



ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS MISTAS SEMICONTÍNUAS

Emmanuel Egito Oliveira Candeira Marinho

João Batista Marques Sousa Júnior

e_egito@hotmail.com

joabatistasousajr@hotmail.com

Universidade Federal do Ceará

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Estrutural e Construção Civil

Campus do Pici, Bloco 728, CEP 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brasil

Resumo. *As estruturas metálicas ganham cada vez mais espaço na construção civil brasileira, desde obras pesadas até as obras residenciais. É cada vez mais comum os engenheiros adotarem o uso de construções mistas, ou seja, empregando-se o aço e concreto, como solução estrutural de seus projetos. Na prática dos projetos de construção metálica e mista, normalmente as vigas são consideradas como simplesmente apoiadas. A presença de armadura na laje junto aos apoios, no entanto, permite a transmissão de momentos entre vãos adjacentes, reduzindo as flechas totais e aumentando a resistência.. Isso representa uma vantagem, pois, permite ao projetista, por exemplo, empregar vigas com seções mais econômicas. Este trabalho pretende apresentar a implementação de modelos numéricos não-lineares para vigas mistas, incluindo ligações resistentes a momento, a fim de avaliar o comportamento de vigas mistas semicontínuas.*

Palavras-chave: Vigas mistas, ligações, interação parcial, semicontinuidade, elementos finitos

1. INTRODUÇÃO

As vigas mistas têm sido cada vez mais empregadas na construção civil. É usual e tradicional, em situações de projeto estrutural com estes elementos, admitir o comportamento como simplesmente apoiadas, sem transmissão de momentos para os apoios. Esta hipótese permite projetar os vãos da viga isoladamente e simplifica os procedimentos de cálculo. No entanto, a presença da laje (maciça, *steel deck* ou outra solução) com armadura negativa em sua face superior pode proporcionar uma transmissão parcial de momentos fletores nas extremidades, ou entre vãos adjacentes.

Soluções mais econômicas de projeto podem ser obtidas ao considerar a semicontinuidade, através da transmissão de momentos pela armadura negativa mencionada. Em relação ao sistema simplesmente apoiado, é necessário um aumento da armadura negativa na laje, que passa a não ser meramente uma armadura de controle de fissuração, sem acréscimo significativo no custo da ligação.

Os conceitos modernos de análise e projeto de estruturas tendem a estabelecer modelos mais sofisticados baseados em análise de desempenho, surgindo a demanda de se obter soluções numéricas, inclusive para a análise não linear (Pires, 2003; da Mata, 2005).

Um dos principais desafios para a simulação numérica de vigas mistas semicontínuas está na determinação das expressões, que definem a relação momento rotação de uma ligação mista, a serem utilizadas. Isso porque esta relação vem de curvas obtidas experimentalmente ou de simplificações destas curvas experimentais, encontradas, por exemplo, na norma brasileira (NBR8800, 2008) e no Eurocode 4 (2005). Estas expressões devem incorporar com fidelidade as principais características das ligações.

As vigas mistas consistem em um perfil de aço e uma laje de concreto, conectadas entre si por meio de dispositivos mecânicos, tais como conectores metálicos. Uma importante característica desses elementos é a possibilidade para deslocamentos relativos entre as camadas, que geralmente é denominada como interação parcial, deslizamento relativo ou conexão deformável (Silva, 2006).

Esse trabalho apresenta um procedimento inicial, baseado em Elementos Finitos, para a análise numérica não linear de vigas mistas, com a consideração da existência de ligações semi-rígidas em suas extremidades. No caso de ligações mistas semirrígidas com continuidade da laje, estas vigas são denominadas semicontínuas. Neste procedimento, os elementos finitos da viga mista não-linear com interação parcial são combinados com molas não-lineares para avaliar melhor o efeito da incorporação da semicontinuidade no projeto estrutural. As soluções de elementos finitos para esses tipos de problemas foram desenvolvidas há algum tempo e os modelos clássicos Euler-Bernoulli e Timoshenko são os mais empregados (Sousa Jr. et al, 2010).

