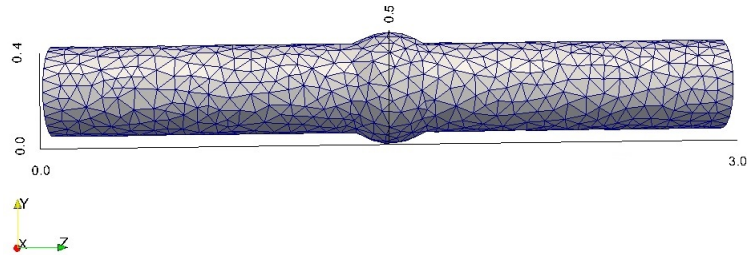
**Figura 9: Vetores deformação**

A Fig. 9 mostra os vetores da deformação. O deslocamento inicial representa a inicialização do problema deformável com a pré-carga proveniente da pressão do caso rígido. Já o deslocamento final, representa a deformação após o problema atingir a tolerância pré-fixada. Foi gerado um plano longitudinal no centro da artéria para visualização dos vetores deslocamento neste plano. Observa-se que a deformação inicial e a final são próximas, pois a inicialização do problema começou com uma carga de pressão inicial, proveniente do caso hidrostático, e as paredes dos problemas fisiológicos possuem uma carga inicial na direção radial e longitudinal. Os vetores de deformação apontam radialmente para fora da artéria, devido a força de pressão que o fluido exerce na interface. O deslocamento máximo obtido no problema foi de 0.000985 cm e o percentual de deformação ficou em torno de 3.28%, não ultrapassando o limite de pequenas deformações que é de 5% (Figuerola et al., 2006).

### 4.3 Artéria Aneurismática

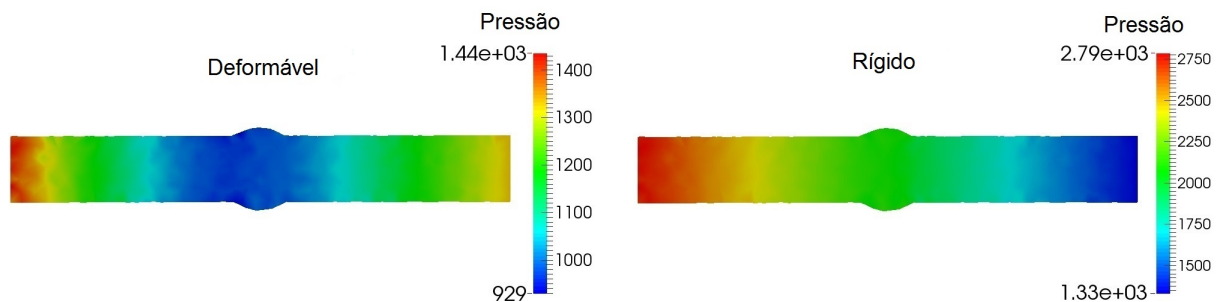
Neste experimento vamos considerar uma velocidade pulsátil na entrada, a fim de obter o comportamento do método para uma situação mais realista, uma vez que fluxos constantes não representam boas condições de contorno para modelos de artéria. A velocidade na entrada é dada por:  $v_{in} = V_m (1 + \sin(2\pi t/T))$ , onde  $V_m = 13.5$  cm/s,  $t$  é o tempo atual e  $T = 0.2$  segundos é o período. Na saída foi considerada uma pressão constante  $p_{out} = 1330$  dyn.s/cm<sup>2</sup>. A geometria da artéria tem raio de 0.2 cm e comprimento de 3.0 cm, conforme Fig. 10. No ponto médio da artéria existe uma esfera com 0.25 cm de raio representando o aneurisma. A malha da artéria aneurismática é formada por 13631 elementos e 2897 nós, sendo considerado um passo de tempo igual a  $1.14 \times 10^{-4}$  segundos. As propriedades e demais parâmetros considerados encontram-se na Tab. 1.

