



DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO DE CABO PARA A ANÁLISE DINÂMICA DE LINHAS DE ANCORAGEM

Pedro Henrique Rios Silveira

Fábio Martins Gonçalves Ferreira

Eduardo Nobre Lages

pedro.silveira10@gmail.com

fabio.ferreira@lccv.ufal.br

enl@lccv.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas - UFAL

Centro de Tecnologia - CTEC

Laboratório de Computação Científica e Visualização - LCCV

Campus A.C. Simões - Tabuleiro do Martins, CEP 57072-970, Maceió, Alagoas, Brasil

Resumo. Neste trabalho, mostram-se o estudo, desenvolvimento e implementação de um elemento de cabo para a análise dinâmica de linhas de ancoragem de plataformas de petróleo. Inicia-se por apresentar uma revisão bibliográfica sobre a problemática dos sistemas de ancoragem, das estratégias de simulação das estruturas envolvidas e da formulação escolhida, baseada nas equações de catenária elástica em 3 dimensões. O elemento é então desenvolvido, bem como a sua estratégia de integração no tempo, realizada por meio de um algoritmo explícito, considerando-se efeitos de arrasto e de inércia. Na sequência, são apresentados exemplos de validação e calibragem, e se estuda a convergência e estabilidade do elemento. Por fim, apresenta-se um exemplo realista de sistema de ancoragem, ilustrando a viabilidade dos resultados, e se analisa o desempenho do elemento.

Palavras-chave: Águas profundas, C++, Catenária Elástica

1 INTRODUÇÃO

A exploração de petróleo em sistemas *offshore* carrega consigo alguns importantes desafios tecnológicos. Entre os diversos parâmetros que devem ser controlados, destaca-se a necessidade de restringir os movimentos do sistema flutuante a níveis aceitáveis (Chakrabarti, 2005).

A aplicação dessas restrições de movimento na unidade de exploração, em grande parte dos casos, é feita através de sistemas de tracionadores, linhas de ancoragem e ancoradores. As linhas de ancoragem servem de conexão entre os ancoradores, fixados ao solo marinho, e o sistema flutuante, cuja dinâmica se deseja conter (Chakrabarti, 2005).

É portanto bastante importante, do ponto de vista da análise dos sistemas de ancoragem como um todo, entender o comportamento mecânico de suas estruturas de linhas. No contexto de águas profundas, tal importância é ainda maior, visto que estas apresentam dimensões bastante elevadas, passando a ter ainda mais impacto nas respostas às solicitações ambientais. Contudo, analisar linhas de ancoragem é um problema complexo (Chakrabarti, 2005).

Compostas por longos cabos de aço ou material sintético, ou mesmo correntes, o comportamento mecânico de linhas de ancoragem é altamente não linear do ponto de vista geométrico. A não linearidade é oriunda da flexibilidade de tais estruturas, nas quais a rigidez à flexão, torção, cisalhamento e compressão são desprezíveis. Mais ainda, tais peças possuem enorme esbeltez, consequência de seus elevadíssimos comprimentos em relação às demais dimensões. Estas propriedades fazem com que as linhas de ancoragem sofram grandes deslocamentos até atingirem suas configurações de equilíbrio, ainda que estejam sob regime de pequenas deformações, ou seja, que possam ser consideradas fisicamente lineares (Karoumi, 1999; Thai e Kim, 2011; Chang, Park e Lee, 2008).

Para abordar o problema da forte não linearidade geométrica das estruturas de cabo, diversas metodologias foram propostas por diferentes autores. Dentre estas, uma particularmente comum baseia-se na discretização das linhas de ancoragem através de um grande número de elementos finitos de barra reta, conectados em suas extremidades via ligações articuladas (rótulas), ou seja, elementos de treliça com 3 graus de liberdade por nó (6 por elemento). O *DOOLINES* (Ferreira, 2005; Silveira, Lages e Ferreira, 2012), *framework* para análise de estruturas *offshore* delgadas para o qual os resultados deste trabalho serão convergidos, é um exemplo de aplicação que trabalha com tal estratégia.

Apesar de ser capaz de capturar apropriadamente o comportamento não linear de estruturas de cabo, especialmente em solicitação dinâmica, essa solução tem um problema: uma vez que a geometria curva das linhas é aproximada por elementos finitos de eixo reto, um grande número destes são necessários para a representação, acarretando em um elevado número de graus de liberdade e, portanto, de custo computacional. Também podem ser encontrados problemas de instabilidade numérica neste tipo de solução caso o passo de tempo adotado não seja suficientemente pequeno, problema agravado pelo fato de que o *DOOLINES*, entre outras aplicações similares, usa técnicas de integração explícitas.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo estudar, expandir e implementar formulações para elementos finitos de cabo dotados de representação interna de curvatura, possibilitando uma aproximação da geometria das linhas com um número menor de graus de liberdade. Acredita-se que esta redução tornará a análise computacionalmente menos onerosa, além de mais estável, mesmo para passos de tempo maiores, ao menos para certas configurações,

especialmente aqueles onde a dinâmica é menos intensa e as linhas apresentam maior curvatura (ancoragens em catenária e em *lazy-S*, por exemplo). O elemento a ser desenvolvido foi baseado nos trabalhos de Chang, Park e Lee (2008), Thai e Kim (2011) e Abad *et al.* (2013).

Para este elemento, as equações de catenária elástica em 3 dimensões são utilizadas na definição da geometria e resposta elástica das linhas, sendo essas não lineares nas relações força-posição. Tais relações não lineares são utilizadas, através do método de Newton-Raphson, para gerar configurações de equilíbrio para cada passo de tempo analisado. Uma vez definida a configuração, forças de arrasto com a água são consideradas através das equações de Morison (Morison, 1950), enquanto a integração dinâmica é feita através do algoritmo explícito de Chung-Lee (Chung e Lee, 1994) para a consideração de forças inerciais. As formulações desenvolvidas foram implementadas na linguagem de programação C++ utilizando-se recursos de programação orientada a objetos e práticas de otimização de desempenho, estas embasadas por Stroustrup (2013; 2014).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diferentes metodologias são empregadas para tratar a forte não linearidade de estruturas de cabo. Uma delas consiste em substituir sua geometria essencialmente curva por um único elemento de barra reta, para o qual se relaciona o módulo de elasticidade equivalente do elemento de barra com as propriedades mecânicas do cabo. Esta correlação é escrita como

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{EA(wL)^2}{12T^3}} \quad (1)$$

na qual E_{eq} é o módulo de elasticidade equivalente do elemento de barra, E o módulo de elasticidade real do material do cabo, A a área de sua seção transversal, w seu peso específico por unidade de comprimento, L sua projeção horizontal e T a tração no cabo. Com este módulo de elasticidade equivalente, constrói-se a matriz de rigidez do elemento de barra reta como nas análises clássicas de mecânica dos sólidos.

Esse tipo de linearização das equações de cabo, apesar de bastante simples, tem sido usada com relativo sucesso em casos onde estes são bastante tensionados e apresentam dimensão reduzida, de modo que sua geometria aproxime-se de uma reta, por exemplo no caso de pontes estaiadas. Contudo, para cabos mais longos e mais curvos, tal aproximação é inválida, uma vez que não representa apropriadamente o comportamento inerentemente não linear destes (Karoumi, 1999).

Outra tática comumente empregada para a análise de cabos consiste em representá-los como uma série de elementos de barra de eixo reto, conectados entre si por rótulas. Essa aproximação, apesar de capturar de forma muito mais precisa a não linearidade inerente à mecânica de cabos, apresenta dois problemas: a grande quantidade de elementos necessários para a análise, resultando em um elevado número de graus de liberdade (e, conseqüentemente, de custo computacional), e problemas de instabilidade numérica. Tal procedimento é, atualmente, o utilizado pelo *DOOLINES* (Ferreira, 2005; Silveira, Lages e Ferreira, 2012).

