



DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES VAZADAS EM CONCRETO ARMADO VIA MÉTODO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL JUNTO AO MÉTODO SIMPLEX

Flávia Castro de Faria

Amilton Rodrigues da Silva

flaviacastrofaria@gmail.com

amiltonengcivil@bol.com

Departamento de Engenharia Civil

Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil

Resumo. O concreto armado é um dos materiais mais importantes para a confecção de elementos estruturais na construção civil. Dentre os elementos estruturais de concreto armado é comum a utilização seções transversais vazadas para elementos lineares de concreto armado sob ação combinada de esforços de flexão e força axial. O objetivo principal da proposta desse trabalho é utilizar um algoritmo de dimensionamento otimizado para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção vazada de concreto armado sujeita a flexão composta, de forma que a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes. Dessa forma, as variáveis de projeto são as posições, diâmetro e quantidade de barras a serem distribuídas dentro da seção vazada de concreto. Esse algoritmo foi desenvolvido pelos autores em trabalhos anteriores, e utiliza a programação linear sequencial junto com o método Simplex para resolver o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto.

Palavras-Chave: Seção Vazada, Flexão Composta, Programação Linear Sequencial, Concreto Armado, Simplex.

1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é o resultado da adição de barras de aço no concreto simples, que é composto de água, aglomerantes e agregados em proporções adequadas. Este material resultante da adição de barras de aço no concreto simples é um dos materiais mais utilizados para confecção de elementos estruturais no mundo e no Brasil é o mais utilizado. Vários fatores influenciaram para que este material tivesse uma utilização bem difundida no ramo da construção civil, dentre eles pode-se citar: o baixo custo dos materiais, métodos de manuseio e dimensionamento bem difundidos, boa resistência à tração e a compressão, visto que o aço trabalha bem a tração e o concreto trabalha bem a compressão e ser moldável, o que permite grande variabilidade de formas e de concepções arquitetônicas.

De acordo com ABNT NBR 6118 (2014) elementos de concreto armado são aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e armadura, e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização da aderência. Dentre as grandes variabilidades de formas que o concreto armado permite ser moldado, pode-se citar as seções vazadas que é o alvo de estudos neste trabalho. Seções vazadas de concreto armado podem ser encontradas em vigas e pilares. A utilização de seções vazadas em projetos estruturais depende da escolha do projetista, mas pode-se citar como uma das vantagens da utilização deste tipo de seção a redução do peso próprio estrutural.

O dimensionamento estrutural tem como objetivo definir, uma estrutura capaz de resistir as solicitações impostas a ela com segurança, e para que isto ocorra estes dimensionamentos devem ser realizados seguindo as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014). Já o dimensionamento otimizado além de garantir a segurança estrutural visa uma solução com estruturas com elevados índices de aproveitamento, o que tem como consequência estruturas com custos menores.

Pode-se dizer que o sucesso de um projeto é alcançado quando se consegue conciliar a segurança com um baixo custo em um tempo hábil e o dimensionamento otimizado almeja justamente esse sucesso, ou seja, dar a algo o seu rendimento ótimo ou ideal. Para este trabalho, o sucesso será posicionar e quantificar as barras de aço em uma seção vazada de concreto armado sujeita à flexão composta, obtendo-se assim, a quantidade mínima de aço para que a seção suporte os esforços solicitantes impostos ao elemento de concreto em análise.

Além da programação linear sequencial junto ao método simplex, que foi utilizada neste trabalho para otimizar as seções de concreto, vários outros métodos podem ser utilizados para realizar otimizações de estruturas em concreto armado. Eboli (1989) utilizou a técnica de programação matemática, trabalhando com um número reduzido de variáveis e de restrições e utilizou o algoritmo de Han-Powell para definir o ponto de ótimo. Já Rath *et al.* (1999), Silva (2001) e Bastos (2004) trabalharam com o algoritmo genético, o primeiro autor otimizou as barras das armaduras e a forma da seção transversal, o segundo autor otimizou a função objetivo relacionada aos custos em dimensionamentos de pórticos e pilares de concreto armado e o terceiro autor realizou a otimização de seções retangulares de concreto armado. Rigo (1999) trabalhou com a otimização de estruturas utilizando o Método de Energia e de

Newton. Chaves (2004) minimizou uma função custo utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange e as condições de Kunh-Tucker. Já Nina (2006), Silva et al. (2010) e Sias (2014) trabalharam com método de programação quadrática sequencial, a primeira autora trabalhou com a otimização do pré-dimensionamento de edifícios em concreto armado, já o segundo autor realizou a otimização de vigas T em concreto armado e o terceiro autor otimizou a função custo de pilares em concreto armado. Utilizando o método da Penalidade Exterior Junior (2006) otimizou seções circulares, retangulares e T em concreto armado sob flexão. E como o trabalho mais recente tem-se Sias e Alves (2016) que trabalharam com o método dos pontos interiores para realizar o dimensionamento ótimo de pilares circulares.

2 OBJETIVOS

Segundo Faria (2017) um projeto estrutural deve garantir de forma primordial e com um custo acessível que a estrutura seja capaz de cumprir de maneira eficaz todas as funções dela requerida, como, por exemplo, suportar os carregamentos que a mesma está imposta. Uma maneira de garantir os objetivos citados acima com segurança e economia é fazendo a otimização do produto e/ou serviço.

Visando a otimização de seções transversais vazadas em concreto armado sob flexão oblíqua composta, o principal objetivo desse trabalho é utilizar um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção vazada de concreto sujeita a flexão composta, de forma que a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes além de atender as prescrições normativas referentes ao dimensionamento quanto aos estados limites últimos de elementos lineares de concreto armado sob flexão composta.

No desenvolvimento desse trabalho foi utilizada uma rotina desenvolvida pelos autores em um trabalho anterior, Faria (2017), capaz de fornecer os esforços resistentes de uma seção vazada de concreto reforçado com barras de aço. Nesta rotina foi necessário fazer uma implementação para chegar na realização dos objetivos. Isto foi feito por meio de um método que define, para uma seção poligonal de concreto armado que resista às ações dos esforços solicitantes atendendo todas as prescrições normativas, como se podem alterar as variáveis de projeto mantendo todas as restrições atendidas e reduzir a função objetivo, ou seja, um método de otimização. Foi utilizado o método de programação linear sequencial, onde o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto é aproximado por um problema linear, o qual terá seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex.

Para isso utilizou-se, também, formulações desenvolvidas em dissertações e teses do PROPEC-EM-UFOP (Caldas, 2004, Muniz, 2005, Silva, 2007). Em Faria (2017), utilizou-se a linguagem de programação C++ para executar a implementação computacional. Toda implementação computacional necessária para o desenvolvimento desse trabalho foi construída usando o software Visual Studio Community 2015 da Microsoft disponível na data dessa publicação no endereço: <https://www.visualstudio.com/pt-br/downloads/download-visual-studio-vs.aspx>.