A Fig. 11 mostra a pressão no tempo de 0.15 segundos para os problemas rígido e deformável e as Figs. 12 e 13 apresentam os vetores deformação e vetores velocidade na interface e no fluido no tempo de 0.05 segundos. Podemos observar na Fig. 11 que o comportamento da

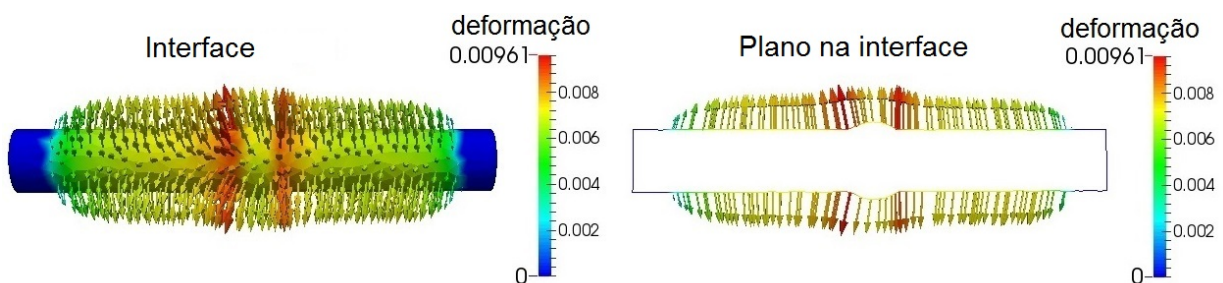


**Figura 10: Parâmetros geométricos e malha para artéria aneurismática**

pressão para os casos rígido e deformável são bem diferentes, principalmente na região aneurismática. Esta situação não ocorreu no caso de ser considerado fluxo constante e ausência de patologias nas artérias, como mostra a Fig. 8. Próximo a região aneurismática, observamos um aumento da velocidade na interface, caracterizando a irregularidade do escoamento na presença do aneurisma (Fig. 13). Devido a esse fato, são geradas concentrações de tensões em determinadas regiões ocasionando um possível rompimento da parede. Na Fig. 12 observamos que as maiores deformações estão no início e no fim do aneurisma, ocorrendo um aumento da tensão na parede da artéria nessa região. A máxima deformação no experimento foi de 0.00961cm obtendo um percentual máximo de 9.61% de deformação, ultrapassando o limite esperado para pequenas deformações (cerca de 5%, conforme descrito por Figueroa et al. (2006)). Este fato ocorreu, pois o módulo de elasticidade utilizado para o experimento foi muito pequeno (ver Tab. 1), comparado com situações reais.



**Figura 11: Pressão do problema rígido e deformável para  $t = 0.15$  segundos.**



**Figura 12: Vetores deformação para  $t = 0.05$  segundos.**

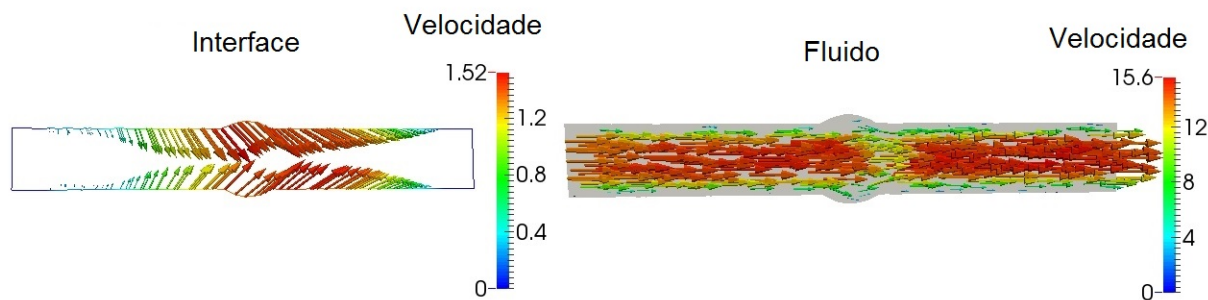


Figura 13: Vetores velocidade para  $t = 0.05$  segundos.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma implementação, utilizando a Biblioteca de domínio público FEniCS, da formulação estabilidade SUPG/PSPG e LSIC para o método de impulso acoplado aplicado em problemas de interação fluido estrutura.

O CMM-FSI mostrou ser um método eficiente e simples para a simulação de problemas deformáveis tridimensionais. O método faz o acoplamento das equações do sólido ao problema variacional do fluido como uma condição de contorno. Sendo assim, é acrescido pouco esforço computacional em relação ao problema rígido. Além disso, o problema deformável depende fortemente da forma de inicialização da deformação, sendo desejável optar por uma pré carga, eliminando as oscilações iniciais. A Biblioteca FEniCS utilizada gerenciou as grandes dificuldades relacionadas com as equações de problemas IFE, condições de contorno, entre outros aspectos, liberando o pesquisador para se concentrar em aspectos mais relevantes dos problemas.

## 6 REFERÊNCIAS

Bazilevs, Y., Takizawa, K. & Tezduyar, T., 2013. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*, Wiley Series in Computational Mechanics, Wiley.

