



IMPLEMENTAÇÃO BIDIMENSIONAL DO MODELOS DE ZONA COESIVA PPR POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

José Fabiano Araújo Moreira

Francisco Evangelista Junior

Jf_moreira1991@hotmail.com

fejr.unb@gmail.comAffiliation

Universidade de Brasília

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, Prédio SG 12, primeiro andar
Campus Darcy Ribeiro, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

Resumo. *Este trabalho implementou um modelo de zona coesiva baseado num potencial, chamado modelo PPR (Park-Paulino-Roesler), por meio do método dos elementos finitos generalizados capaz de estimar falhas em estruturas com diferentes modos de abertura de trinca. A validação da implementação foi feita através da simulação de um problema de barra submetida a diferentes modos de abertura de trinca e através da comparação dos resultados numéricos obtidos com resultados analíticos. O modelo implementado é capaz de simular a resistência e o comportamento de amolecimento de membros estruturais sob diferentes modos de falha de maneira eficiente.*

Palavras-chave: *Materiais quase-frágeis, Modelo de zona coesiva, PPR, GFEM*

1 INTRODUÇÃO

A mecânica da fratura lida com descontinuidades causadas pela formação e crescimento de uma macrotrinca. Uma idealização muito empregada na Mecânica da Fratura são os modelos de zona coesiva, Cohesive Zone Models (CZM), inicialmente introduzido por Barenblatt (1959,1962) e Dugdale (1960), para abordar as singularidades de ponta de trinca. Nestes modelos, todas as não-linearidades estão localizadas numa zona coesiva à frente da ponta da trinca que se relaciona com a zona de processo de fratura, isto é, com a região onde ocorre a dissipação da energia durante o processo de fratura. O trabalho pioneiro de Hillerborg et al. (1976) aplicou os conceitos do CZM para superar algumas limitações da mecânica da fratura linear elástica, denominado de modelo de fissura fictícia, usando o método dos elementos finitos para investigar o comportamento de fratura no concreto. Recentemente, Park e Paulino (2013) apresentaram uma revisão crítica das relações de tensão-abertura de trinca no campo do modelo de zona coesiva. O CZM tem sido amplamente utilizado em análises de materiais e estruturas (Xu e Needleman, 1994; Bazant e Planas, 1998; Hanson e Ingraffea, 2002; Roesler et al., 2007a; Park et al., 2008; Park et al., 2010; Evangelista Jr. et al, 2013; Cerrone et al., 2014; Kim e Duarte, 2015; Há et al., 2015).

Em modelos de zona coesiva o comportamento de fratura é caracterizado por um potencial, do qual as relações de tensão e abertura de trinca são obtidas. As tensões coesivas são obtidas através da primeira derivada desse potencial com respeito aos deslocamentos de abertura da fissura e a segunda derivada fornece o módulo tangente do material. Na literatura são encontrado vários CZM baseados em uma função potencial, dos quais destacam-se os encontrados nos trabalhos de Needleman (1987), Tvergaard (1990), Needleman (1990), Xu e Needleman (1993). Neste último os autores desenvolveram um potencial no qual a separação normal e tangencial é descrita através de funções exponenciais. Park et al. (2009) e Park e Paulino (2012) apresentaram um modelo constitutivo de zona coesiva baseado em um potencial que pode ser aplicado para modo I e modo misto (I+II) de fratura. Esse potencial é definido por parâmetros físicos tais como energia de fratura, parâmetros de resistência (resistência a tração, tensão de escoamento) e parâmetros de forma que caracterizam a resposta de amolecimento do material.

Há vários métodos numéricos desenvolvidos na literatura para modelar problemas de fratura com o uso do modelo de zona coesiva, incluindo o método dos elementos de contorno, métodos sem malha, método dos elementos finitos e o método dos elementos finitos generalizados e estendidos. Este último método faz uso das vantagens de métodos desenvolvidos recentemente para a propagação de trinca que utilizam o Método da Partição da Unidade. Esses novos métodos numéricos têm a capacidade de simular arbitrariamente a propagação de trinca sem que a mesma ocorra em regiões pré-definidas ou ao longo das fronteiras dos elementos (Belytschko e Black, 1999; Duarte et al., 2001; Wells e Sluys, 2001; Mariani e Perego, 2003; Simone, 2007; Kim e Duarte, 2015).