3 O MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex foi desenvolvido há mais de 65 anos por Dantzig e após a evolução dos computadores tornou-se uma ferramenta poderosa de otimização no campo da economia, administração e engenharia. Este método consiste em um algoritmo iterativo que busca a solução que minimiza uma determinada função objetivo atendendo a específicas restrições de igualdade e desigualdade. Nele as restrições e a função objetivo devem ter relações lineares com as variáveis de projeto, sendo por isso utilizado para determinar a solução ótima de um problema linear, ou seja, de um modelo de programação linear. A programação linear é iniciada e analisada na sua forma padrão dada pela Eq. (1) abaixo. Nessa expressão, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$ são vetores em $\Re^n$, $\mathbf{b}$ é um vetor em $\Re^m$ e $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$.

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{sujeita a} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (1)$$

Pode-se dizer que um ponto é viável, quando o vetor $\mathbf{x}$ satisfaz o problema da Eq. (1). O conjunto de pontos viáveis forma um poliedro convexo com suas faces dadas por polígonos. Em problemas de otimização linear o mínimo local é sempre o mínimo global, característica atribuída também aos problemas convexos, já que o problema linear é um problema convexo.

Se $\mathbf{x}$ é um ponto viável com no máximo m componentes não nulas e, definindo $\beta(\mathbf{x})$ como um subconjunto de $\{1 \ 2 \ \dots \ n\}$ tal que, $\beta(\mathbf{x})$ contém exatamente m índices, se $i \notin \beta(\mathbf{x})$ então $x_i = 0$, e a matriz quadrada dada por $B_{m \times m} = [A_i]_{i \in \beta(\mathbf{x})}$ formada por m colunas da matriz A é não singular, então, $\mathbf{x}$ é um ponto viável básico. O conjunto de pontos viáveis básicos forma um poliedro convexo com suas faces dadas por polígonos.

Todo problema de otimização linear com restrições de igualdade e desigualdade pode ser facilmente colocado na forma padrão dada pela Eq. (1), como pode ser visto em Vanderplaats (1984), Haftka e Kamat (1985) e Nocedal e Wright (2006).

Bazaraa e Shetty (1993) apresentam em seu livro as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT (Karush, Kuhn e Tucker) demonstrando que, se um ponto viável $\mathbf{x}^*$ de um problema de programação linear satisfaz essas condições então o menor valor que a função objetivo pode assumir respeitando todas as restrições é esse ponto. O método Simplex gera em seu processo iterativo uma sequência de pontos viáveis básicos, parando quando um desses pontos satisfizer as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT identificando esse ponto como o ponto de ótimo.

4 PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL

Um problema geral de otimização com restrições de igualdade e desigualdade é apresentado na Eq. (2). Nessa equação, $\mathbf{x}$ é o vetor das variáveis de projeto, f é a função objetivo que se deseja minimizar, C e D são funções das variáveis de projeto que definem, respectivamente, as restrições de desigualdade e igualdade do problema analisado. Onde i é a

quantidade de restrições de desigualdade e j as de igualdade, podendo assim ambas as variáveis, i e j , variar de 1 até a quantidade de restrições do problema em análise.

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ e } D_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (2)$$

A programação sequencial linear é um método bastante simples que consiste na linearização das funções objetivo e restrições do problema analisado. Essa linearização é feita usando a expansão em série de Taylor das funções objetivo e restrições truncadas no termo de primeira ordem. Ou seja:

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong f(\mathbf{x}_k) + \nabla^T f_k \mathbf{d}, \quad (3)$$

$$C_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong C_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T C_{ik} \mathbf{d}, \text{ e} \quad (4)$$

$$D_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong D_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T D_{ik} \mathbf{d}. \quad (5)$$

Nas Equações (3) a (5), $\nabla^T f_k$ é um vetor linha com n termos onde seus termos são dados pelas derivadas parciais de primeira ordem da função objetivo em relação às variáveis de projeto avaliadas no ponto $\mathbf{x}_k$. De forma análoga define-se $\nabla^T C_{ik}$ e $\nabla^T D_{ik}$.

Admitindo que se conheça um ponto de partida $\mathbf{x}_0$ que satisfaça todas as restrições de projeto, o problema mostrado na Eq. (2) pode ser analisado de forma iterativa por uma programação sequencial linear que consiste em determinar a cada iteração o passo $\mathbf{d}$ que deve ser dado para buscar o ponto de mínimo do problema (2). Ou seja, a cada iteração deve-se definir $\mathbf{d}$ de forma que $f(\mathbf{x}_{k+1})$ seja menor que $f(\mathbf{x}_k)$ e $\mathbf{x}_{k+1}$ satisfaça todas as restrições. Aplicando essas condições nas aproximações lineares das funções objetivo e restrições chega-se ao problema linear da Eq. (4.5) para a definição do passo $\mathbf{d}$.

$$\min_{\mathbf{d}} \nabla^T f_k \mathbf{d} \text{ sujeito a } \nabla^T C_{ik} \mathbf{d} \geq -C_i(\mathbf{x}_k) \text{ e } \nabla^T D_{jk} \mathbf{d} = -D_j(\mathbf{x}_k). \quad (6)$$

O problema mostrado na Eq. (6) apresenta funções objetivo e restrições lineares em relação à variável definida pelos termos do vetor $\mathbf{d}$. Sendo assim, um algoritmo de otimização para problemas lineares pode ser usado para a determinação do passo $\mathbf{d}$ na iteração k do método de programação sequencial linear. Nesse trabalho é utilizado o método Simplex para a solução do problema mostrado na Eq. (3).