Por fim, uma solução alternativa, na qual se baseia este trabalho, consiste em usar elementos finitos de cabo na aproximação, os quais possuem representações internas de curvatura, resultando em análises com números significativamente menores de nós que os necessários na

metodologia anterior (baseada em elementos de treliça). Dentro do âmbito destes elementos finitos de cabo, nota-se também uma grande variedade de estratégias empregadas para a solução do problema.

Alguns autores, tais como Ozdemir (1979) e Ali e Abdel-Ghaffar (1995), entre outros, propuseram formulações clássicas de elementos finitos, baseadas em funções interpoladoras polinomiais e hipóteses simplificadoras diversas. Já autores como Chang, Park e Lee (2008), Thai e Kim (2011), Abad *et al.* (2013), *etc.*, por sua vez, basearam-se nas equações de catenária elástica para a construção dos elementos finitos. O segundo procedimento, em oposição às aproximações feitas via elementos finitos clássicos, é capaz de capturar efeitos não lineares e a geometria das linhas de forma precisa com um número menor de nós, segundos tais autores, razão pela qual foi adotada neste trabalho. De fato, observa-se que, para a resposta estática (desprezando-se efeitos viscosos e de inércia) sem efeito de correnteza, a geometria das linhas pode ser corretamente representada com tão poucos elementos quanto houverem mudanças na geometria ou na composição da linha. Uma linha com apenas um material e descrição geométrica única requereria, por exemplo, tão somente um único elemento para ser corretamente aproximada sob essa perspectiva estática.

Sob esse elemento finito de cabo desenvolvido com base nas equações de catenária elástica em 3 dimensões, o problema dinâmico é formulado. Para a consideração das forças de arrasto com a água, seja esse arrasto produzido pelo movimento do fluido ou da linha com relação ao referencial inercial, é utilizada uma generalização da equação de Morison (Morison, 1950), tal como apresentada e discutida em Journee e Massie (2001). Em Chakrabarti (2005) também podem ser encontradas as equações de Morison, bem como coeficientes recomendados por diferentes normais.

Para a consideração das forças inerciais, utiliza-se um procedimento de *Lumped Mass* para concentrar as massas dos elementos em pontos discretos ao longo do comprimento da linha. Nesses pontos, para definir uma integração no tempo, foi usado o algoritmo explícito de Chung-Lee (Chung e Lee, 1994). Tal algoritmo é um dos contemplados pelo *DOOLINES* (Ferreira, 2005; Silveira, Lages e Ferreira, 2012) e foi apresentado na tese de Silveira (2001), de onde se retirou o valor do coeficiente livre do método.

Por fim, uma vez formulado o elemento de catenária elástica, definida a metodologia de cálculo das forças viscosas e escolhido o algoritmo de integração temporal, parte-se para a implementação computacional. Para tanto, opta-se pela linguagem de programação C++. O uso dos recursos dessa linguagem, as técnicas de otimização utilizadas e a estruturação do código segundo os paradigmas da programação orientada a objetos e boas práticas de programação são embasados por Stroustrup (2013; 2014), ambos livros do criador da linguagem e um de seus ativos desenvolvedores.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção serão derivadas as equações de catenária utilizadas na elaboração do elemento de cabo proposto, bem como seu procedimento iterativo de solução. Também será apresentado o algoritmo de integração explícito utilizado, bem como a equação de Morison para o arrasto e as considerações simplificadoras adotadas para a utilização desta.

3.1 Catenária Elástica 3D

De uma maneira geral, equações de catenária, sejam elas elásticas ou inelásticas, bi ou tridimensionais, elástica partem do pressuposto de que o elemento em questão, seja ele um cabo ou corrente, responde apenas em tração, apresentando, portanto, resistência nula a esforços de compressão, flexão, cisalhamento e torção. Dessa forma, para a definição das equações no formato elástico tridimensional, parte-se de um elemento de cabo também em 3 dimensões, tal como definido na Fig. 1, na qual w_1 , w_2 e w_3 são as forças uniformemente distribuídas nas três direções cartesianas (x_1 , x_2 e x_3); f_1 , f_2 e f_3 são os componentes da força que atua no primeiro nó desse elemento nessas três direções, enquanto f_4 , f_5 e f_6 são os componentes no nó 2; L_0 e EA são, respectivamente, o comprimento indeformado do elemento e sua rigidez axial; e, por fim, l_1 , l_2 e l_3 são as projeções do elemento nas três direções cartesianas.

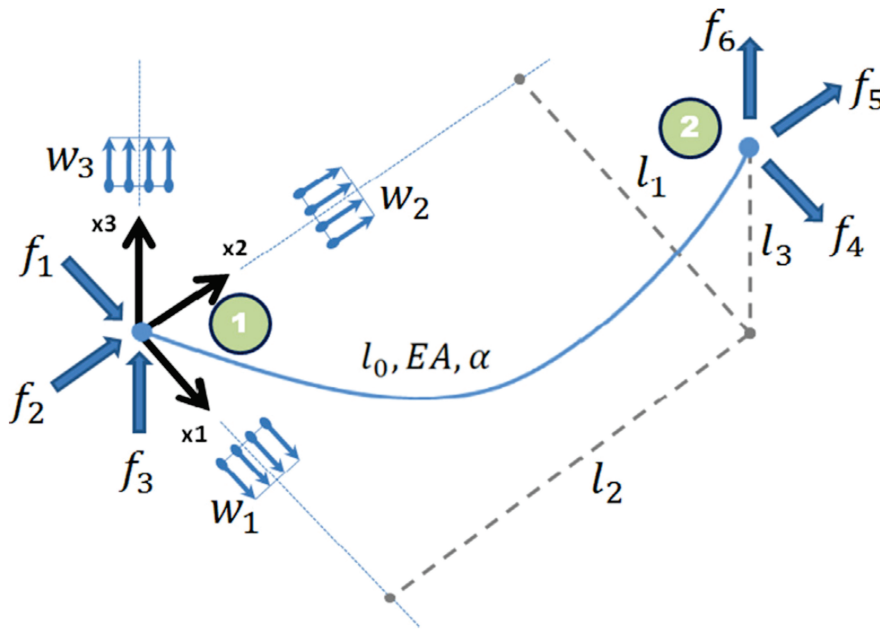


Figura 1: Representação de um cabo elástico sob ação de forças genéricas em 3D

Fonte: Abad *et al.* (2013)

Considerando-se uma porção qualquer do elemento, a partir da extremidade inicial, e impondo-se o balanço das forças nele atuantes, chega-se às 3 equações (uma para cada valor do índice i)

$$T \frac{dx_i}{dp} = -(w_i s + f_i) \quad (2)$$

nas quais s é a medida de comprimento de arco indeformado, sendo p a coordenada de comprimento de arco deformado e T a força de tração atuante na seção. As variáveis s e p são chamadas de coordenadas lagrangianas.

Há ainda uma condição de restrição geométrica, que fica escrita como

$$\left(\frac{dx_1}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dp} \right)^2 = 1 \quad (3)$$

Elevando-se ambos os lados das equações definidas pela variação do índice i em Eq. (2) ao quadrado e as somando, considerando-se a restrição geométrica, chega-se à equação em coordenadas lagrangianas para a tração dada por

$$T(s) = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (w_j s + f_j)^2} \quad (4)$$

Assumindo um regime de pequenas deformações, pode-se escrever

$$T(s) = EA\epsilon = EA \left(\frac{dp - ds}{ds} \right) = EA \left(\frac{dp}{ds} - 1 \right) \quad (5)$$

na qual ϵ é a deformação linear axial do cabo.