Neste trabalho, relações constitutivas baseadas na Mecânica da Fratura coesiva, mais especificamente no modelo de zona coesiva de Park-Paulino-Roesler (PPR) (Park et al., 2009; Park e Paulino, 2012), são adotadas para a descrição física de materiais quase-frágeis sujeito à fissuração. Essas relações são combinadas com as hipóteses do Método dos Elementos Finitos Generalizados para formar um modelo capaz de descrever o comportamento de uma estrutura com descontinuidade, através da introdução de um salto no campo de deslocamentos de um

elemento finito padrão. Este artigo está organizado como segue: a seção 2 apresenta de forma simplificada a metodologia do método dos elementos finitos generalizados empregado, a seção 3 descreve as leis coesivas utilizadas para caracterizar o comportamento de amolecimento do material, a seção 4 é apresentado os resultados das simulações numéricas realizadas e a seção 5 conclui o presente trabalho.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (Generalized Finite Element Method - GFEM) surgiu a partir dos trabalhos de Babuška *et al.* (1994), Duarte e Oden (1995), Melenk e Babuška (1996), Duarte e Oden (1996), Babuška e Melenk (1997) e Oden *et al.* (1998). O mesmo se baseia no princípio da partição da unidade e consiste basicamente no enriquecimento das funções de forma tradicionais dos elementos finitos com outras funções ditas especiais que representam o comportamento local da solução. Esse enriquecimento gera graus de liberdade extras nos nós do domínio sujeitos ao enriquecimento.

Para o caso descontínuo, as funções de enriquecimento podem ser encontradas a partir da cinemática do salto de deslocamento. O campo de deslocamento para um elemento com graus de liberdade extras pode ser interpolado pela Eq. (1a), com $\mathcal{H}_{\Gamma_d}$ sendo a função Heaveside centrada na descontinuidade (Γ_d), e o salto de deslocamento em Γ_d dado pela Eq. (1b).

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{a} + \mathcal{H}_{\Gamma_d}\mathbf{N}\mathbf{b} \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket &= \mathbf{N}\mathbf{b}|_{\Gamma_d} \end{aligned} \quad (1a,b)$$

As equações de equilíbrio para um corpo Ω (Fig. 1) cortado pela descontinuidade Γ_d , desconsiderando as forças de corpo, podem ser resumidas nas Eq. (2a-c) e as condições de contorno essenciais são dadas pela Eq. (2d):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0 \text{ em } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \Gamma_t \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_d &= \mathbf{t} \text{ em } \Gamma_d \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u \end{aligned} \quad (2a-d)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões de Cauchy, $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal a superfície do corpo Ω , $\bar{\mathbf{t}}$ é o vetor de forças aplicadas, $\mathbf{t}$ é o vetor de forças agindo na descontinuidade e $\bar{\mathbf{u}}$ são os deslocamentos prescritos.

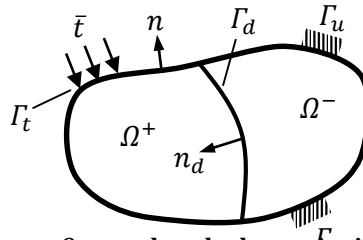


Fig. 1: Corpo Ω cortado pela descontinuidade Γ_d .

Para as relações constitutivas, as tensões para o domínio contínuo são expressas em termos dos deslocamentos nodais, conforme a Eq. (3a); e as tensões na descontinuidade são expressa em termos dos deslocamentos nodais adicionais, conforme a Eq. (3b):

$$\begin{aligned}\sigma &= D\varepsilon = D(Ba + \mathcal{H}Bb) \\ t &= T[[u]] = TNb\end{aligned}\tag{3a,b}$$

em que D é a relação entre as tensões e as deformações e T é a relação entre as tensões e os deslocamentos na descontinuidade.

Em modelos de zona coesiva, a relação $T[[u]]$ é descrita por um modelo constitutivo expresso em uma curva de tensão-abertura de trinca que permite a simulação da zona de processo aplicando tensões normais ao plano de abertura dependentes do valor de abertura da trinca. No modelo proposto, esta relação só é considerada quando a tensão em qualquer ponto de integração do elemento atingir um valor crítico, neste caso a tensão de resistência a tração do material (f_t) e, portanto, a descontinuidade é inserida no elemento por meio das funções de enriquecimento pertinentes.

3 MODELO DE ZONA COESIVA

O modelo de zona coesiva é um dos primeiros métodos a tratar da propagação discreta de trinca em diversos tipos de materiais. Seu conceito foi introduzido por Barenblatt (1959, 1962) e Dugdale (1960) com o objetivo de abordar as tensões singulares existentes na extremidade da trinca. Para caracterizar o Modelo de Zona Coesiva, é essencial a determinação da forma da curva de amolecimento. Nesta seção será apresentado brevemente alguns modelos de zona coesiva existentes na literatura e que foram utilizados nas simulações numéricas, são eles: linear, bilinear e PPR.