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar a formulação inicial para a análise não-linear numérica de vigas mistas com deslizamento (interação parcial) e realizar um estudo comparativo da qualidade da resposta de alguns elementos finitos especificamente projetados para resolver esse problema.

2. FORMULAÇÃO

O elemento finito a ser empregado neste trabalho permite a definição de múltiplas camadas de deslizamento relativo, além de contemplar a não-linearidade física e geométrica. A primeira etapa para o desenvolvimento da formulação em Elementos Finitos é definir o número de camadas e o número de nós para interpolação dos deslocamentos axiais.

Na região da ligação, são criados dois nós adicionais, um imediatamente à esquerda e outro à direita da ligação. Cada nó adicional incorporará uma mola não linear e necessitará da definição de uma expressão algébrica que representará o momento em função da rotação relativa. Estas relações momento-rotação dependem da ligação presente nos dois lados da viga mista, e podem ser obtidas através de modelos numéricos complexos ou simplificados, ou ser obtidas através de dados experimentais (Li et al., 2000). Teremos então, um momento à esquerda e um à direita, sendo que ambos serão definidos em função da rotação ($f(\theta)$, onde θ é a rotação). A figura 1 ilustra um modelo com a representação dos nós para uma viga, incluindo a região da ligação.

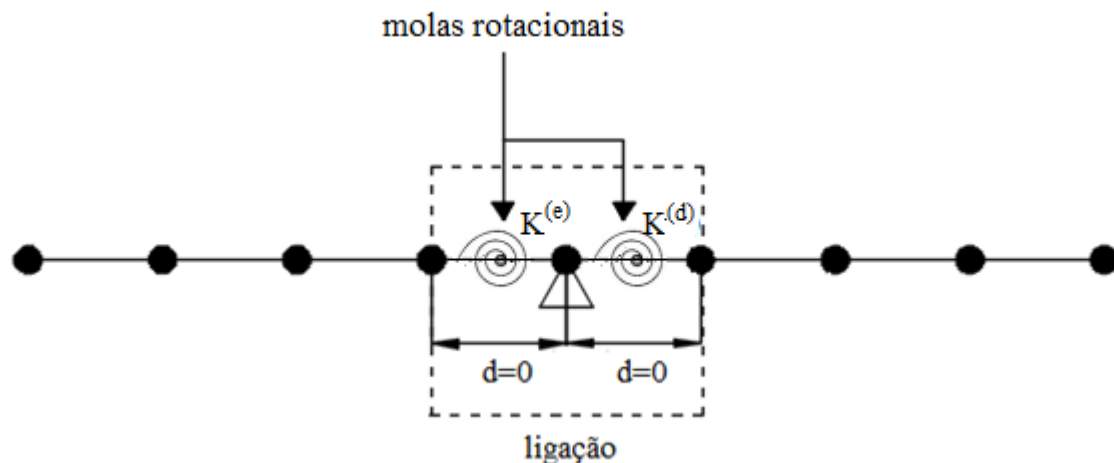


Figura 1. Representação dos nós em uma viga para a formulação em elementos finitos.

As formulações que serão apresentadas a seguir valem para uma viga mista com várias camadas. No caso de uma viga mista com duas camadas (situação mais usual), temos que as equações cinemáticas são:

- Deslocamentos axiais para as duas camadas:

$$u_{\alpha}(x, y) = u_{\alpha}^0(x) - (y - y_{\alpha})\theta(x) = u_{\alpha}^0(x) - (y - y_{\alpha})v_{,x}^0 \quad \alpha = 1, 2 \quad (1)$$

- Deslizamento na região da interface entre os elementos:

$$s(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + h v_{,x}^0 \quad (2)$$

Para a equação do deslizamento mostrada acima, considerou-se a hipótese de grandes deslocamentos, bem como rotações moderadas. Tendo como base a formulação Lagrangiana, podem-se determinar as deformações derivando-se a equação dos deslocamentos axiais (equação (1)). Assim, para cada camada, chega-se na expressão:

$$\epsilon_{\chi\alpha} = \epsilon_{\alpha}^0 + (y - y_0)\kappa \quad (3)$$

Onde κ representa a curvatura.