URL: <https://books.google.com.br/books?id=R-3-5ZNsQnMC>

Brebbia, C., 2009. *Modelling in Medicine and Biology VIII*, WIT transactions on biomedicine and health, Wessex Institute of Technology.

URL: <https://books.google.mv/books?id=cNeWylqevOIC>

Court, S. & Fournié, M., 2015. A fictitious domain finite element method for simulations of fluid-structure interactions: The navier-stokes equations coupled with a moving solid, *Journal of Fluids and Structures* 55, 398–408.

Court, S., Fournié, M. & Lozinski, A., 2014. A fictitious domain approach for the stokes problem based on the extended finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 74(2), 73–99.

de Leval, M., Dubini, G., Migliavacca, F., Jalali, H., Camporini, G., Redington, A. & Pietrabissa, R., 1996. Use of computational fluid dynamics in the design of surgical procedures: Application to the study of competitive flows in cavopulmonary connections, *The Journal of*

*Thoracic and Cardiovascular Surgery* 111(3), 502 – 513.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022522396703021>

Elias, R. N., 2007. Estrutura de dados por arestas para a simulação paralela de escoamentos incompressíveis pelo método estabilizado de elementos finitos., PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.

**URL:** [http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select\\_action=&coobra=89634](http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&coobra=89634)

Figueroa, C. A., Vignon-Clementel, I. E., Jansen, K. E., Hughes, T. J. & Taylor, C. A., 2006. A coupled momentum method for modeling blood flow in three-dimensional deformable arteries, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195(41), 5685 – 5706. John H. Argyris Memorial Issue. Part II.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578250500513X>

Figueroa, C., Jansen, K., J R Hughes, T. & Taylor, C., 2004. A coupled momentum method to model blood flow in deformable arteries.

Glagov, S., CK, Z., Giddens, D. & Ku, D., 1988. Hemodynamics and atherosclerosis. insights and perspectives gained from studies of human arteries, 112, 1018–31.

Gomes, H. C., 2013. Método dos elementos finitos com fronteiras imersas aplicado a problemas de dinâmica dos fluidos e interação fluido-estrutura., PhD thesis, Escola Politecnica, Universidade de São Paulo, São Paulo. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas.

**URL:** <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3144/tde-26122013-150059/>

Helmig, J., 2013. ‘A numerical investigation of the stability of different schemes for a simplified fluid-structure interaction scheme with application to physiological problems.’. Bachelor Thesis.

Kamensky, D., Hsu, M.-C., Schillinger, D., Evans, J. A., Aggarwal, A., Bazilevs, Y., Sacks, M. S. & Hughes, T. J., 2015. An immersogeometric variational framework for fluid-structure interaction: Application to bioprosthetic heart valves, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284, 1005–1053. Isogeometric Analysis Special Issue.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514004101>

Kuhl, E., Hulshoff, S. & de Borst, R., 2003. An arbitrary lagrangian eulerian finite-element approach for fluid-structure interaction phenomena, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57(1), 117–142.

**URL:** <http://dx.doi.org/10.1002/nme.749>

Kumagai, I., 2002. On the anatomy of mantle plumes: effect of the viscosity ratio on entrainment and stirring, *Earth and Planetary Science Letters* 198(1), 211 – 224.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012821X02005137>

Laganá, K., Dubini, G., Migliavacca, F., Pietrabissa, R., Pennati, G., Veneziani, A. & Quarteroni, A., 2002. Multiscale modeling as a tool to prescribe realistic boundary conditions for the study of surgical procedures, 39, 359–64.

Logg, A., Mardal, K. & Wells, G., 2012. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book*, Lecture Notes in Computational Science and Engi-

neering, Springer Berlin Heidelberg.

**URL:** [https://books.google.com.br/books?id=ASWN\\_VRr1NQC](https://books.google.com.br/books?id=ASWN_VRr1NQC)

Magosso, E. & Ursino, M., 2002. Cardiovascular response to dynamic aerobic exercise: A mathematical model, *Medical and Biological Engineering and Computing* 40(6), 660–674.

**URL:** <https://doi.org/10.1007/BF02345305>

Migliavacca, F., Kilner, P. J., Pennati, G., Dubini, G., Pietrabissa, R., Fumero, R. & de Leval, M. R., 1999. Computational fluid dynamic and magnetic resonance analyses of flow distribution between the lungs after total cavopulmonary connection., *IEEE transactions on bio-medical engineering* 46 4, 393–9.