A relação entre as coordenadas cartesianas e lagrangianas pode ser escrita, usando a regra da cadeia, como

$$x_i(s) = \int_0^s dx_i = \int_0^s \frac{dx_i}{dp} \frac{dp}{ds} ds \quad (6)$$

Isolando as derivadas das coordenadas cartesianas na Eq. (2) e das coordenadas lagrangeanas na Eq. (5) e substituindo na Eq. (6), após se substituir, também, a expressão para a tensão dada pela Eq. (4), chega-se a

$$x_i(s) = \int_0^s \frac{-(w_i t + f_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 (w_j t + f_j)^2}} \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^3 (w_j t + f_j)^2}}{EA} + 1 \right) dt \quad (7)$$

Então, aplicando-se as condições de contorno definidas por

$$x_i(l_0) = l_i \quad (8)$$

chega-se, segundo Abad *et al.* (2013), a

$$l_i = -\frac{l_o f_i}{EA} - \frac{l_o^2 w_i}{2EA} + \frac{1}{w^3} \left[W w_i (T_1 - T_2) + (W^2 f_i - F w_i) \ln \left(\frac{\frac{F}{W} + T_1}{l_0 W + \frac{F}{W} + T_2} \right) \right] \quad (9)$$

na qual $W = \sqrt{\sum_{j=1}^3 w_j^2}$, $F = \sum_{j=1}^3 f_j w_j$, $T_1 = T(0)$ e $T_2 = T(l_0)$.

Considerando-se $w_1 = w_2 = 0$ e $w_3 = -w_0$, ou seja, que age sobre o cabo apenas uma carga vertical para baixo, neste caso em particular o peso próprio, bem como observando que, para essa configuração de carregamento, $T(l_0) = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + (w_0 l_0 - f_3)^2}$ e $T(0) = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$, chega-se às soluções

$$l_i = -\frac{l_o f_i}{EA} + \frac{f_i}{w_0} \ln \left[\frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + (w_0 l_0 - f_3)^2} + w_0 l_0 - f_3}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} - f_3} \right], \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

e

$$l_3 = -\frac{l_o f_3}{EA} - \frac{l_o^2 w_3}{2EA} + \frac{1}{w_0} \left(\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + (w_0 l_0 - f_3)^2} - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \right) \quad (11)$$

tais como apresentadas por Thai e Kim (2011) e outros. Equações análogas, em formato ligeiramente diferente, também são apresentadas por Chang, Park e Lee (2008). Para o caso de o problema ser bidimensional, essas equações recaem ainda nas utilizadas por Karoumi (1999), entre outros. Salienta-se que, para todos os exemplos apresentados neste trabalho, faz-se tal consideração de que atua apenas a força peso, de modo que, caso fosse desejado, tal formulação simplificada poderia ser usada para acelerar os cálculos em nível do elemento. Contudo, mantém-se a implementação da formulação generalizada, caso haja aplicação futura para tais distribuições em outras direções (por exemplo para consideração de efeitos de corrente, tratados neste artigo de outra maneira).

Prosseguindo com a manipulação das equações de catenária elástica, tem-se, segundo a Eq. (9), que os l_i são funções dos f_i . Logo, pode-se escrever

$$l_i = l_i(f_i) \quad (12)$$

e, portanto,

$$dl_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial l_i}{\partial f_j} df_j \quad (13)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{Bmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial f_1} & \frac{\partial l_1}{\partial f_2} & \frac{\partial l_1}{\partial f_3} \\ \frac{\partial l_2}{\partial f_1} & \frac{\partial l_2}{\partial f_2} & \frac{\partial l_2}{\partial f_3} \\ \frac{\partial l_3}{\partial f_1} & \frac{\partial l_3}{\partial f_2} & \frac{\partial l_3}{\partial f_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

De forma reduzida, pode-se escrever ainda

$$\{dl\} = [F_t]\{df\} \quad (15)$$

na qual $[F_t]$ é a matriz de flexibilidade tangente do cabo.

Essa matriz pode ser escrita, segundo Abad *et al.* (2013), como

$$\frac{\partial l_i}{\partial f_j} = b_0(i, j) - \frac{1}{W^3} \left[b_1(i, j) + b_2(i, j) \ln \left(\frac{\frac{F}{W} + T_1}{L_0 W + \frac{F}{W} + T_2} \right) \right] \quad (16)$$

na qual

$$b_0(i, j) = \begin{cases} -\frac{L_0}{EA}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (17)$$

$$b_1(i, j) = -W w_i \left[\frac{f_{j+3}}{T_2} + \frac{f_j}{T_1} \right] + (W^2 f_i) \left[\frac{W f_j + w_j (L_0 W + T_2)}{T_2 (L_0 W^2 + F + W T_2)} - \frac{W f_j + w_j T_1}{T_1 (F + W T_1)} \right] \quad (18)$$

e

$$b_2(i, j) = \begin{cases} w_i^2 - W^2, & i = j \\ w_i w_j, & i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

A matriz de rigidez tangente $[K_t]$, por sua vez, pode ser escrita simplesmente como

$$[K_t] = [F_t]^{-1} \quad (20)$$

enquanto a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema global $[Kg_t]$ pode ser escrita como

$$[Kg_t] = \begin{bmatrix} -[K_t] & [K_t] \\ [K_t] & -[K_t] \end{bmatrix} \quad (21)$$

Por fim, pode-se escrever

$$f_{i+3} = -(w_i L_0 + f_i), \quad i = 1, 3 \quad (22)$$

e, ainda,

$$f_{int} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}^T \quad (23)$$

em que $\{f_{int}\}$ é o vetor de forças internas nos nós do elemento, definindo-o, junto com a matriz de rigidez global, completamente em nível elástico.

3.2 Procedimento Iterativo de Solução

Para alcançar as reações nas extremidades que definem a configuração de equilíbrio do elemento de cabo, dadas as forças nodais e distribuídas atuantes, bem como a posição dessas extremidades, é necessário realizar um procedimento iterativo de Newton-Raphson. Tal necessidade é oriunda do fato de que as equações que definem as projeções dependem não linearmente das forças. O procedimento iterativo utilizado neste trabalho é o mesmo definido pelos autores Thai e Kim (2011), Abad *et al.* (2013), Karoumi (1999), entre outros. Inicia-se por estimar forças iniciais para o primeiro dos nós, sendo as forças no segundo obtidas através de um equilíbrio simples. As forças determinadas são então utilizadas para gerar as projeções e a matriz de flexibilidade tangente iniciais do procedimento iterativo. A diferença entre as projeções geradas e as reais, nomeadas $\{\bar{l}\}$, dão origem a um vetor, que por sua vez é utilizado para gerar um acréscimo nas forças de reação conforme a relação dada pelo método das forças, governada pela matriz de flexibilidade tangente. O acréscimo de forças é então somado à estimativa inicial, dando origem a uma nova estimativa, que por sua vez é utilizada para gerar uma nova matriz de flexibilidade e um novo vetor de projeções, e assim por diante até que um critério de convergência estipulado seja atingido. Tal procedimento pode ser matematicamente escrito como

$$\{df^i\} = [F^i]^{-1} \{\bar{l} - l^i\} \quad (24)$$

para obtenção do incremento de força $\{df^i\}$,

$$\{f^{i+1}\} = \{f^i\} + \{df^i\} \quad (25)$$

para obtenção das novas forças nodais $\{f^{i+1}\}$,

$$\{l^{i+1}\} = g_1(\{f^{i+1}\}) \quad (26)$$

para obtenção das novas projeções $\{l^{i+1}\}$, na qual $g_1(\{f^{i+1}\})$ são as funções não lineares apresentadas anteriormente que correlacionam forças e projeções e, por fim,

$$[F^{i+1}] = g_2(\{f^{i+1}\}) \quad (27)$$

para obtenção da nova matriz de flexibilidade $[F^{i+1}]$, na qual $g_2(\{f^{i+1}\})$ também foi apresentada na seção anterior deste trabalho e são as funções não lineares que correlacionam os termos da matriz de flexibilidade com os do vetor de forças.