De acordo com a abordagem do GFEM, o modelo constitutivo de um elemento atravessado por uma trinca é definido por um sistema de coordenada local, ortogonal, onde os vetores n e s representam, respectivamente, as direções normal e paralela à fissura. No restante do domínio não fissurado considera-se que o material possui comportamento elástico, isto é, a relação instantânea entre as tensões e as deformações D , dada na Eq. (3a), é a tangente constitutiva elástica. Modelo de Park-Paulino-Roesler

Park *et al.* (2009) propuseram recentemente um modelo coesivo unificado para modo misto de fratura denominado pelos autores de Park-Paulino-Roesler, ou simplesmente PPR. O modelo PPR é apresentado na forma de potencial Ψ e se baseia, em sua forma extrínseca, nos

parâmetros físicos de fratura: energia de fratura normal e tangencial, ϕ_n e ϕ_s , e tensão máxima resistente normal e tangencial, σ_{max} e τ_{max} ; e nos parâmetros de forma, α e β , que caracterizam a resposta de amolecimento do material (Park *et al*, 2009). Esse potencial é expresso por:

$$\begin{aligned} \Psi(\Delta_n, \Delta_s) = & \min(\phi_n, \phi_s) \\ & + \left[\Gamma_n \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^\alpha + \langle \phi_n - \phi_s \rangle \right] \left[\Gamma_s \left(1 - \frac{|\Delta_s|}{\delta_s} \right)^\beta \right. \\ & \left. + \langle \phi_s - \phi_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (4)$$

em que Δ_n e Δ_s são, respectivamente, as aberturas na direção normal e tangencial da trinca. As tensões coesivas normal e tangencial podem ser obtidas através do gradiente do potencial da Eq. (4):

$$\begin{aligned} T_n(\Delta_n, \Delta_s) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_n} = -\alpha \frac{\Gamma_n}{\delta_n} \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^{\alpha-1} \left[\Gamma_s \left(1 - \frac{|\Delta_s|}{\delta_s} \right)^\beta + \langle \phi_s - \phi_n \rangle \right], \\ T_s(\Delta_n, \Delta_s) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_s} \\ &= -\beta \frac{\Gamma_s}{\delta_s} \left(1 - \frac{|\Delta_s|}{\delta_s} \right)^{\beta-1} \left[\Gamma_n \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^\alpha + \langle \phi_n - \phi_s \rangle \right] \frac{\Delta_s}{|\Delta_s|}, \end{aligned} \quad (5a,b)$$

em que o termo $\langle \cdot \rangle$ é conhecido como *Macauley bracket*, isto é:

$$\langle x \rangle = (x + |x|)/2, \quad (6)$$

os comprimentos característicos, δ_n e δ_s , são dados por:

$$\delta_n = \frac{\alpha \phi_n}{\sigma_{max}}, \quad \delta_s = \frac{\beta \phi_s}{\tau_{max}}, \quad (7)$$

as constantes energeticas, Γ_n e Γ_s , são dadas por:

$$\Gamma_n = (-\phi_n)^{\langle \phi_n - \phi_s \rangle / (\phi_n - \phi_s)}, \quad \Gamma_s = (-\phi_s)^{\langle \phi_s - \phi_n \rangle / (\phi_s - \phi_n)}, \quad (8a,b)$$

se $\phi_n \neq \phi_s$. Se as energias de fratura são iguais, então Γ_n e Γ_s são:

$$\Gamma_n = -\phi_n, \quad \Gamma_s = 1. \quad (9)$$

Na Fig. 2 está plotado o Potencial, Ψ , e as tensões coesivas T_n e T_s para o caso em que os parâmetros de fratura e de forma são: $\phi_n = 100 \text{ N/m}$, $\phi_s = 200 \text{ N/m}$, $\sigma_{max} = 40 \text{ MPa}$, $\tau_{max} = 30 \text{ MPa}$, $\alpha = 5$ e $\beta = 1.3$.