5 CONSIDERAÇÕES REFERENTES A OTIMIZAÇÃO

5.1 Função Objetivo

É a função que se deseja determinar o seu mínimo ou o seu máximo. Em problemas determinísticos de otimização estrutural a função objetivo geralmente é o volume ou o peso da estrutura, e as restrições estão relacionadas aos requisitos normativos quanto a tensões e deslocamentos (Verzenhassi, 2008). Nesse trabalho o objetivo é determinar a quantidade mínima de barras de aços e seus diâmetros, para que a seção em análise resista aos esforços solicitantes com segurança, portanto, deve-se então determinar o mínimo da função objetivo dada pela Eq. (7), onde: n é o número de barras; A_{si} são as áreas da n barras; e $\mathbf{x}$ é o vetor de incógnitas apresentado no item seguinte.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n A_{si} \quad (7)$$

5.2 Variáveis de Projeto

Variáveis de projeto são as variáveis que se alteram durante o processo de otimização. No processo de otimização implementado por Faria (2017), as variáveis de projeto (representadas pelo vetor $\mathbf{x}$ mostrado na Eq. (8)) são todas contínuas sendo dadas pelas áreas das barras e os parâmetros que definem a deformada da seção, ou seja, deformação axial da seção, curvatura da seção no eixo x e curvatura da seção no eixo y . Nos subitens seguintes são dadas as definições de cada variável desse projeto.

$$\mathbf{x} = (A_{s1} \ A_{s2} \ \dots \ A_{sn} \ \varepsilon_0 \ k_x \ k_y)^T \quad (8)$$

5.2.1 Área das barras

No processo de otimização essas variáveis são contínuas com restrições laterais, ou seja, não podem ser menores que zero e nem maior que uma área limite dada por um diâmetro comercial especificado pelo usuário do programa desenvolvido nesse trabalho. O programa permite duas situações a serem definidas pelo usuário, como descritas a seguir:

(I) Todas as barras são substituídas pelo valor do diâmetro comercial dado pelo usuário, ficando a seção final detalhada com todas as barras de mesmo diâmetro.

(II) As barras são substituídas pelo valor do diâmetro comercial dado pelo usuário ou um diâmetro comercial inferior, ficando a seção final detalhada com barras de diâmetros comerciais menores ou iguais ao fornecido pelo usuário.

5.2.2 Deformação da Seção

A deformação da seção transversal é definida por uma equação, para isto são consideradas as hipóteses da teoria de viga de Euler-Bernoulli, ou seja: seções inicialmente planas e ortogonais ao eixo da barra, permanecem planas após deformações e ortogonais ao eixo deformado da barra. Outra consideração feita foi a perfeita aderência entre o concreto e o aço das armaduras o que garante uma deformação única para toda a seção.

De acordo com as considerações do parágrafo anterior a deformada da seção é dada pela Eq. (9), onde: ε é a deformação axial na origem do sistema de referências; k_x e k_y são as rotações da seção em relação aos eixos x e y , respectivamente.

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 + k_x y - k_y x \quad (9)$$

5.2.3 Quantidade e Posições das Barras

Essas são duas variáveis do problema, visto que, a configuração das barras (quantidade e posicionamento) da seção do ponto de partida pode ser diferente da seção final obtida pelo programa. Mas não de otimização, pois as mesmas não variam durante o processo de otimização que consiste na aplicação do método da programação sequencial linear em conjunto com o Simplex.

5.3 Restrições

Segundo Sias (2014) para a completa definição do problema devem-se determinar as restrições na qual o problema possui, definindo assim os limites nos quais o algoritmo desenvolvido irá trabalhar para achar o ponto de ótimo. As restrições do problema em questão são apresentadas nos itens a seguir.

5.3.1 Deformações Limites do Concerto

As deformações limites do concreto são dadas pelas Eq. (10) a Eq. (13). Nessas equações ε_{cu} e ε_{c2} são deformações específicas lineares de compressão e são tomadas com seus valores negativos. De acordo com a NBR 6118 (2014) para concreto até C50, tem-se $\varepsilon_{cu} = -0,35\%$ e $\varepsilon_{c2} = -0,2\%$. Para concreto com f_{ck} maior que 50MPa essas deformações dependem do f_{ck} .

$$C_1(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_1 - \varepsilon_{cu} \geq 0 \quad (10)$$

$$C_2(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_2 - \varepsilon_{cu} \geq 0 \quad (11)$$

$$C_3(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_3 - \varepsilon_{c2} \geq 0 \quad (12)$$

$$C_4(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x 'h_4 - \varepsilon_{c2} \geq 0 \quad (13)$$

Para o sistema $x'y'$ define-se h_1 como sendo a coordenada y' do vértice da seção poligonal de maior coordenada y' , já h_2 é a coordenada y' do vértice de menor coordenada y' e h_4 e h_3 são as distâncias a $3/7h$. Esses vértices são destacados na Fig.1.

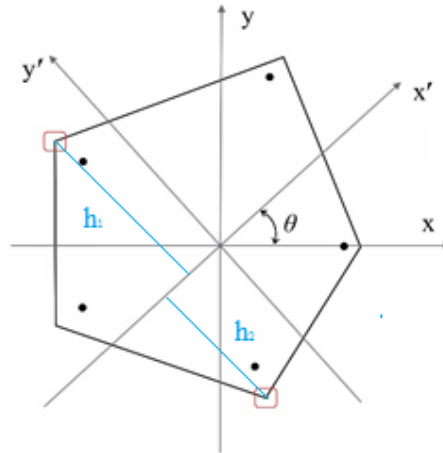


Figura 1 – Seção poligonal com o sistema de coordenadas $x'y'$

5.3.2 Deformações Limites do Aço

Das Equações (10) a (13) verifica-se a limitação da deformada da seção quanto as deformações de compressão, já para as deformações de tração esse limite é imposto pelas Eq.(14) dadas a seguir.

$$1\% - \varepsilon(x_i, y_i) \geq 0 \quad i=1,2,...,n \quad \text{onde } n \text{ é o n}^\circ \text{ de barras} \quad (14)$$

Definindo h_{b1} como sendo a coordenada y' da barra de maior coordenada y' , e h_{b2} como sendo a coordenada y' da barra de menor coordenada y' , como mostrado na Fig. 2, chega-se as restrições dadas pelas Eq. (15) e (16) para a deformação nas barras mais solicitadas.

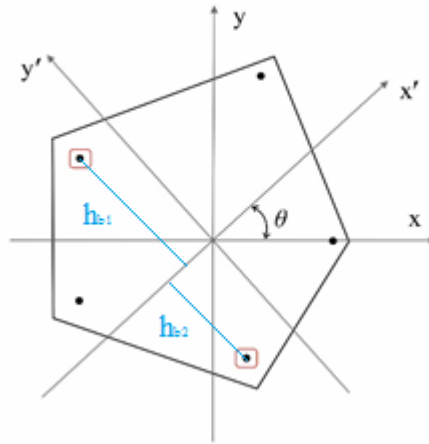


Figura 2 – Barras mais solicitada na seção

$$C_5(\mathbf{x}) = 0,01 - (\varepsilon + k_x 'h_{b1}) \geq 0 \quad (15)$$

$$C_6(\mathbf{x}) = 0,01 - (\varepsilon + k_x 'h_{b2}) \geq 0 \quad (16)$$

5.3.3 Esforços Resistentes

As Equações referentes aos esforços solicitantes de momento são apresentadas nas Eq. (17) e (18), onde (M_R) é o momento resistente e (M_S) é o momento solicitante.