Para estimar os valores iniciais das forças, (ou seja: o vetor $\{f^0\}$) usam-se as expressões

$$\lambda_0 = \begin{cases} 0,2, & L_0^2 \leq l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \\ 3 \left(\frac{L_0^2 - l_y^2}{l_x^2 + l_y^2} - 1 \right), & L_0^2 > l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \end{cases} \quad (28)$$

e

$$f^0 = -\frac{w}{2} \left\{ \frac{l_x}{\lambda_0} \quad \frac{l_x}{\lambda_0} \quad l_y \coth(\lambda_0) - L_0 \right\}^T \quad (29)$$

Para o caso em que a linha encontra-se na posição vertical, usa-se algum valor arbitrariamente alto para λ_0 , por exemplo 10^6 . Tal estimativa é utilizada pelos mesmos autores e considera forças distribuídas na direção z apenas.

Este procedimento, tal como apresentado pelos autores, contudo, tem algumas limitações. Quando a estimativa inicial de forças dada pela Eq. (29) é muito grosseira, como frequentemente é o caso, especialmente se muitas forças pontuais ou cargas distribuídas em direções diferentes da direção z são aplicadas, o vetor de projeções calculado difere significativamente do vetor prescrito. A diferença entre ambos os vetores, portanto, é muito grande. Como a matriz de flexibilidade tangente faz uma aproximação linear entre a relação não linear de incrementos de projeção com incrementos de força, tal que apenas incrementos pequenos podem ser tratados, a aplicação desse vetor grande de diferenças entre as projeções gera acréscimos de força também muito elevados. Tais incrementos elevados podem gerar, por sua vez, configurações ainda mais distantes do que as obtidas pela estimativa inicial e assim sucessivamente, fazendo o método divergir. Para contornar essas limitações, simplesmente se aplica um coeficiente de amortecimento: um fator de redução do incremento de deslocamentos aplicado ao procedimento. A Eq. (24) fica então escrita como

$$\{df^i\} = [F^i]^{-1} \frac{1}{\eta} \{\bar{l} - l^i\} \quad (30)$$

na qual η é o coeficiente de amortecimento aplicado. Dado um coeficiente de amortecimento suficientemente grande, e cujo valor depende do problema tratado, os procedimentos de que anteriormente divergiam passam a convergir. Nos exemplos apresentados futuramente, o valor do menor coeficiente inteiro necessário para a convergência será informado. Para a integração dinâmica o coeficiente é sempre 1, já que os incrementos de deslocamento são, devido ao passo de tempo necessário para os métodos explícitos, por natureza bastante pequenos.

Os autores deste trabalho observaram que um coeficiente de 10 é suficientemente grande para, com sobras, garantir convergência para todos os casos estudados por eles até o momento, sejam os mesmos contemplados aqui ou não, e sendo este o valor adotado atualmente para casos genéricos onde não se deseja preocupar com tal questão.

3.3 Algoritmo de Integração

Para um sistema massa-mola-amortecedor simples, tal como indicado na Fig. 2, pode-se escrever a equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{ext}(t) \quad (31)$$

na qual m é a massa do corpo, c a constante de amortecimento do amortecedor, k a constante elástica da mola e $f_{ext}(t)$ é a força externa aplicada ao corpo, esta função do tempo, tal como a coordenada de deslocamento longitudinal $x(t)$, cuja primeira e segunda derivadas com relação a este são, respectivamente, os termos $\dot{x}$ e $\ddot{x}$, representando a velocidade e a aceleração do corpo.

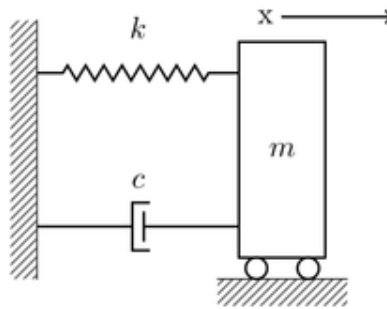


Figura 2: Sistema massa-mola-amortecedor

Essa equação também pode ser escrita, usando a Segunda Lei de Newton, como

$$m\ddot{x} = f_{res}(t) = f_{ext}(t) - f_{\eta}(t) - f_{int}(t) \quad (32)$$

na qual $f_{res}(t)$ é a força resultante atuando no corpo, resultado das somas das forças externas ($f_{ext}(t)$), viscosas ($f_{\eta}(t)$) e internas ($f_{int}(t)$). Nesse formato, há uma generalização: as forças internas e viscosas não precisam ser necessariamente lineares.

Essa generalização é importante. Na análise dinâmica linear clássica, em analogia ao sistema massa-mola-amortecedor apresentado, problemas dinâmicos são tratados através da equação

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (33)$$

na qual $[M]$ é a matriz de massa do sistema estrutural, $[C]$ a de amortecimento e $[K]$ a de rigidez, enquanto $\{f(t)\}$ é o vetor de forças nodais. Tais matrizes representam o sistema como um todo, seja ele isostático ou hiperestático, e sejam suas conectividades como forem. Porém, no caso de um cabo discretizado por uma série de elementos, duas diferenças são observadas: o problema é isostático e as conectividades são simples, uma vez que cada elemento liga-se diretamente ao subsequente e assim por diante, de uma ponta a outra do cabo.

Tais observações são importantes porque simplificam bastante o processo de integração: no lugar de construir as matrizes globais do sistema e usar algum algoritmo de integração sobre as mesmas, a integração pode ser feita nó a nó usando a Eq. (32). A força resultante da

equação é simplesmente a reação nas extremidades do elemento de cabo, que engloba a força elástica, viscosa e as cargas externas aplicadas, sejam elas de peso próprio ou cargas nodais nos elementos.

Para integrar a expressão definida pela Segunda Lei de Newton, opta-se pelo uso de algoritmos explícitos, tal como é feito pelo *DOOLINES* (Ferreira, 2005; Silveira, Lages e Ferreira, 2012). Em esquemas explícitos de integração, de um modo geral, tem-se:

$$Ma^{j+1} = f_{res}^j(v^j, a^j, x^j) \quad (34)$$

ou seja: a aceleração no passo de tempo $j + 1$ é calculada usando a força resultante do instante de tempo j , força essa definida com as velocidades, posições e acelerações também do instante j , em um caso mais geral. Tal aceleração em $j + 1$ é então usada para determinar as velocidades e posições no instante $j + 1$ através de equações que variam de método para método. Uma vez definidas as novas velocidades e posições, resolve-se mais uma vez a Eq. (34) e assim sucessivamente. O nome 'explícito' vem do fato de que as informações no instante $j + 1$ são obtidas explicitamente a partir das do instante j , ao contrário dos métodos implícitos, que necessitam de procedimentos iterativos para o avanço temporal. Dentro da vasta gama de algoritmos de integração explícitos, usa-se, neste trabalho, o algoritmo de Chung-Lee (Chung e Lee, 1994), tal como presente no *DOOLINES* (Ferreira, 2005; Silveira, Lages e Ferreira, 2012).