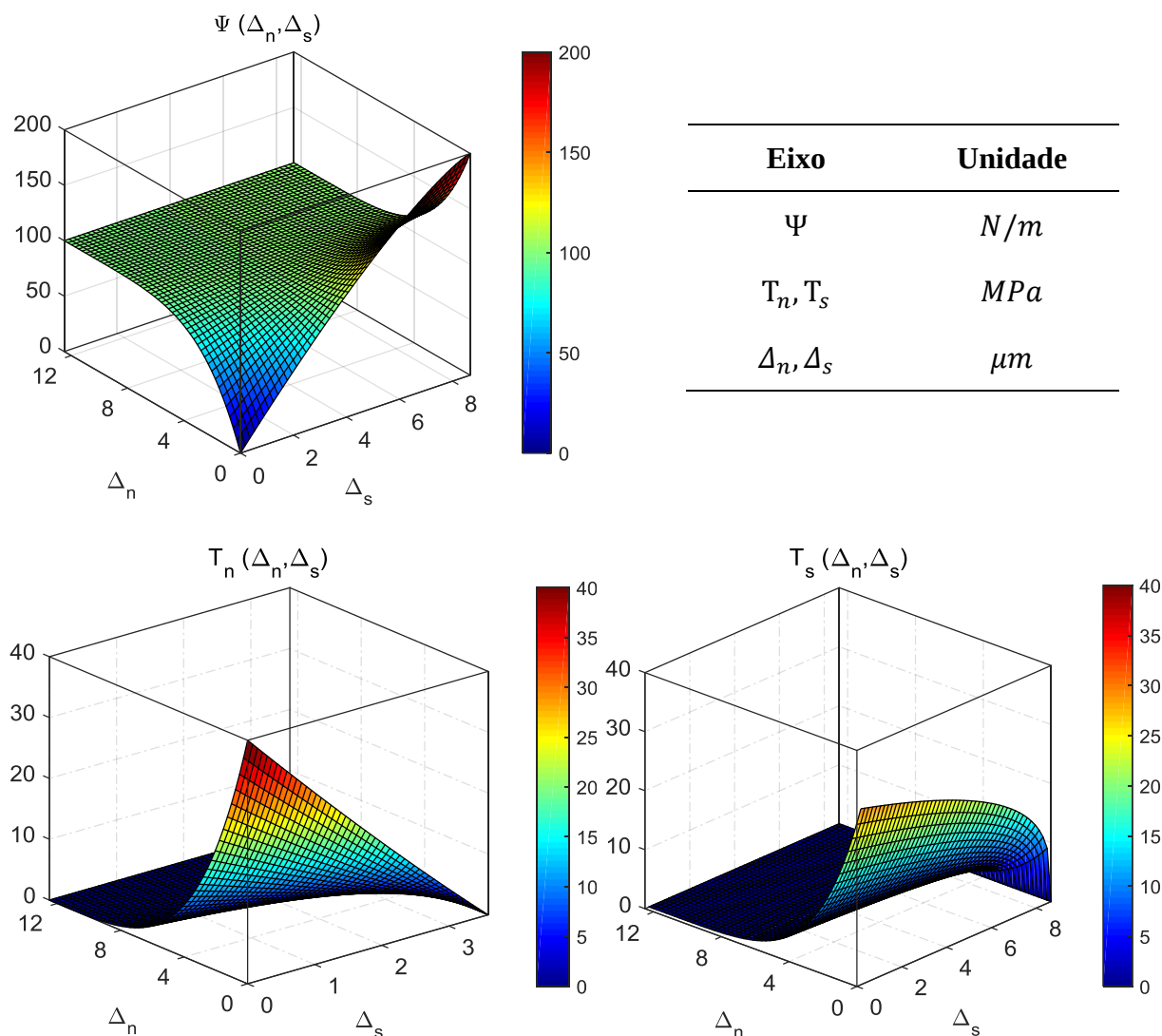


Fig. 2: Potencial e seus gradientes (tensões coesivas) para o modelo de zona coesiva extrínseco PPR.

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Esta seção apresenta os resultados de simulações numéricas realizadas com o objetivo de verificar a abordagem do GFEM com o modelo PPR apresentado na seção anterior. O objetivo das simulação é avaliar a reposta de uma barra com descontinuidade, engastada na base e submetida a um carregamento concentrado localizado na extremidade oposta ao engastamento. A geometria e discretização da malha de elementos finitos utilizada nos testes é mostrada na Fig. 3, com $L = 1$, $H = 1$ e espessura $b = 1$. Uma descontinuidade coesiva é introduzida no meio da barra quando a tensão de tração atinge a resistencia a tração f_t do material.

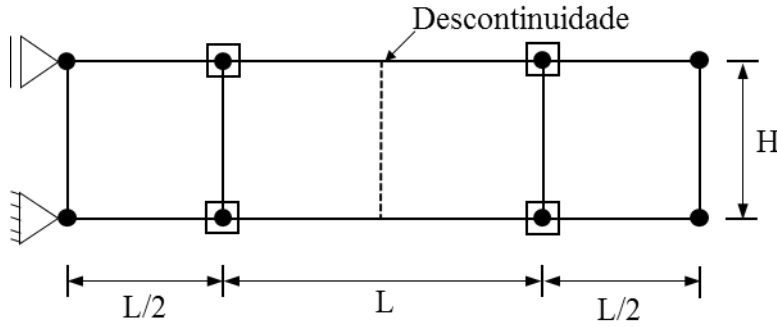


Fig. 3: Geometria e discretização da malha de elementos finitos da barra analisada. Os quadrados indicam os nós enriquecidos segundo a metodologia do GFEM.

Os parâmetros requeridos pelas leis coesivas implementadas são encontrados na **Tabela 1**. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson adotados em todas as simulações são $E = 33 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.2$, respectivamente.

Tabela 1. Parâmetros das leis do modelo PPR.