Para uma viga mista de seção transversal genérica, as expressões para o momento e a força normal são:

$$N = \int_A \sigma dA = \int_{y_{inf}}^{y_{sup}} \sigma(\epsilon_{\chi\alpha}(y)) \cdot b(y) dy \quad (4)$$

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_{y_{inf}}^{y_{sup}} \sigma(\epsilon_{\chi\alpha}(y)) \cdot b(y) \cdot y dy \quad (5)$$

Para determinar as equações de equilíbrio através do Método dos Elementos Finitos em problemas mais complexos, como o caso da viga mista, empregam-se princípios variacionais. Neste trabalho, foi empregado o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Por este princípio, o trabalho interno, para um elemento isolado, é a soma dos trabalhos realizados em cada uma das camadas da viga, mais o trabalho realizado na interface entre as camadas.

Seja $\mathbf{u}$ o vetor dos deslocamentos axiais, ϵ o vetor das deformações. Matricialmente, o vetor das deformações ϵ é obtido derivando, em x , o vetor dos deslocamentos axiais $\mathbf{u}$. Assim, chega-se na seguinte expressão:

$$\epsilon = \partial \mathbf{u} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2^0 \\ \kappa \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \frac{1}{2}v_{,x}^0\partial_x \\ 0 & \partial_x & \frac{1}{2}v_{,x}^0\partial_x \\ 0 & 0 & -\partial_{xx} \\ -1 & 1 & h\partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ v^0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A variação das deformações é dada matricialmente pela expressão abaixo:

$$\delta \epsilon = \bar{\partial} \delta \mathbf{u} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \delta \epsilon_1^0 \\ \delta \epsilon_2^0 \\ \delta \kappa \\ \delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & v_{,x}^0\partial_x \\ 0 & \partial_x & v_{,x}^0\partial_x \\ 0 & 0 & -\partial_{xx} \\ -1 & 1 & h\partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1^0 \\ \delta u_2^0 \\ \delta v^0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Nessa formulação, a função de interpolação empregada para o deslocamento axial foi um polinômio de segundo grau enquanto que, para o deslocamento transversal, foi utilizado como função interpoladora um polinômio de terceiro grau.

Considerando o vetor dos deslocamentos nodais e Φ a função interpoladora, têm-se as seguintes expressões:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{d} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \phi_u^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \phi_u^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \phi_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^0 \\ \mathbf{u}_2^0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Relacionando as deformações com a função de interpolação, tem-se, na forma matricial, a seguinte equação.

$$\delta \epsilon = \bar{\partial} \Phi \delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{d} \quad \delta \epsilon = \begin{bmatrix} \phi_{u,x}^T & \mathbf{0} & \mathbf{v}^T \phi_{v,x} \phi_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \phi_{u,x}^T & \mathbf{v}^T \phi_{v,x} \phi_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\phi_{v,xx}^T \\ -\phi_u^T & \phi_u^T & h\phi_{v,x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1^0 \\ \delta u_2^0 \\ \delta v^0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Visto isso, o trabalho interno pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \delta \epsilon^t dx \quad (10)$$

Substituindo a equação (9) na expressão do trabalho interno (10), consegue-se reescrever o trabalho interno em função do vetor de forças internas:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \delta \epsilon^T \sigma dx = \delta d^T \int_0^l \bar{B}^T \sigma dx = \delta d^T g \quad (11)$$

A partir da expressão acima, pode-se então partir para o cálculo da matriz de rigidez tangente. A matriz de rigidez tangente é importante para o estudo da estabilidade da estrutura e para os métodos de obtenção da curva carga-deslocamento. Esta curva é de fundamental importância para a análise não linear.