Para o algoritmo de Chung-Lee, o procedimento de solução pode ser dado pelas seguintes equações:

$$a^{j+1} = \frac{f_{res}^j(v^j, a^j, x^j)}{M} \quad (35)$$

para a definição do novo vetor de acelerações a^{j+1} ,

$$v^{j+1} = v^j + \gamma_1 a^j + \gamma_2 a^{j+1} \quad (36)$$

para a definição do novo vetor de velocidade v^{j+1} e, por fim,

$$x^{j+1} = x^j + \Delta v^j + \beta_1 a^j + \beta_2 a^{j+1} \quad (37)$$

para a definição do novo vetor de posições x^{j+1} , nas quais β_1 , β_2 , γ_1 e γ_2 são constantes definidas de forma a permitir ou não o amortecimento de vibrações de maior frequência na estrutura. Tais constantes são calculadas como

$$\beta_1 = \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \quad (38)$$

$$\beta_2 = \Delta t^2 \beta \quad (39)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} \Delta t \quad (40)$$

e

$$\gamma_2 = \frac{3}{2} \Delta t \quad (41)$$

Segundo Silveira (2001), um estudo de precisão e convergência do algoritmo definiu como possíveis valores para o parâmetro livre $1 \leq \beta \leq 28/27$. Para $\beta = 1$ tem-se aproximadamente o método das diferenças centrais, enquanto o outro limite garante a melhor dissipação numérica possível sem perda de estabilidade, segundo o mesmo.

3.4 Forças de Morison

Por fim, para a total definição da integração numérica, para qualquer método escolhido, fica faltando, uma expressão que permita calcular as forças viscosas, uma vez que a resposta elástica do material, bem como o comportamento do elemento às ações de forças externas homogeneamente distribuídas (notadamente o peso), foi definido com base nas equações de catenária elástica. Neste trabalho, para a consideração de tais forças, usa-se a equação de Morison (Morison, 1950), escrita originalmente como

$$f_{morison} = \frac{1}{2}\rho C_d A_d v |v| + \rho C_m V \dot{v} \quad (42)$$

na qual ρ é a densidade do fluido tratado, no caso das linhas de ancoragem a água; C_d é um coeficiente de arrasto que, em seu formato mais geral, depende de fatores como o número de Reynolds, a rugosidade do material, *etc.*; A_d é a área característica de arrasto da estrutura; v é a velocidade relativa entre o fluido e a linha (ambas tomadas com relação a um referencial estacionário); C_m é um coeficiente inercial e V é o volume de fluido deslocado.

Contudo, essa expressão foi desenvolvida para um cilindro na direção vertical sob a ação de um fluido movendo-se perpendicularmente ao seu eixo, o que, de um modo geral, não retrata o comportamento de linhas de ancoragem sob efeito dinâmicos, para as quais, via de regra, o fluxo tem direção oblíqua com relação ao eixo da peça, que por sua vez é curvo. Para considerar tal efeito, utiliza-se a expressão para as forças de Morison tal como apresentada por Journee e Massie (2001) e Chakrabarti (2005). A equação é escrita no formato

$$f_{morison} = \frac{1}{2}\rho C_d^n A_d^n v^n |v^n| + \frac{1}{2}\rho C_d^t A_d^t v^t |v^t| + \rho C_m V \dot{v} \quad (43)$$

na qual o índice superior n indica a parcela normal ao eixo da peça, enquanto o índice t refere-se ao componente transversal. Cada componente de arrasto tem, portanto, seu próprio coeficiente de arrasto, área característica e componente de velocidade. No elemento de cabo, tais áreas e componentes são calculadas, de forma aproximada, da seguinte maneira: os dois pontos extremos do elemento são usadas para definir um vetor unitário normal $\hat{n}$, de fórmula

$$\hat{n} = \frac{\vec{P}_j - \vec{P}_i}{\|\vec{P}_j - \vec{P}_i\|} \quad (44)$$

na qual P_j e P_i são, respectivamente, as coordenadas no sistema cartesiano dos pontos i e j que definem as extremidades do elemento. Tal vetor definiria a direção do eixo do elemento caso o mesmo fosse reto. Como se trata de um elemento curvo, tem-se aproximadamente a sua direção "média", por assim dizer. Toma-se, então, o vetor velocidade relativa em cada um dos nós. Os componentes desses vetores velocidade podem então ser escritos, em termos de componentes normais e transversais para essa direção "média", para o nó i , como

$$v_i^n = (\hat{n} \cdot \vec{v}_i) \vec{v}_i \quad (45)$$

e

$$v_i^t = \vec{v}_i - v_i^n \quad (46)$$

nas quais $\cdot \cdot$ define o produto escalar entre o vetor velocidade relativa ($\vec{v}_i$) e o vetor unitário de direção, sendo $\vec{v}_i^n$ o componente normal e $\vec{v}_i^t$, resultante da diferença entre o vetor velocidade e a parcela normal, a componente transversal da velocidade. Fazendo-se o mesmo procedimento para o vetor de velocidade da direção j , tem-se um par de componentes de velocidade. Fazendo-se a média entre essas velocidades, tem-se uma velocidade média, em termos de parcelas normais e transversais, que atuam no elemento. Matematicamente

$$v_{med}^n = \frac{\vec{v}_i^n + \vec{v}_j^n}{2} \quad (47)$$

e

$$v_{med}^t = \frac{\vec{v}_i^t + \vec{v}_j^t}{2} \quad (48)$$

ou ainda, como o vetor velocidade pode ser escrito como a diferença entre os vetores de velocidade da linha e do fluido

$$v_{med}^t = \frac{(\vec{v}_{if}^t - \vec{v}_{il}^t) + (\vec{v}_{jf}^t - \vec{v}_{jl}^t)}{2} \quad (49)$$

na qual o índice f indica a parcela do fluido e o índice l a da linha. Analogamente, para a parcela normal, tem-se

$$v_{med}^n = \frac{(\vec{v}_{if}^n - \vec{v}_{il}^n) + (\vec{v}_{jf}^n - \vec{v}_{jl}^n)}{2} \quad (50)$$

Para o cálculo da área característica de arrasto, por sua vez, mantém-se a aproximação de que o elemento curvo é, entre seus dois nós extremos, reto. É importante salientar que tal aproximação subestima os efeitos do arrasto, uma vez que reduz sua área efetiva. Segundo essa hipótese, a área normal de arrasto é escrita como

$$A^n = ||\vec{P}_j - \vec{P}_i||D \quad (51)$$

na qual D é a dimensão característica de arrasto. Já a parcela transversal pode ser escrita como

$$A^t = ||\vec{P}_j - \vec{P}_i||\pi D \quad (52)$$

uma vez que se trata da área lateral da linha.

Um cálculo superestimado dessas áreas poderia ser feito considerando o comprimento total do elemento (L_0) no lugar da parcela $||\vec{P}_j - \vec{P}_i||$. As áreas reais situam-se em algum lugar entre os dois valores, sendo considerado, neste trabalho, o limite inferior, tal como anteriormente posto.

Por fim, retirando-se os coeficientes normal e transversal de arrasto de alguma tabela ou guia (Chakrabarti (2005) cita algumas), pode-se estimar as forças de Morison no elemento utilizando a Eq. (43), para a qual a aceleração considerada no termo inercial é dada pela média das acelerações relativas em i e j como

$$a_{med} = \frac{a_{jf} - a_{jl} + a_{if} - a_{il}}{2} \quad (53)$$

na qual, novamente, o índice f representa a aceleração do fluido e l a da linha, enquanto o volume de fluido deslocado é calculado simplesmente como

$$V = \pi D^2 L_0 \quad (54)$$

ou seja: o volume real do elemento, uma vez que é ele quem atua na inércia.

Uma observação pertinente é que correções para o caso onde a linha é uma corrente, portanto contendo elos, não sendo um cilindro perfeito, são feitas nos coeficientes C_m e C_d .