Mittal, S. & Tezduyar, T., 1994. Massively parallel finite element computation of incompressible flows involving fluid-body interactions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 112(1), 253 – 282.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782594900299>

Mittal, S. & Tezduyar, T. E., 1995. Parallel finite element simulation of 3d incompressible flows: Fluid-structure interactions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 21(10), 933–953.

Moore, W., 1991. *Vascular surgery: a comprehensive review*, number v. 331 in ‘Vascular Surgery: A Comprehensive Review’, Saunders.

**URL:** <https://books.google.com.br/books?id=IZBsAAAAMAAJ>

Oshima, M., Torii, R., Kobayashi, T., Taniguchi, N. & Takagi, K., 2001. Finite element simulation of blood flow in the cerebral artery, 191, 661–671.

Perktold, K. & Rappitsch, G., 1995. Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model, 28, 845–56.

Perktold, K., Resch, M. & O. Peter, R., 1991. Three-dimensional numerical analysis of pulsatile flow and shear stress in the carotid artery bifurcation, 24, 409–20.

R. Cebal, J., Castro, M., Soto, O., LÃ¶hner, R. & Alperin, N., 2003. Blood-flow models of the circle of willis from magnetic resonance data, 47, 369–386.

Salmon, S., Marc, T. & Gerbeau, J.-F., 2003. Medical image - based computational model of pulsatile flow in saccular aneurisms, 37.

Sanches, R. & Coda, H., 2009. Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura, *International journal for numerical methods in engineering* 10(43), 33–54.

Selim, K. & Logg, A., 2017. Simulating heart valve dynamics in fenics.

Shakib, F., Hughes, T. J. & Johan, Z., 1991. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. the compressible euler and navier-stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89(1), 141 – 219. Second World Congress on Computational Mechanics.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782591900414>

Shojima, M., Oshima, M., Takagi, K., Torii, R., Hayakawa, M., Katada, K., Morita, A. &

Kirino, T., 2004. Magnitude and role of wall shear stress on cerebral aneurysm: Computational fluid dynamic study of 20 middle cerebral artery aneurysms, 35, 2500–5.

Stein, K., Benney, R., Kalro, V., Tezduyar, T. E., Leonard, J. & Accorsi, M., 2000. Parachute fluid–structure interactions: 3-d computation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(3), 373–386.

Steinman, D. A., 2002. Image-based computational fluid dynamics modeling in realistic arterial geometries, *Annals of Biomedical Engineering* 30(4), 483–497.

**URL:** <https://doi.org/10.1114/1.1467679>

Stergiopoulos, N., Young, D. & Rogge, T., 1992. Computer simulation of arterial flow with applications to arterial and aortic stenoses, *Journal of Biomechanics* 25(12), 1477 – 1488.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002192909290060E>

Taylor, C. A., Draney, M. T., Ku, J. P., Parker, D., Steele, B. N., Wang, K. & Zarins, C. K., 1999. Predictive medicine: computational techniques in therapeutic decision-making, *Computer aided surgery* 4(5), 231–247.

Taylor, C. A., Hughes, T. J. R. & Zarins, C. K., 1998. Finite element modeling of three-dimensional pulsatile flow in the abdominal aorta: Relevance to atherosclerosis, *Annals of Biomedical Engineering* 26(6), 975–987.

**URL:** <https://doi.org/10.1114/1.140>

Tezduyar, T., Behr, M. & Liou, J., 1992. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces-the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. the concept and the preliminary numerical tests, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94(3), 339 – 351.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004578259290059S>

van de Vosse, F., de Hart, J., van Oijen, C., Bessems, D., Gunther, T., Segal, A., Wolters, B., Stijnen, J. & Baaijens, F., 2003. Finite-element-based computational methods for cardiovascular fluid-structure interaction, *Journal of Engineering Mathematics* 47(3), 335–368.

**URL:** <https://doi.org/10.1023/B:ENGI.00000007985.17625.43>

Vignon-Clementel, I. E., Figueroa, C. A., Jansen, K. E. & Taylor, C. A., 2006. Outflow boundary conditions for three-dimensional finite element modeling of blood flow and pressure in arteries, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195(29), 3776 – 3796. Absorbing Boundary Conditions.

**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782505002586>

Wren, G. P., Ray, S., Aliabadi, S. & Tezduyar, T., 1997. Simulation of flow problems with moving mechanical components, fluid–structure interactions and two-fluid interfaces, *International journal for numerical methods in fluids* 24(12), 1433–1448.