$$C_7(\mathbf{x}) = M_{Rx} - M_{Sx} \geq 0 \quad (17)$$

$$C_8(\mathbf{x}) = M_{Ry} - M_{Sy} \geq 0 \quad (18)$$

O esforço axial resistente (N_R), deve ser igual ao esforço normal solicitante (N_S). A equação (19) mostra essa restrição de igualdade. Nesse texto, as restrições de desigualdade são elementos do vetor C , enquanto as restrições de igualdade são elementos do vetor D .

$$D_1(\mathbf{x}) = N_R - N_S = 0 \quad (19)$$

Espera-se que, se o esforço normal resistente é igual ao solicitante e os momentos resistentes são maiores que os momentos solicitantes a seção esteja segura. Isso ocorre para maioria das seções e configurações de barras de reforço, no entanto, existem seções com determinada configuração de barras de reforço para as quais o momento resistente sendo maior que o solicitante não garante segurança da seção. Para essas seções as restrições de desigualdade devem ser trocadas pelas restrições de igualdade dadas pelas Eq. (20) e (21) a seguir.

$$D_2(\mathbf{x}) = M_{Rx} - M_{Sx} = 0 \quad (20)$$

$$D_3(\mathbf{x}) = M_{Ry} - M_{Sy} = 0 \quad (21)$$

5.3.4 Restrições Laterais

São as restrições que limitam as áreas das barras de aço Eq. (22) e (23), e as que limitam o tamanho do passo Eq. (24) e (25)

$$C_{i+8}(\mathbf{x}) = A_{si} \geq 0 \quad (22)$$

$$C_{i+n+8}(\mathbf{x}) = \bar{A}_s - A_{si} \geq 0 \quad (23)$$

Nessas equações, $\bar{A}_s$ é a área limite para as barras, ou seja, área da barra de diâmetro dado pelo usuário, e $i = 1, 2, \dots, n$ com n sendo o número de barras.

$$C_{i+2n+8}(\mathbf{d}) = \Delta_i + d_i \geq 0 \quad (24)$$

$$C_{i+3n+11}(\mathbf{d}) = \Delta_i - d_i \geq 0 \quad (25)$$

Onde $\mathbf{d}$ é o tamanho do passo e i varia de 1 até $n+3$, com n o número de barras.

5.4 Propriedades Geométricas

A seção é identificada pelo número de vértices e coordenadas planas. Os vértices devem ser colocados em uma sequência contornando a seção poligonal no sentido anti-horário, como pode ser visualizado na Fig. 3 abaixo, já barras de aço são definidas de forma pontual no interior da seção e os furos são definidos de maneira análoga a seção externa, porém são sequenciados no sentido horário

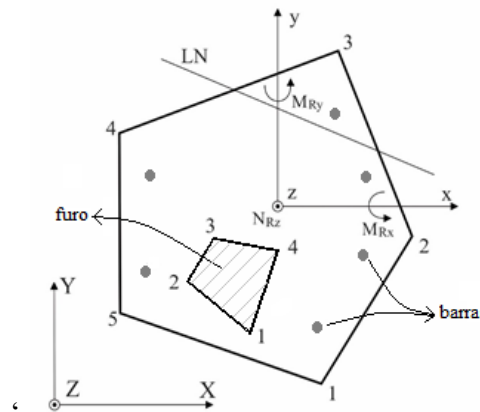


Figura 3 – Definição do sistema de coordenadas e seção transversal

5.5 Materiais

A identificação dos materiais será feita por meio de suas relações tensão-deformação, através de curvas dadas por um número qualquer de faixas de deformação, F_i . Cada faixa pode ser definido um polinômio de até grau 3 para a relação tensão-deformação do material, e

suas deformações limites à direita e à esquerda, representada pelos L_i . A curva citada acima está representada na Fig. 4.

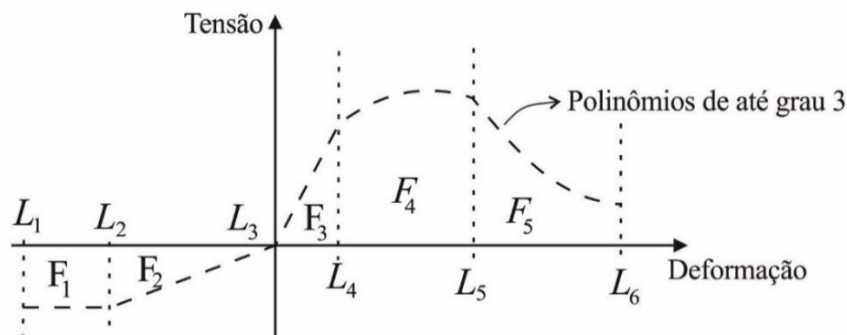


Figura 4 – Relação tensão deformação ilustrativa de um material;

5.6 Realção Tensão-Deformação do concreto e do aço

5.6.1 Concreto

O modelo da curva tensão-deformação do concreto que é usado nesse trabalho é o modelo fornecido pela NBR 6118 (2014), onde pode ser obtido as equações analíticas desse modelo. O gráfico da curva tensão-deformação do concreto é mostrado na Fig. 5 a seguir.

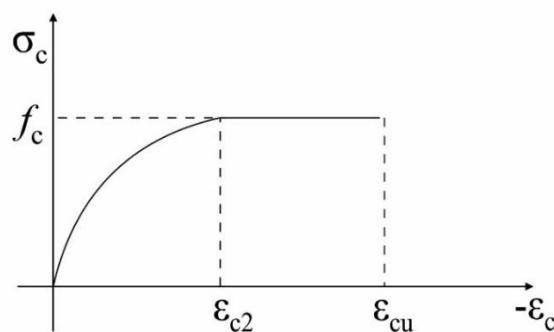


Figura 5– Diagrama tensão-deformação do concreto

5.6.2 Aço

A relação tensão-deformação será afornecida pela ABNT NBR 6118 (2014) e vale tanto para as barras de aço CA25 e CA50 quanto para os fios de aço CA60, diferenciando entre elas apenas nos valores da deformação e tensão de escoamento. O gráfico dessa equação é ilustrado na Fig. 6

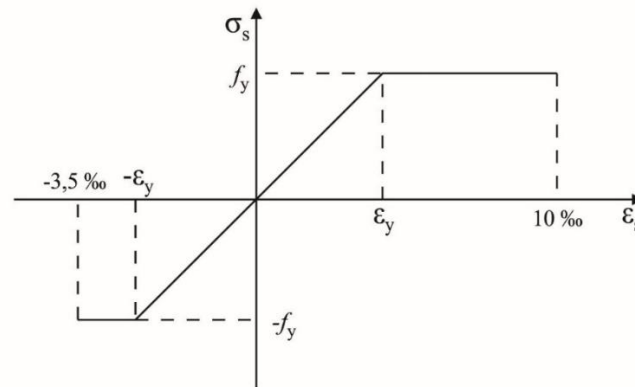


Figura 6 – Diagrama tensão-deformação do aço

5.7 Esforços Resistentes

Os esforços resistentes são obtidos por integração das tensões normais ao longo da seção transversal, como é mostrado nas Eq. (26) a (28). No cálculo dos esforços resistentes foi utilizado o teorema de Green que transforma a integral ao longo da área da seção transversal em uma integral ao longo do contorno.