Park–Paulino–Roesler (PPR)					
$\sigma_{max} \text{ (MPa)}$	$\tau_{max} \text{ (MPa)}$	$\phi_n \text{ (N/mm)}$	$\phi_s \text{ (N/mm)}$	α	β
3.0	3.0	100	100	5	5

Utilizando os parâmetros mostrados na **Tabela 1**, as tensões coesivas T_n e T_s podem ser plotadas em função das aberturas normal Δ_n e tangencia Δ_s de trinca. O resultado são as superfícies mostradas na Fig. 5 que reproduzem exatamente o comportamento esperado para as tensões existentes na superfície da descontinuidade.

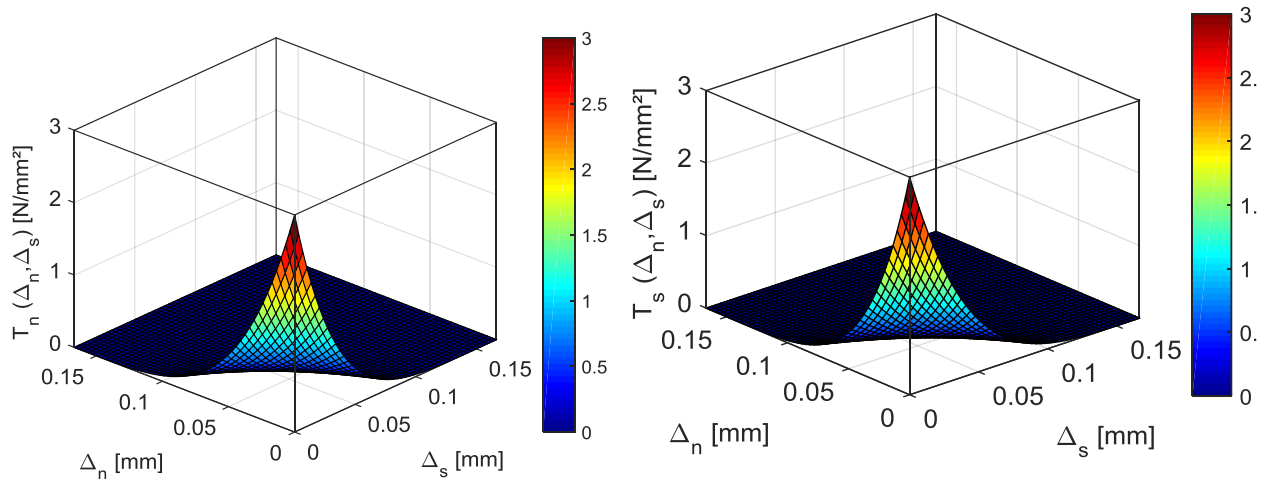


Fig. 4: Tensões coesivas para o modelo de zona coesiva extrínseco PPR utilizando os parâmetros utilizados nas simulações numéricas.

Com o objetivo de mostra a capacidade da implementação do GFEM com o PPR em estimar o corportamento de danificação, foram realizadas simulações numéricas na barra com

descontinuidade da Fig. 3 onde se variavam as condições de contorno aplicadas. Os ensaios são controlados por deslocamentos normais e tangenciais impostos na extremidade da barra, enquanto que a outra extremidade permanece engastada. Essas condições de carregamento vão desde tração uniaxial (modo I), passando por estados mistos (modo I+II) até cisalhamento puro (modo II). As simulações consideraram o estado plano de tensão. A Fig. 5 mostra os resultados para a tensão normal σ_n e tensão cisalhante σ_s na barra em função, respectivamente, dos deslocamentos normais e tangenciais aplicados. Através da comparação das superfícies da Fig. 4 com as da Fig. 5 pode-se perceber a semelhança da resposta da implementação do GFEM com o PPR com as tensões coesivas resultados das leis que caracterizam o modelo PPR.