A matriz de rigidez é obtida derivando-se o vetor de forças internas em função do deslocamento. Assim:

$$k = \frac{\partial g}{\partial d} = \int_0^l \frac{\partial \bar{B}^T}{\partial d} \sigma dx + \int_0^l \bar{B}^T \frac{\partial \sigma}{\partial d} dx \quad (12)$$

A primeira parcela da equação (12) é também conhecida como matriz de rigidez tangente do material, escrita da seguinte maneira:

$$k_{tm} = \int_0^l \bar{B}^T \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial d} dx = \int_0^l \bar{B}^T \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \bar{B} dx = \int_0^l \bar{B}^T C \bar{B} dx \quad (13)$$

Por sua vez, a segunda parcela da equação (12) é conhecida como matriz de rigidez geométrica, dada pela expressão:

$$k_g = \int_0^l \frac{\partial \bar{B}^T}{\partial d} \sigma dx = \int_0^l \frac{\partial (\bar{B}_1 N_1 + \bar{B}_2 N_2 + \bar{B}_3 (M_1 + M_2) + \bar{B}_4 S)}{\partial d} = \int_0^l \mathbf{B}_{NL} (N_1 + N_2) dx \quad (14)$$

A matriz $\mathbf{B}_{NL}$ é escrita da seguinte forma

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \phi_{v,x} \phi_{v,x}^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

Conforme mencionado anteriormente, a curva carga-deslocamento, que também é conhecido como caminho de equilíbrio, é uma ferramenta de extrema importância na análise não linear. Isso porque esta ferramenta permite analisar o comportamento da estrutura e a sua capacidade de carga.

Observa-se que, no caso da análise não linear de vigas mistas, o Princípio dos Trabalhos Virtuais nos conduz às equações de equilíbrio também não lineares, cujas soluções não são de simples obtenção (ou seja, determinadas de maneira direta). Frequentemente utilizam-se métodos iterativo-incrementais, onde as soluções destas equações são obtidas de maneira iterativa e numa faixa de tolerância pré-estabelecida. Pode-se citar como exemplos o Método Incremental de Euler e o Método de Newton Raphson. Neste trabalho, a atenção estará voltada em especial para o Método de Newton Raphson com controle de deslocamentos.

3. APLICAÇÕES

Como se trata de um trabalho em fase inicial de testes, não serão empregados nos exemplos a seguir toda a possibilidade de consideração de não-linearidades possíveis na solução numérica. Assim, apenas a não-linearidade geométrica será considerada, enquanto os materiais, o deslizamento relativo e a relação momento-rotação nas ligações serão consideradas lineares.

3.1 Viga simplesmente apoiada com ligações semirrígidas.

O primeiro exemplo de aplicação do procedimento é para uma viga com um vão e dois apoios, submetida a uma carga uniformemente distribuída, conforme mostrada na figura 3. Serão consideradas molas lineares nas duas extremidades da viga no intuito de simular uma ligação flexível com comportamento elástico.

A Figura 2 apresenta a discretização adotada no problema para a viga. Neste exemplo, a força de deslizamento, na região da interface, é dada pela seguinte relação linear:

$$F(s) = 50.000s \quad (17)$$

Para os dois materiais que compõem a seção, foram utilizadas as seguintes relações tensão-deformação:

$$\sigma(\epsilon) = 12000000\epsilon \quad (18)$$

$$\sigma(\varepsilon) = 8000000 \varepsilon \quad (19)$$

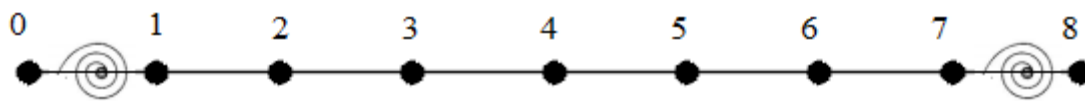


Figura 2. Discretização da viga mista.