A força obtida dessa forma é então dividida entre os dois nós extremos do elemento, atuando, por consequência, diretamente nas *lumped masses* que se conectam a tais extremidades. Tal metodologia de cálculo, exatamente como posta, exceto pelo fato de o volume utilizado ser o de um elemento reto (uma vez que os elementos de treliça são, de fato, retos) é a atualmente presente no *DOOLINES* para o cálculo de forças de arrasto.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, as formulações matemáticas anteriormente discutidas, bem como suas implementações computacionais, serão aplicadas a exemplos numéricos visando averiguar a eficiência, precisão e validade da metodologia desenvolvida, bem como seu comportamento. Quando possível, as respostas obtidas serão comparadas com exemplos da literatura.

Todos os exemplos são gerados em um notebook Acer Aspire de processador *core i5 – 4200U* de 1,60 GHz com *Turbo Boost* para até 2,3 GHz. O compilador usado foi o GCC (*GNU Compiler Collection*) para C++ com nível de otimização *o3*.

4.1 Validação Numérica

Nesta subseção, serão discutidos exemplos de validação numérica da formulação adotada e da implementação desenvolvida.

Análise Estática

O primeiro teste realizado visa averiguar a validade da resposta estática do elemento de catenária. Tal exemplo foi apresentado no trabalho de Karoumi (1999) e trata-se de um cabo de 312,7 m de comprimento, módulo de elasticidade de $1,31 \cdot 10^{11}$ N/m², área da seção transversal de $5,48 \cdot 10^{-4}$ m² e peso específico de 46,11 N/m. O cabo reside no plano $x - y$ e é fixado entre pontos (0, 0, 0) m e (304,8, 0, 0) m. Para essa configuração, o autor observou uma tração horizontal nas extremidades da linha de valor $1,7794 \cdot 10^4$ N. O ponto central da linha assumiu o valor em y de -30,48 m. O mesmo problema é definido no algoritmo desenvolvido, para o qual são utilizados 97 pontos internos (99 pontos ao total, estando o ponto de número 50 exatamente no meio do cabo) a fim, apenas, de melhorar graficamente o resultado da plotagem, uma vez que, para o exemplo tratado, um único elemento de catenária é capaz de emular a solução perfeitamente (a menos de pequenos erros de aproximação, tais como a tolerância de convergência). A Fig. 3 mostra a curva de projeções verticais *versus* horizontais desses pontos.

É possível constatar excelente concordância entre as respostas obtidas através do algoritmo desenvolvido e pelo de Karoumi (1999) em termos dos valores citados. A tração horizontal observada nas extremidades da linha é, para a implementação desenvolvida, de $1,7795 \cdot 10^4$ N,

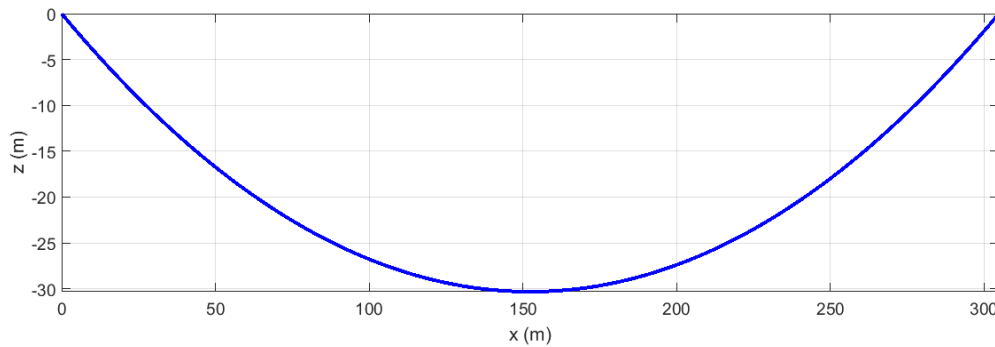


Figura 3: Curva de Projeções Horizontais versus Verticais do primeiro exemplo estático

enquanto a projeção horizontal do trecho central é 30,47 m. Utiliza-se uma tolerância de convergência de 0,1 mm. A configuração estática é obtida após 26 iterações. Usa-se um coeficiente de amortecimento para o método de Newton-Raphson, como discutido anteriormente, de valor 2. Para o valor padrão, de 1, o procedimento de equilíbrio diverge para a metodologia de estimativa inicial de forças apresentada, problema também anteriormente discutido.

Visando validar a formulação com um exemplo tridimensional, o mesmo caso apresentado é simulado, inclusive com a mesma tolerância, porém com a linha sendo rotacionada de um ângulo de 45° em torno do eixo z em direção ao eixo y , portanto tendo coordenadas dos pontos extremos de $(0, 0, 0)$ m e $\sqrt{2}/2 \cdot (304,8, 304,8, 0)$ m. Para esse segundo caso, é necessário mudar o coeficiente de amortecimento do método de Newton-Raphson para 3. Com o coeficiente de 3, a configuração de equilíbrio é atingida com 66 iterações, enquanto a parcela horizontal da tração e o deslocamento vertical do ponto intermediário são rigorosamente os mesmos. A configuração tridimensional deste exemplo rotacionado pode ser vista na Fig. 4.

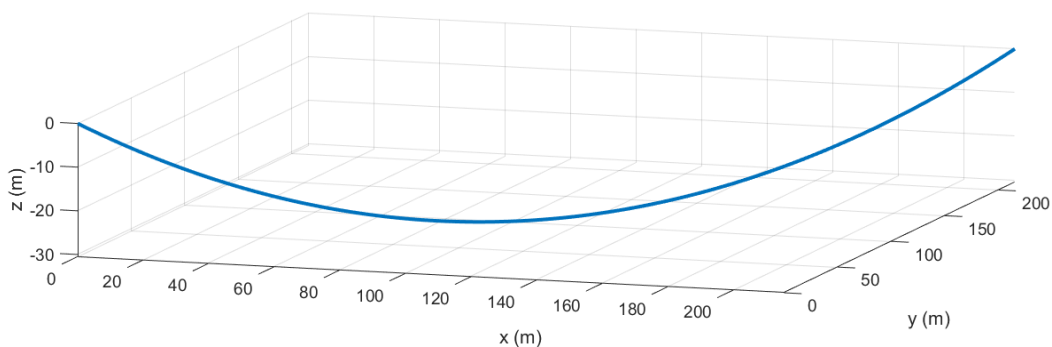


Figura 4: Configuração tridimensional do primeiro exemplo estático rotacionado

Análise Dinâmica em Vibração Livre

Já para validar a integração no tempo, por sua vez, utiliza-se um exemplo apresentado no trabalho de Chang, Park e Lee (2008). O exemplo consiste em um cabo de 43,304 m, rigidez axial de $469,6 \cdot 10^6$ N, densidade linear de $20,3 \text{ kg/m}$ e suspenso entre os pontos $(0, 0, 0)$ m e $(43,866, 0, 6,43)$ m, portanto no plano $x-z$, conforme ilustrado na Fig. 5, no qual uma massa de 100 kg é estaticamente presa ao seu ponto central e bruscamente retirada no início da simulação.