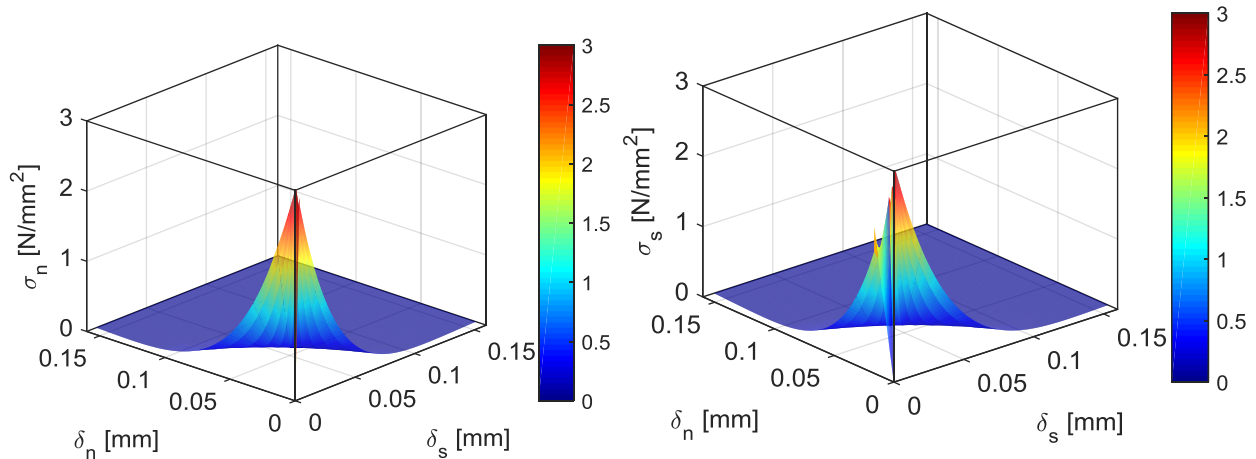


Fig. 5: Superfície de resposta da tensão normal σ_n versus deslocamento normal δ_n e tensão de cisalhamento versus deslocamento tangencial δ_s .

Dentre os ensaios realizados destacam-se três: ensaio de tensão uniaxial (teste 1), ensaio com deslocamento normal igual ao tangencial (teste 2) e ensaio de cisalhamento puro (teste 3). A trinca é perpendicular à direção de carregamento normal em todos os teste, assim como mostrado na Fig. 3. Com isso, pode-se obter o modo I de abertura de trinca no teste 1 (Fig. 6), modo misto no teste 2 (Fig. 7) e modo II no teste 3 (Fig. 8).

A Fig. 6 mostra os resultados encontrados para o teste 1. Na figura é plotada a tensão normal σ_N versus o deslocamento normal δ_N dos resultados numérico e analítico. Conforme se observa, obteve-se uma excelente concordância entre os resultados comparados, com os resultados numéricos situados praticamente sobre a respectiva curva analítica.

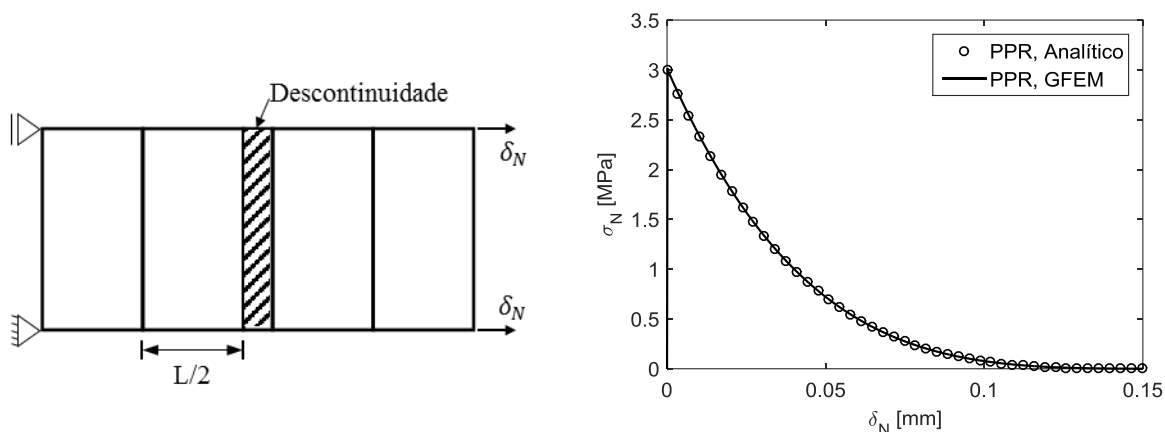


Fig. 6: Teste 1 (deslocamento normal). Gráfico comparativo da tensão normal σ_N versus deslocamento normal δ_N analítico e numérico para o modelo PPR.

A Fig. 7 mostra os resultados encontrados para o segundo teste. Na figura é plotada a tensão normal σ_N versus o deslocamento normal δ_N e a tensão tangencial ou cisalhante σ_S versus o deslocamento tangencial δ_S . Conforme se observa, as curvas das simulações numéricas estão em concordância com as curvas analíticas para ambas as tensões, e de acordo com o limite máximo a que as mesmas devem atingir, isto é, a resistência a tração do material.