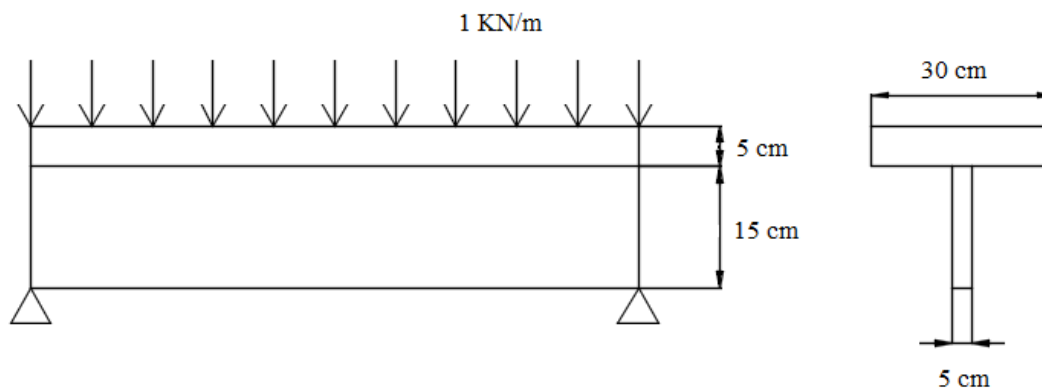


Figura 3. Representação da viga de 1 vão e 2 apoios.

Para a modelagem do problema foram aplicadas três relações momento-rotação ($M(\theta)=0,1\theta$; $M(\theta)=100\theta$ e $M(\theta)=1.000\theta$) na região das ligações. Para ilustrar o comportamento da ligação mista, estabeleceu-se, para cada relação de momento, as respectivas curvas de carga-deslocamento, mostradas no gráfico 1. Estas curvas referem-se ao ponto médio do vão livre da viga, onde o deslocamento é máximo.

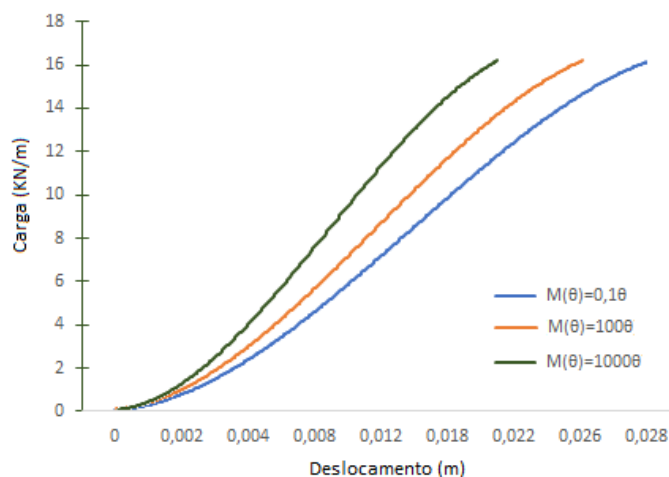


Figura 4. Curvas carga-deslocamento do exemplo 1.

3.2 Viga com dois vãos e 3 apoios.

Neste exemplo, toma-se uma viga mista com dois vãos (figura 4), onde cada vão mede 4,0 metro. A seção transversal da viga e a força de deslizamento são exatamente iguais ao exemplo dado na seção 3.1. A figura 5 apresenta a discretização para a viga mista. As relações tensão-deformação dos materiais utilizadas neste exemplo são exatamente iguais às do exemplo anterior.