$$N_{Rz} = \iint_A \sigma_c dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} \quad (26)$$

$$M_{Rx} = \iint_A \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} y_{si} \quad (27)$$

$$M_{Ry} = \iint_A \sigma_c x dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} x_{si} \quad (28)$$

Onde n é o número de barras na seção transversal, A_{si} é a área dessas n barras, x_{si} e y_{si} , são as coordenadas do centro da barra, σ_{si} é a tensão normal à seção transversal no ponto coincidente com o centro da barra, e σ_c é a tensão normal à seção transversal em um ponto qualquer da seção.

5.8 Forma Padrão do Problema Analisado

Para que seja possível utilizar o método Simplex é necessário colocar, o problema em análise na forma padrão do método, Eq. (1). Dessa forma, chega-se ao problema dado pela Eq. (29) a seguir:

$$\min_{\mathbf{d}^*} \begin{bmatrix} \nabla^T f_k & -\nabla^T f_k & \mathbf{0}_{1 \times m} \end{bmatrix} \mathbf{d}^*$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^T C \\ \nabla^T D \end{bmatrix}_{m \times n+3} & -\begin{bmatrix} \nabla^T C \\ \nabla^T D \end{bmatrix}_{m \times n+3} & -\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m \times m} \end{bmatrix} \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} -[C(\mathbf{x}_k)]_{q \times 1} \\ -[\Delta]_{r \times 1} \\ -[D(\mathbf{x}_k)]_{p \times 1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Na Equação (29), $\mathbf{d}^* = [\mathbf{d}^{+T} \quad \mathbf{d}^{-T} \quad \mathbf{u}^T]^T$, onde $\mathbf{d}^+$ e $\mathbf{d}^-$ são dois vetores com $n+3$ componentes (número de variáveis de projeto), $\mathbf{u}$ é um vetor com m componentes (número de restrições de desigualdade). $\mathbf{I}_{m \times m}$ é uma matriz identidade de ordem m , e $\mathbf{0}_{p \times m}$ é uma matriz nula com p linhas e m colunas, onde p é o número de restrições de igualdade. q representa o número de restrições de desigualdade excluindo aquelas referentes ao tamanho do passo, ou seja, $q = m - r$, com $r = 2n+6$ sendo as restrições de desigualdade referente ao tamanho do passo. Para maiores informações de como chegar nessa forma padrão consultar Faria (2017)

As Equações (30) a (44) apresentam as derivadas das m restrições de desigualdade em relação às $n+3$ variáveis de projeto.

$$\nabla^T C_1(x) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_1}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (30)$$

$$\nabla^T C_2(x) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (31)$$

$$\nabla^T C_3(x) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_3}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (32)$$

$$\nabla^T C_4(x) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 + \frac{\partial h_4}{\partial \varepsilon} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_4 + \frac{\partial h_4}{\partial k_x} k_x' \quad \frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_4 + \frac{\partial h_4}{\partial k_y} k_x' \right) \quad (33)$$

$$\nabla^T C_5(x) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -(1 + \frac{\partial h_{b1}}{\partial \varepsilon} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_{b1} + \frac{\partial h_{b1}}{\partial k_x} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_{b1} + \frac{\partial h_{b1}}{\partial k_y} k_x') \right) \quad (34)$$

$$\nabla^T C_6(x) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -(1 + \frac{\partial h_{b2}}{\partial \varepsilon} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_x} h_{b2} + \frac{\partial h_{b2}}{\partial k_x} k_x') \quad -(\frac{\partial k_x'}{\partial k_y} h_{b2} + \frac{\partial h_{b2}}{\partial k_y} k_x') \right) \quad (35)$$

Nas Equações (36) e (37), as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação às variáveis de projeto são determinadas usando o método das diferenças finitas

$$\nabla^T C_7(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial M_{Rx}}{\partial A_{s1}} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial A_{s2}} \quad \dots \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial A_{sn}} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_x} \quad \frac{\partial M_{Rx}}{\partial k_y} \right) \quad (36)$$

$$\nabla^T C_8(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial M_{Ry}}{\partial A_{s1}} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial A_{s2}} \quad \dots \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial A_{sn}} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_x} \quad \frac{\partial M_{Ry}}{\partial k_y} \right) \quad (37)$$

As Equações (38) a (41) são derivadas referentes as restrições laterais, citadas no item 5.3.4.

$$\nabla^T C_{i+8}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (38)$$

$$\nabla^T C_{i+n+8}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{-1}_{i\text{-ésima posição}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ com } i = 1, \dots, n \quad (39)$$

$$\nabla^T C_{i+2n+8}(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ com } i = 1, \dots, n+3 \quad (40)$$

$$\nabla^T C_{i+3n+11}(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{-1}_{i\text{-ésima posição}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ com } i = 1, \dots, n+3 \quad (41)$$

A Equação (41) apresenta a derivada da restrição de igualdade do esforço axial resistente em relação às $n+3$ variáveis de projeto. Já as Eq. (42) e (44) apresentam as derivadas das restrições referentes aos momentos resistentes quando essas são consideradas restrições de igualdade no problema.

$$\nabla^T D_1(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial N_R}{\partial A_{s1}} \quad \frac{\partial N_R}{\partial A_{s2}} \quad \dots \quad \frac{\partial N_R}{\partial A_{sn}} \quad \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial N_R}{\partial k_x} \quad \frac{\partial N_R}{\partial k_y} \right) \quad (42)$$

$$\nabla^T D_2(\mathbf{x}) = \nabla^T C_7(\mathbf{x}) \quad (43)$$

$$\nabla^T D_3(\mathbf{x}) = \nabla^T C_8(\mathbf{x}) \quad (44)$$

5.9 Ponto de Partida

Como foi mostrado nos tópicos anteriores, as variáveis de projeto são as áreas das n barras dispostas dentro da seção poligonal qualquer de concreto, mais os três parâmetros que definem a deformada da seção. Para definir o ponto de partida é necessário admitir valores para as variáveis de projeto de tal forma que as restrições sejam satisfeitas. A seguir é apresentado como é definido a quantidade de barras e suas posições dentro da seção para o ponto de partida.