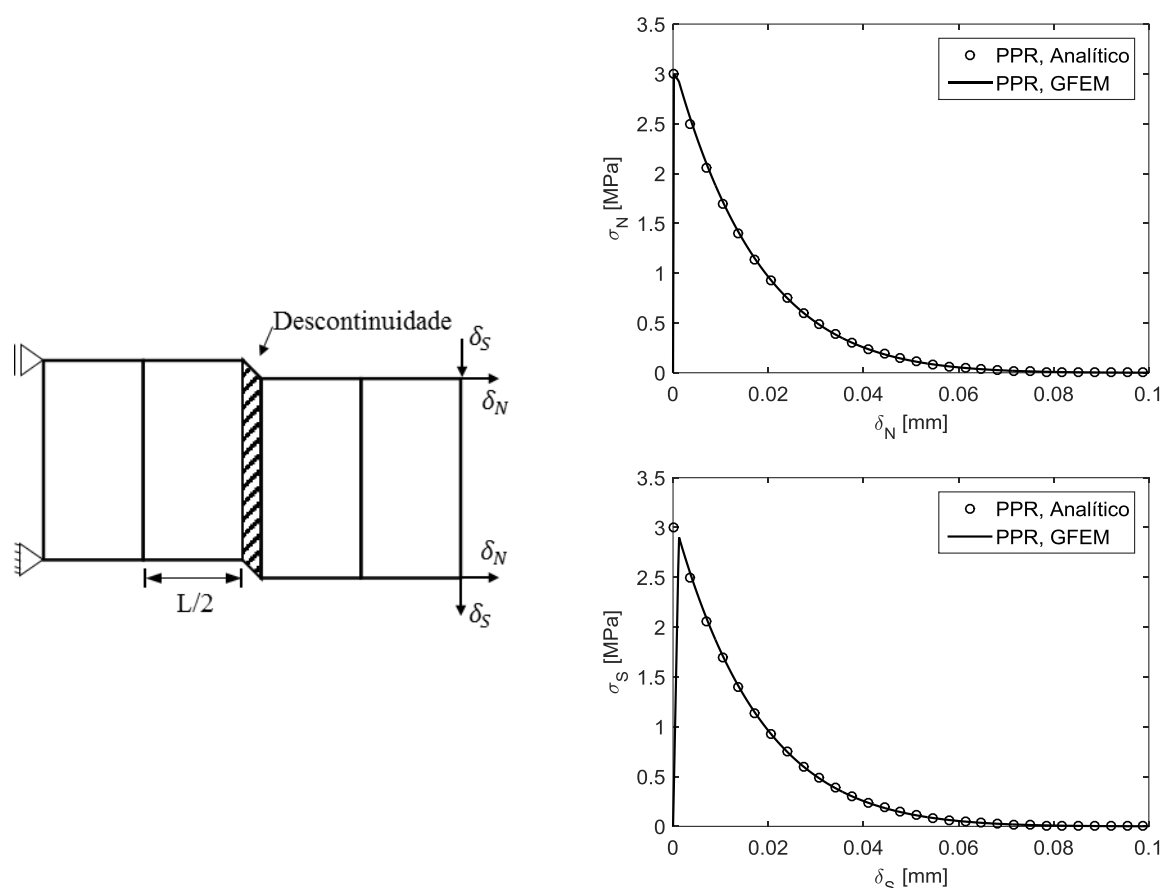


Fig. 7: Teste 2 (Deslocamento normal e tangencial). Gráficos comparativos das tensões normal σ_N e cisalhante σ_S versus deslocamento normal δ_N e tangencial δ_S para o modelo PPR.

A Fig. 8 mostra os resultados encontrados para o teste 3. Na figura é plotada a tensão tangencial σ_S versus o deslocamento tangencial δ_S . Os resultados são semelhantes àqueles observados para o teste 1 para a tensão normal, ou seja, a tensão tangencial aumenta até atingir um valor máximo (resistência à tração) e, em seguida, diminui para zero numa curva de amolecimento característica do modelo PPR.

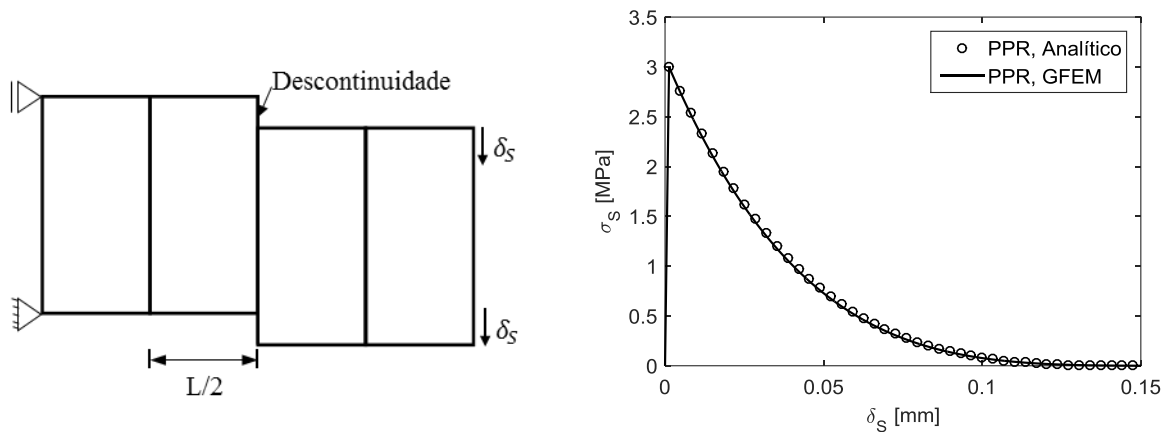


Fig. 8: Teste 3 (deslocamento tangencial). Gráfico comparativo da tensão cisalhante σ_S versus deslocamento tangencial δ_S para o modelo PPR.