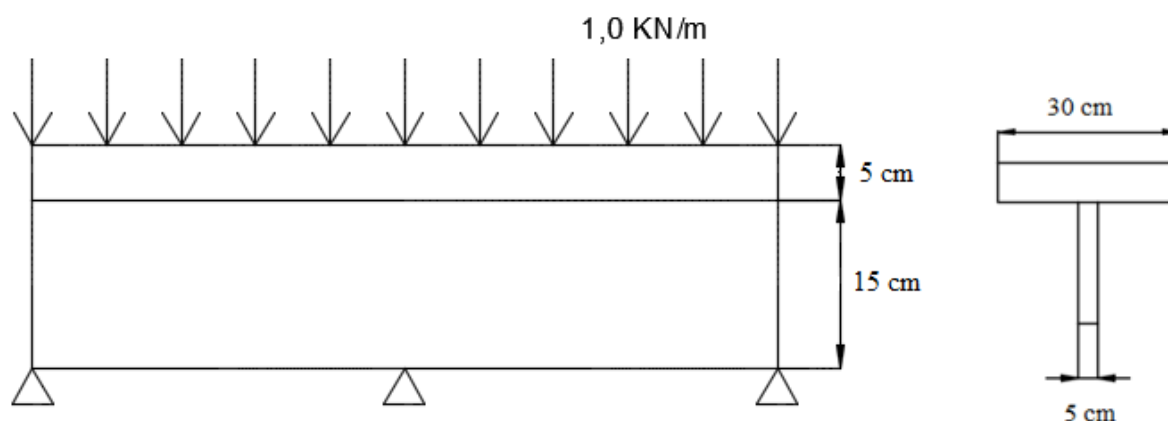


Figura 5. Viga com 2 vãos.

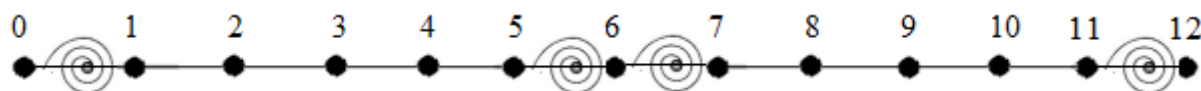


Figura 5. Discretização da viga mista com dois vãos.

Da mesma maneira que o exemplo anterior, foram aplicadas três relações momento-rotação ($M(\theta)=0,1\theta$; $M(\theta)=100\theta$ e $M(\theta)=1.000\theta$) na região das ligações. Para ilustrar o comportamento da ligação mista, estabeleceu-se, para cada relação de momento, as respectivas curvas de carga-deslocamento, mostradas na Figura 6. Estas curvas referem-se ao ponto médio do vão livre da viga.