Passo 1: Insere-se o máximo de barras possíveis em uma camada na linha que define o cobrimento da seção acrescida da metade do diâmetro das barras, esse cobrimento é definido pelo usuário e deve respeitar prescrições de norma. Nesta etapa o espaçamento e diâmetro das barras influenciam na quantidade de barras utilizadas nesse passo.

Passo 2: Verifica-se a necessidade de utilizar outras camadas de barras na parte mais interior da seção. Esta verificação é feita por uma rotina que calcula a deformada da seção para um determinado esforço solicitante de flexão combinado com carga axial. Quando ocorrer o insucesso desta rotina deve-se incluir uma nova camada de barras, desde que, isso seja possível fisicamente e não exceda a taxa de armadura máxima definida na NBR6118 (2014).

Passo 3: Após a verificação do passo dois, a seção do ponto de partida é obtida.

5.10 Fluxograma

A seguir é descrito o fluxograma do algoritmo para definir a quantidade de barras, sua disposição na seção, e os seus diâmetros, de tal forma que seja possível definir um vetor $\mathbf{x}$ das variáveis de projeto que minimiza a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e satisfaça todas as restrições de projeto conforme definidas nos itens anteriores.

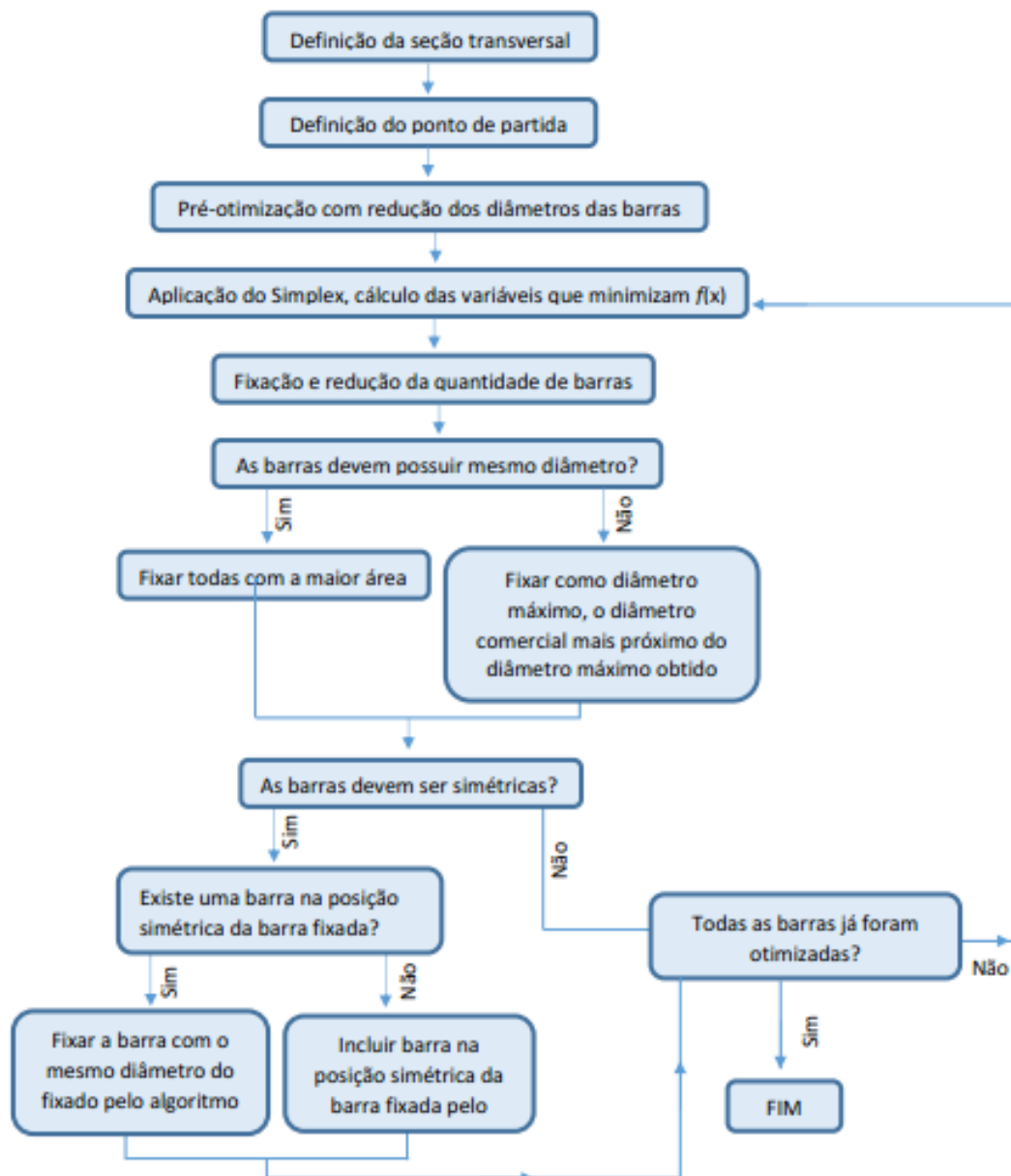


Figura 7 – Seção vasada inicial

6 EXEMPLO

O problema proposto nesse exemplo é uma seção retangular vazada de 25 por 40cm e uma espessura constante de 6cm. A distância considerada do centro das armaduras até a face externa da seção é de 2,5cm. A seção será detalhada com barras de 10mm considerando um espaçamento entre essas barras de pelo menos 2,3cm. As curvas tensão deformação dos materiais aço e concreto são definidas como mostrado no item 5.6 desse trabalho, sendo considerado aço do tipo CA50 e o concreto com resistência característica a compressão (f_{ck}) de 25MPa.

Considerando as dimensões da seção, cobrimento, espaçamento entre barras, diâmetro das barras, o programa gera a seção inicial definindo o maior número de barras possíveis em um contorno interno da seção, como mostra a Fig. 8(a) a seguir. Dessa forma, o programa gera 32 barras de 10mm com centroide distante 2,5cm do contorno externo da seção e 3,3cm de distância mínima entre os centroides das barras. O usuário pode excluir essa opção do programa e fornecer o número de barras e suas posições para o ponto de partida.

Na primeira análise foi considerada flexão apenas no plano yz , ou seja, $N = M_y = 0$ e $M_x = -50kNm$. Foi exigida simetria das disposições das barras em relação ao eixo y e todas as barras com diâmetro de 10mm. Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 5 barras de 10mm totalizando uma área de aço de $3,93cm^2$ como pode ser verificada na Fig. 8(b) a seguir.