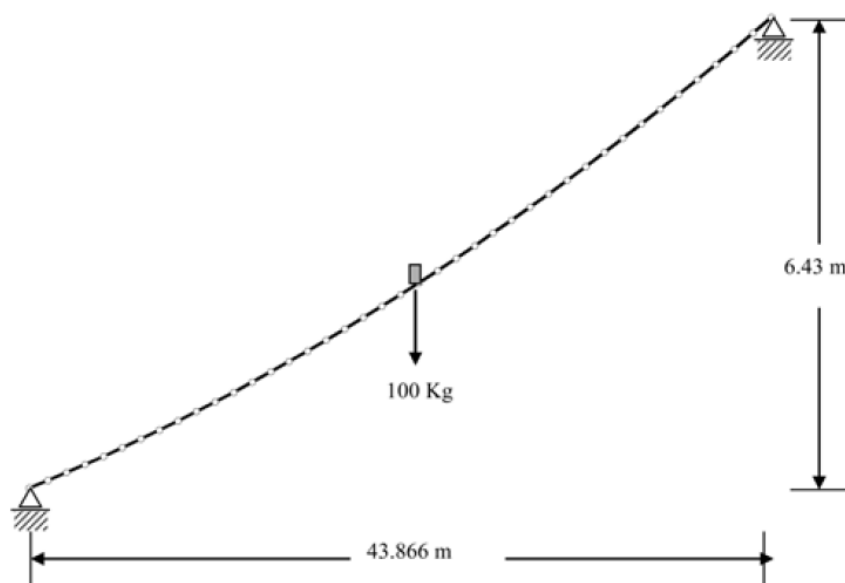


Figura 5: Ilustração do primeiro exemplo dinâmico

Fonte: Chang, Park e Lee (2008)

O deslocamento do ponto central onde a carga bruscamente removida atuava é então mapeado ao longo do tempo. Os resultados obtidos por Chang, Park e Lee (2008), utilizando 14 dos elementos de cabo por eles desenvolvidos, cada um contendo 3 pontos de integração Gaussiana internos, são apresentados na Fig. 6 sob a legenda *Present Study*, que mostra ainda o comparativo entre a solução obtida por estes elementos com as obtidas experimentalmente (sob a legenda *Experiment*) e via os elementos de viga do programa *ABAQUS*. Já a solução obtida pelos elementos de cabo desenvolvidos neste trabalho é apresentada na Fig. 7. Para gerar este exemplo, são usados também 14 elementos de cabo, porém sem pontos de integração internos, considerando apenas a técnica de *lumped mass* e a integração por Chung-Lee discutidas anteriormente. São mapeados 4 s de simulação, sendo cada ponto do gráfico espaçado em 0,01 s, tanto no exemplo do autor quanto no deste trabalho. Para a integração, é usado um passo de tempo de 10^{-5} s. A simulação dura menos de um segundo para o computador de configurações apresentadas.

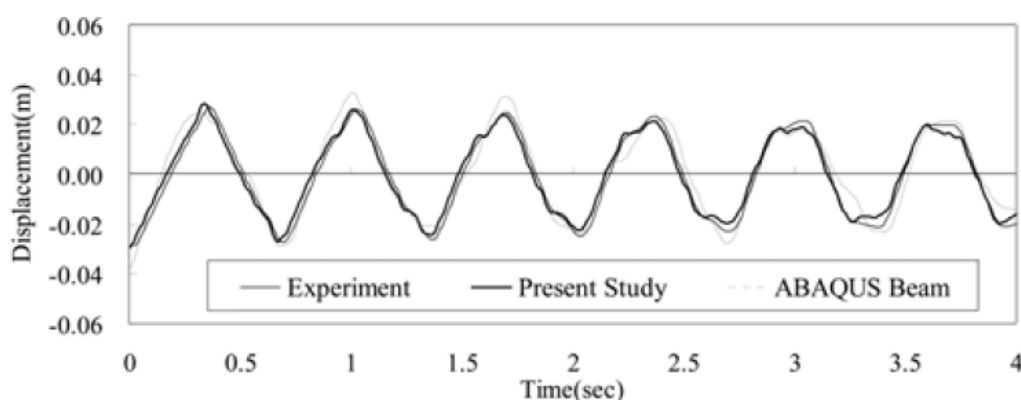


Figura 6: Resultados da literatura para o primeiro exemplo dinâmico

Fonte: Chang, Park e Lee (2008)

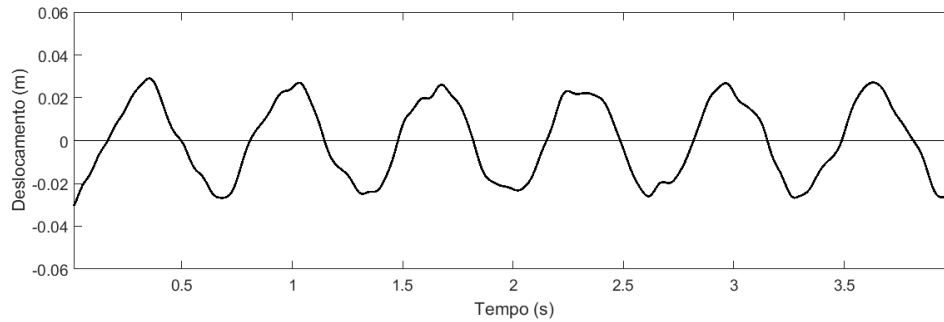


Figura 7: Resultados do autor para o primeiro exemplo dinâmico

Pode-se observar boa concordância entre as respostas obtidas pelo autor e pelos elementos desenvolvidos, tanto no que diz respeito ao formato geral da curva Tempo *versus* Deslocamento, quanto na avaliação das amplitudes e períodos de vibração. As maiores diferenças podem ser notadas nas altas frequências, que são mais difíceis de mapear.

Uma observação pertinente é que o exemplo apresentado pelo autor considera um pequeno amortecimento não tratado no exemplo apresentado. A influência desse amortecimento pode ser constatada na redução das amplitudes de oscilação e na formação de "platôs". As forças de arrasto modeladas por Morison também não são consideradas no exemplo dos autores deste trabalho, sendo tal consideração atingida através da aplicação de um coeficiente de arrasto nulo (gerando, portanto, arrasto nulo).

4.2 Exemplo Ilustrativo

Por fim, desenvolve-se um exemplo ilustrativo objetivando demonstrar a total funcionalidade da ferramenta implementada. Trata-se de um caso "completo" de dinâmica em águas profundas, onde atuam forças inerciais e viscosas. O exemplo é baseado no trabalho de Silveira, Lages e Ferreira (2012), porém ligeiramente modificado, e considera uma linha de ancoragem de 1050 m, densidade linear de 120 kg/m , rigidez axial de $4,5 \cdot 10^8 \text{ N}$ e diâmetro característico de 0,1 m. A linha é fixada entre o solo marinho e a superfície, mais especificamente nos pontos $(0, 400, 0) \text{ m}$ e $(800, 0, 500) \text{ m}$, e aplica-se uma prescrição sinusoidal de movimento de amplitude final 4,5 m e frequência $0,12 \text{ s}^{-1}$ na segunda extremidade, enquanto a primeira é mantida fixa. Essa prescrição é feita gradualmente, com a amplitude crescendo linearmente do instante inicial até atingir seu valor máximo no tempo de 3,0 min, sendo este também o tempo total da simulação. Atua ainda um perfil linear de corrente variando de 0 m/s no leito marinho a 1 m/s na superfície e na direção x . Adota-se uma tolerância de convergência de 1 mm e compara-se os resultados obtidos para um número total de 6, 10, 16 e 20 elementos de cabo. Os passos de tempo para cada caso são de $\frac{4 \cdot 10^{-3}}{n} \text{ s}$, nos quais n é o número de elementos. O comparativo é feito mapeando-se a posição do ponto central da linha no eixo z ao longo do tempo para cada uma das discretizações. Tal resultado é apresentado na Fig. 8, nas quais as cores vermelho, verde, azul e preto representam, respectivamente, as discretizações apresentadas.