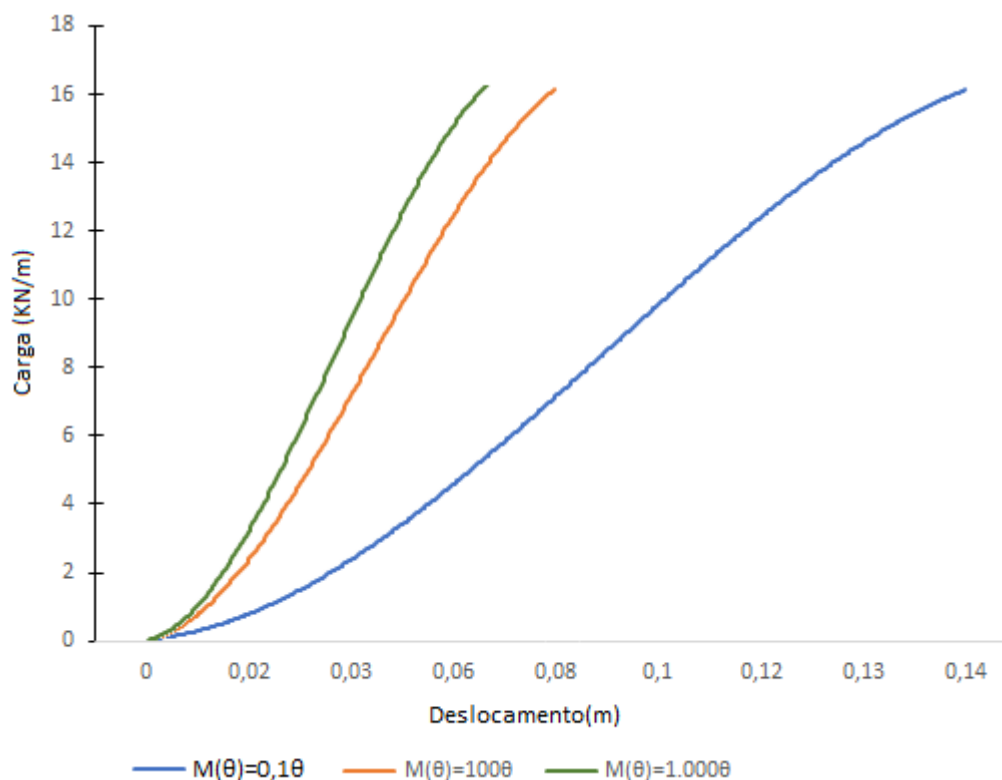


Figura 6. Resultados para deslocamento de viga com dois vãos.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, um elemento finito para análise não-linear física e geométrica de vigas mistas com interação parcial foi acoplado a um esquema de molas em série nas extremidades, com o objetivo de simular vigas com semicontinuidade. Como se trata de uma etapa inicial no trabalho, somente foi considerada a não-linearidade geométrica e os materiais foram considerados elásticos, como também considerado por outros autores (Oliveira, 2003).

Com base nas observações das curvas carga-deslocamento obtidas, pode-se avaliar a influência da ligação semirrígida no comportamento das vigas, surgindo um grande aumento de rigidez global em função das molas nos apoios, com consequente diminuição de flechas.

Os resultados obtidos nas próximas etapas, onde se introduzirão as não-linearidades do material, das relações momento-rotação nas molas e nas interfaces entre o aço e o concreto, permitirão obter resultados de vigas mistas semicontínuas com interação parcial.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, à PROAP/CAPES, e à FUNCAP pelo auxílio financeiro que possibilitou a realização e a apresentação deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Conceição, J. L. Ligação mista viga-pilar resistente a momento, Minas Gerais. 2011. 240f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. Concepts and applications of finite element analysis. 4. ed. Madison: John Wiley & Sons, Inc, 2001. 733p.
- Eurocode 4, ENV 1994-1-1:1992, Design of Composite Steel and Concrete Structures – Part – 1: General Rules and Rules for Buildings. Bruxelas: European Committee for standardization.
- Faella, C.; Martinelli, E.; Nigro, E. Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. Computers and Structures, v.80, p.1001-1009, 2002.
- Kotinda, T. I. Modelagem numérica de vigas mistas aço-concreto simplesmente apoiadas: ênfase ao estudo da interface laje-viga, São Paulo. 2006. 121f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Li, T. Q.; Nethercot, D. A.; Lawson, R. M. Required rotation of composite connections. Journal of Constructional Steel Research, v.56, p. 151-173, 2000.
- Mata, L. A. C. Método de análise de sistemas deslocáveis com ligações mistas de aço e concreto, fundamentado teórica e experimentalmente, Minas Gerais. 2005. 277f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Monagan, M. B.; Geddes, K. O.; Heal, K. M.; Labahn, G.; Vorroetter, S. M.; McCARRON, J.; DeMarco, P. Maple Introductory Programming Guide. 1. ed: Waterloo Maple Inc, 2005. 398p.
- NBR 8800 (2008): Associação Brasileira de Normas Técnicas, Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios, Rio de Janeiro.
- Oliveira, T. J. L. O. Análise de pisos mistos com ligações semi-rígidas, Rio de Janeiro. 2003. 116f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Pires, V. H. S. P. Automação do cálculo de vigas mistas semicontínuas incluindo ligações mistas, Minas Gerais. 2003. 198f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Silva, A. R. Análise numérica de vigas mistas com interação parcial, Minas Gerais. 2006. 176f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

Sousa JR, J. B. M.; Oliveira, C. E. M.; Da Silva, A. R. Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam-columns with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, v.66, p. 772-779, 2010.

Tamayo, J. L. P. Análise numérica de vigas mistas pelo método dos elementos finitos, Rio Grande do Sul. 2011. 164f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.