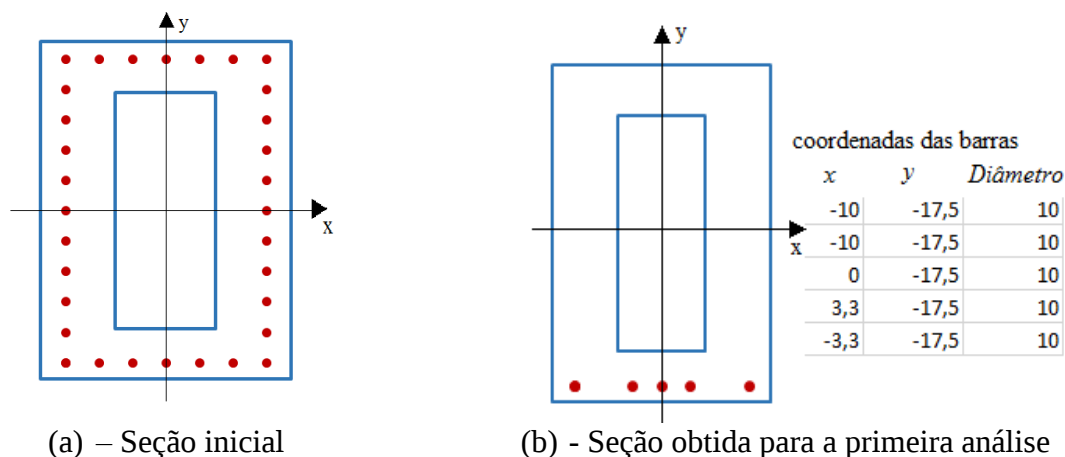


Figura 8 – Seções obtidas

A segunda análise é quase igual à primeira em relação as configurações referentes aos esforços solicitantes, $N = M_y = 0$ e $M_x = -50kNm$ e a simetria das barras, diferenciando apenas que nessa análise as barras têm diâmetro de 10mm ou inferior, ou seja, 8, 6,3 ou 5mm. Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 4 barras de 10mm e uma de 5mm totalizando uma área de aço de $3,34cm^2$, como pode ser verificada na Fig. 9(a) a seguir.

Na terceira análise foi considerada flexão oblíqua composta com as seguintes solicitações, $N_d = -500kN$, $M_{xd} = -50kNm$ e $M_{yd} = 30kNm$. Foi exigida simetria das disposições das barras em relação aos eixos x e y e todas as barras de diâmetro fixo de 10mm.

Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 8 barras de 10mm totalizando uma área de aço de 6,28cm² como pode ser verificada na Fig. 9(b) a seguir.

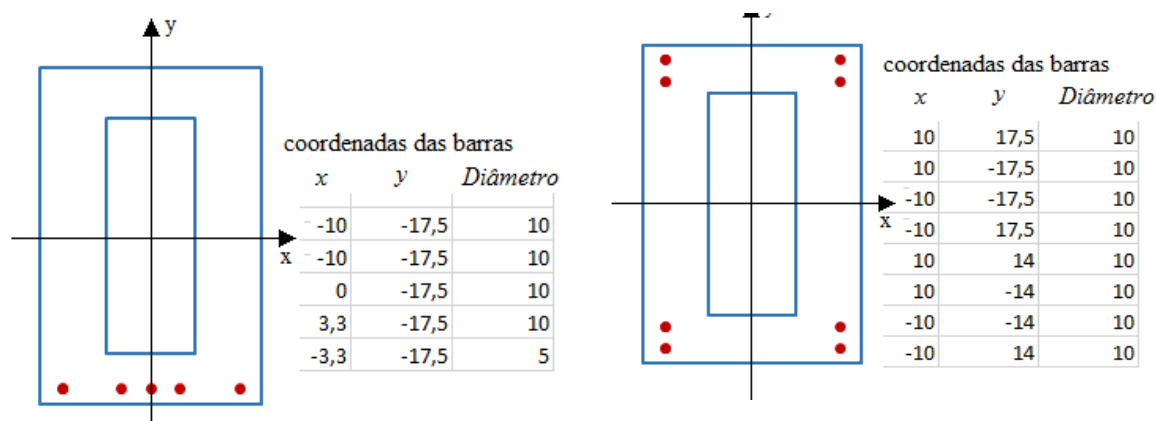


Figura 9 – Seções obtidas

A quarta análise é igual à terceira em relação aos esforços solicitantes, $N_d = -500\text{kN}$, $M_{xd} = -50\text{kNm}$ e $M_{yd} = 30\text{kNm}$ e simetria, diferenciando apenas que nesta análise as barras têm diâmetro de 10mm ou inferior, ou seja, 8, 6,3 ou 5mm. Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 8 barras, sendo 4 barras de 10mm e 4 barras de 5mm totalizando uma área de aço de 3,93cm² como pode ser verificada na Fig. 10(a) a seguir.

Na quinta e última análise é igual à terceira em relação aos esforços solicitantes, $N_d = -500\text{kN}$, $M_{xd} = -50\text{kNm}$ e $M_{yd} = 30\text{kNm}$, e diâmetro das barras, que podem ser de 10mm ou menor, ou seja, 8, 6,3, ou 5mm, diferenciando apenas que nessa análise não será exigida simetria em relação aos eixos x e y . Com essas especificações o programa converge para uma seção composta por 3 barras, sendo 2 barras de 10mm e 1 barra de 5mm totalizando uma área de aço de 1,77cm² como pode ser verificada na Fig. 10(b) a seguir.