Pode-se perceber que as curvas azul e preta praticamente se superpuseram por completo, mostrando a convergência da metodologia proposta, enquanto que as curvas vermelha e verde aproximaram-se monotonicamente das amplitudes e fases das discretizações maiores. Os tempos computacionais são, respectivamente para as quatro discretizações, aproximadamente 1,4,

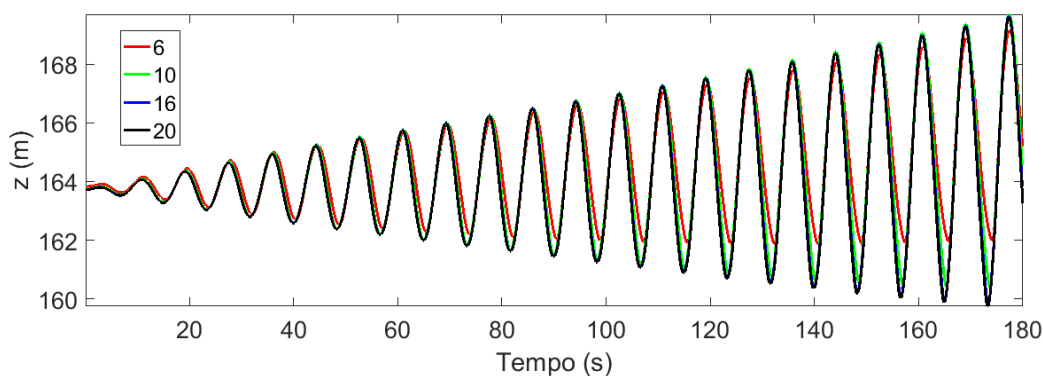


Figura 8: Curva Posição *versus* Tempo para diferentes discretizações

3,6, 7,1 e 10,5 s. Para uma melhor visualização, apenas um pequeno trecho do gráfico é apresentado na Fig. 9, de modo a melhor ilustrar a diferença entre as respostas apresentadas. Ainda assim, as curvas azul e preta, representando as maiores discretizações, de 16 e 20 elementos, respectivamente, são virtualmente indistinguíveis.

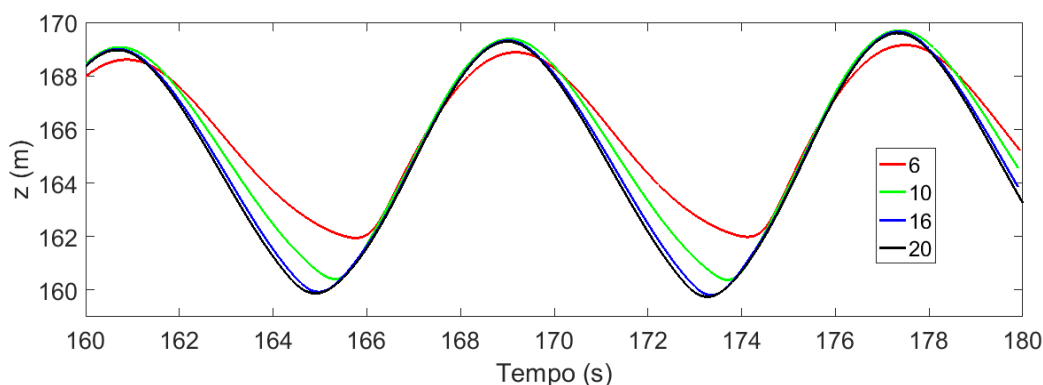


Figura 9: Curva Posição *versus* Tempo para diferentes discretizações aproximada

Por fim, na Fig. 10, a configuração inicial para a discretização de 20 elementos é apresentada.

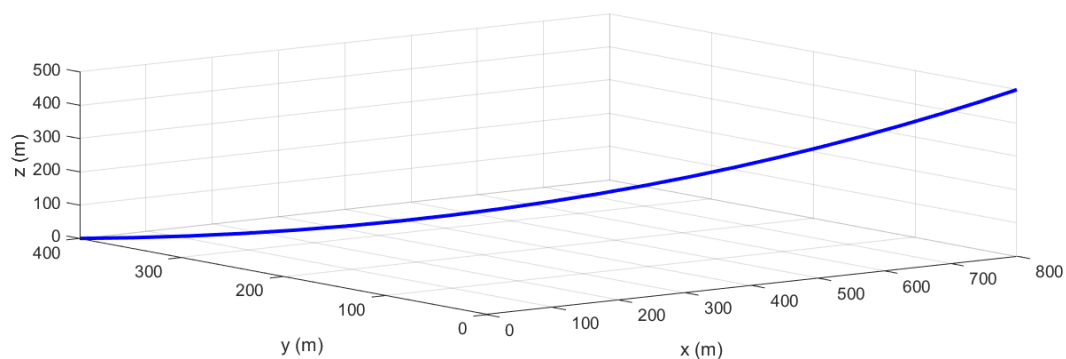


Figura 10: Configuração inicial para 20 elementos

5 CONCLUSÕES

Apresentou-se o estudo, desenvolvimento, implementação computacional e validação de um elemento de cabo para a análise dinâmica de linhas de ancoragem. Discutiu-se sobre as equações de catenária elástica em 3 dimensões usadas como base para a resposta deformável do elemento, o algoritmo de integração no tempo utilizado e as considerações a respeito da modelagem de forças viscosas. Exemplos de validação mostraram bons resultados em comparação com a literatura tomada como base. O exemplo ilustrativo apresentado também se mostrou fisicamente coerente, além de ter apresentado propriedades interessantes, tais como convergência monôtona e acelerada.

Salienta-se, contudo, que demais estudos ainda precisam ser realizados, especialmente na influência de parâmetros como a tolerância de convergência do procedimento iterativo do elemento e do passo de tempo da integração na resposta global do código, bem como o comparativo do custo computacional *versus* precisão em relação aos elementos clássicos de treliça, preferencialmente dentro do mesmo ambiente de cálculo. Por agora, observam-se tempos computacionais considerados reduzidos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e à PETROBRAS pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Abad, M. S. A., Ahmad, S., Vehab, E., Alireza, N. R., 2013. Nonlinear analysis of cable structures under general loadings. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 73, pp. 11 – 19.
- Ali, H. M., Abdel-Ghaffar, A. M., 1995. Cable-stayed bridges with passive control bearings. *Computers and Structures*, v. 54, pp. 461 – 492.
- Chakrabarti, S. K. 2005., *Handbook of Offshore Engineering*. 1. ed, Elsevier, v. 1.
- Chang, S.-P., Park, J.-I., Lee, K.C., 2008. Nonlinear dynamic analysis of spatially suspended elastic catenary cable with finite element method. *KSCE Journal of Civil Engineering*, v. 12, n. 2, pp. 121 – 128.
- Chung, J., Lee, J. M., 1994. A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics.
- Ferreira, F. M. G., 2005. Desenvolvimento e Aplicações de um Framework Orientado a Objetos para Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem e de Risers. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
- Journee, J., Massie, W., 2001. *Offshore Hydromechanics*. Delft University of Technology.
- Karoumi, R., 199. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. *Computers and Structures*, v. 71, pp. 397–412.
- Morison, J. R., Johnson, J., Schaaf, S., 1950. The force exerted by surface waves on piles. *Journal of Petroleum Technology*, v. 2, n. 5, pp. 149–154.
- Ozdemir, H., 1979. A finite element approach for cable problems. *Int. J. Solids Structures*, v. 15, pp. 427 – 437.

Silveira, E. S. S., 2001. Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem com Adaptação no Tempo e Subciclagem. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Silveira, E. S. S., Lages, E. N., Ferreira, F. M. G., 2012. Doolines: An object-oriented framework for non-linear static and dynamic analyses of offshore lines. *Engineering with Computers*, v. 28, n. 2, pp. 149–159.

Stroustrup, B., 2013. *The C++ Programming Language*. 4. ed. Addison Wesley.

Stroustrup, B., 2014. *Programming: Principles and Practice Using C++*. 2nd ed. Addison Wesley.

Thai, H.T., KIM, S.E., 2011. Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Elements in Analysis and Design*, v. 47, pp. 237–246.