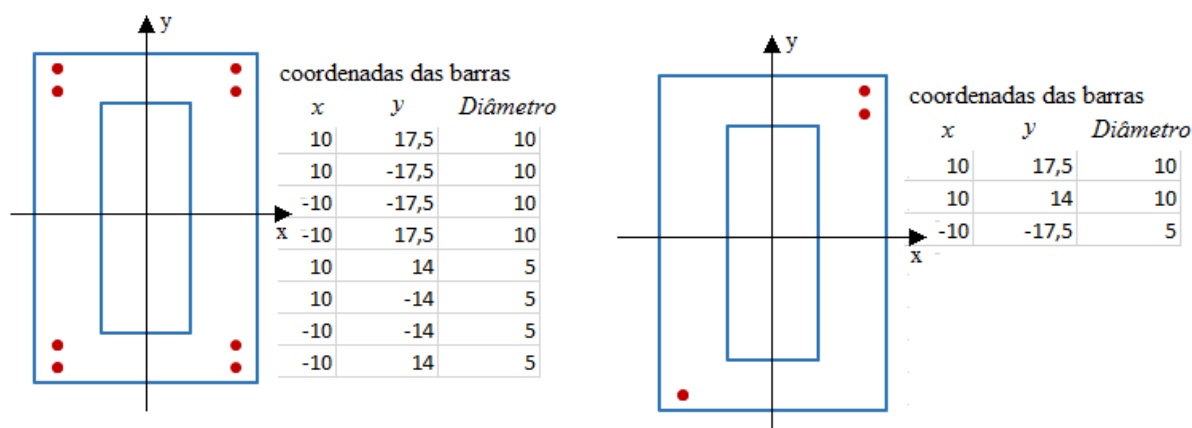


Figura 10 – Seções obtidas

Nessa aplicação os resultados encontrados usando o algoritmo implementado nesse trabalho não foram comparados com outros autores na falta desses. Por isso, será apresentada a seguir a curva de interação de momentos da seção mostrada na Figura 11 para um esforço axial de compressão de 500kN. Essa curva é determinada ponto a ponto fixando os valores de N e M_x e determinando o valor de M_y até que a seção apresente uma deformada que viole alguma das deformações limites especificados no item 5.3.1 desse trabalho. A Figura 11 a seguir mostra essa curva para a seção obtida na quinta análise desse exemplo. Como pode ser verificada pela curva o ponto $M_{xd} = -50\text{kNm}$ e $M_{yd} = 30\text{kNm}$, está exatamente no contorno dessa curva indicando segurança e economia na definição dessa seção.

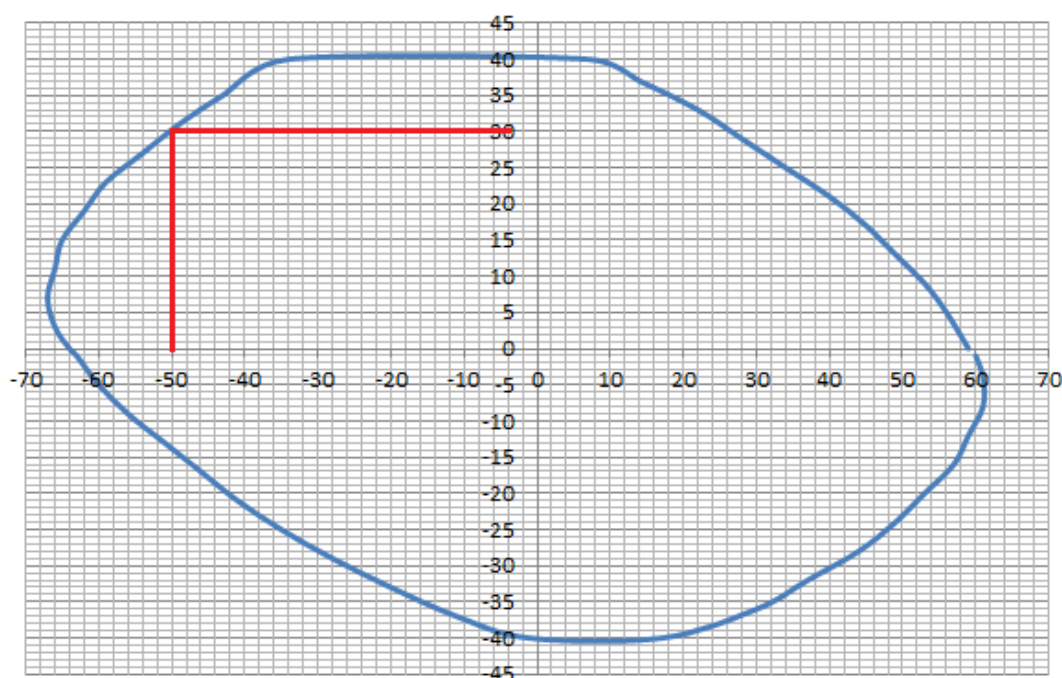


Figura 11 – Curva interação dos momentos para $N_d = -500\text{kN}$

7 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi utilizado um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção vazada de concreto sujeita à flexão composta, de forma que, a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes. O método de programação sequencial linear é usado para resolver o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto. Nesse método as funções de restrições e objetivo são aproximadas por suas expansões em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem e a partir de um ponto que atenda as restrições, novos pontos são determinados de forma que as restrições continuem sendo atendidas e a função objetivo diminua. Em cada passo do processo iterativo do método de programação sequencial linear deve-se determinar o próximo passo de forma que a função objetivo tenha

uma máxima redução, esse problema foi resolvido nesse trabalho usando o método Simplex. Como observa-se no exemplo apresentado, o método implementado por Faria (2017) mostrou-se bastante eficiente para a conclusão dos objetivos propostos nesse trabalho.

8 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) o apoio financeiro e a bolsa de pesquisa concedida para desenvolvimento deste trabalho.

9 REFERÊNCIAS

- Bastos, E.A., 2004. *Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
- Bazaraa, M. e Shetty, C., 1993. *Nonlinear programming-theory and algorithms*. Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Caldas, R.B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos de Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Chaves, I. A, 2004. *Otimização de Pilares de Concreto Armado Mediante Uniformização do Índice de Confiabilidade*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil
- Eboli, C.R., 1989. *Dimensionamento Ótimo de Seções de Aço-Concreto à Flexão Composta Oblíqua*. Dissertação de Mestrado, Departamento Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Faria, F.C., 2017. *Otimização de Seções Poligonais de Concreto Armado Sujeitas à Flexão Composta*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Haftka, R. e Kamat, M. 1985. *Elements of structural optimization*. Martinus Nijhoff Publishers, Boston.
- Junior, E.C.P., 2006. *Otimizações de Seções de Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- Maia, J.P.R, 2009. *Otimização Estrutural: estudo e aplicação em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta Solver*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Muniz, C.F.D.G. *Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, 2005.

NBR ABNT 6118., 2014. *Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento*. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro, MG, Brasil.

Nina, T.C., 2006. Otimizações de Seções Transversais de Concreto Armado: Aplicações a Pórtico Planos, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

Nocedal, J. e WRIGHT, S., 2006. *Numerical optimization*. Second edition. Springer.

RATH, D. P., AHLAWAT, A.S., RAMASWAMY, A. Dezembro de 1999. *Shape Optimization of RC Flexural Members*. *Journal structural Engineering*, p. 1439-1446.

Rigo, E., 1999. *Métodos de Otimização Aplicados à Análise de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

Sias, F. M. e Alves, E. C., 2016. *Dimensionamento Ótimo de Pilares de Circulares Concreto Armado Segunda a NBR 6118:2014*. Engenharia Estudo e Pesquisa. ABPE, v.16, n. 1, p.34-42.

Sias, F. M., 2014. *Dimensionamento Ótimo de Pilares de Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

Silva, A.R. *Análise Numérica de Vigas Mistas com Iteração Parcial*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, 2007.

Silva, E. E., 2001. *Otimização de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

Vanderplaats, G., 1984. *Numerical optimization technique for engineering design - with applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.

Verzenhassi, C. C., 2008. *Otimização de Risco Estrutural Baseada em Confiabilidade*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.