5 CONCLUSÕES

Este artigo implementou bidimensionalmente, através do método dos elementos finitos generalizados, o modelos de zona coesiva PPR para estimar o comportamento de falhas em estruturas com diferentes modos de abertura de trinca. O modelo foi validado através da comparação dos resultados numéricos com resultados analíticos para o modo I de abertura de trinca (teste 1), modo misto (teste 2) e modo II (teste 3). A comparação mostrou que a estratégia do GFEM juntamente com o CZM consegue reproduzir/estimar a tensão máxima (resistência a tração) e o comportamento de amolecimento da estrutura, comprovando a eficiência e acurácia dessa estratégia em prever o comportamento de ruptura. O modelo PPR, cujas leis de amolecimento consideram as tensões normal e tangencial ambas em função das aberturas normal e tangencial, mostrou-se eficiente em todos os testes realizados, sendo portanto este modelo robusto e eficaz.

AGREDECIMENTOS

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Babuška I, Caloz G, Osborn JE. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1994; **31**: 945 – 981.
- Babuška I, Melenk JM. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1997; **40**: 727-758.
- Barenblatt, GI. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses, axially symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 1959; **23**: 622–636.

- Barenblatt GI. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics* 1962; **7**: 55–129.
- Bazant ZP, Planas J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-brittle Materials. *CRC Press* 1998.
- Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999; **45**: 601–620.
- Cerrone A, Wawrzynek P, Nonn A, Paulino GH, Ingraffea A. Implementation and verification of the Park–Paulino–Roesler cohesive zone model in 3D. *Engineering Fracture Mechanics* 2014; **120**: 26-42.
- Duarte CA, Oden JT. *Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem*. Technical Report 9505, TICAM, University of Texas at Austin, May 1995.
- Duarte CA, Oden JT. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1996; **139**: 237-262.
- Duarte CA, Hamzeh ON, Liszka TJ, Tworzydło WW. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2001; **190**: 2227–2262.
- Dugdale DS. Yield of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics and Solids* 1960; **8**: 100-104.
- Evangelista Jr. F, Roesler JR, Proença SPB. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. *Engineering Fracture Mechanics* 2013; **97**: 261-280.
- Ha K, Baek H, Park K. Convergence of fracture process zone size in cohesive zone. *Applied Mathematical Modelling* 2015;
- Hanson JH, Ingraffea AR. Using Numerical Simulations to Determine the Accuracy of the Size - Effect and Two-Parameter Data Reduction Methods for Fracture Toughness Tests of Concrete. *Engineering Fracture Mechanics* 2002; **70**: 1015-1027.
- Hillerborg A, Modeer M, Peterson PE. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Research* 1976; **6**: 773-782.
- Kim J, Duarte CA. A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015; **104**: 1139-1172.
- Mariani S, Perego U. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2003; **58**:103–26.
- Melenk JM, Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996; **139**: 289-314.
- Needleman A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J Appl Mech-Trans ASME* 1987; **54**: 525–31.

- Needleman A. An analysis of tensile decohesion along an interface. *J Mech Phys Solids* 1990; **38**: 289–324.
- Oden JT, Duarte CA, Zienkiewicz OC. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998; **153**: 117–126.
- Park K, Paulino GH, Roesler JR. Determination of the kink point in the bilinear softening model. *Engineering Fracture Mechanics* 2008; **75**: 3806–3818.
- Park K, Paulino GH, Roesler JR. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2009; **57**: 891–908.
- Park K, Paulino GH, Roesler JR. Cohesive Fracture Model for functionally Graded Fiber Reinforced Concrete. *Cement and Concrete Research* 2010; **40**: 956–965.
- Park K, Paulino GH. Computational implementation of the PPR potential-based cohesive model in ABAQUS: Educational perspective. *Engineering Fracture Mechanics* 2012; **93**: 239–262.
- Park K, Paulino GH. Cohesive zone models: a critical review of traction–separation relationships across fracture surfaces. *Appl Mech Ver* 2013; **64**: 1–20.
- Roesler JR, Paulino GH, Park K, Gaedicke C. Concrete Fracture Prediction Using Bilinear Softening. *Cement and Concrete Composites* 2007; **29**: 300–312.
- Simone, A. Partition of unity-based discontinuous finite elements: GFEM, PUFEM, XFEM. *Revue Européenne de Génie Civil* 2007; **11**: 1045–1068.
- Tvergaard V. Material failure by void growth to coalescence. *Adv Appl Mech* 1990; **27**: 83–151.
- Wells GN, Sluys LJ. A new method for modeling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001; **50**: 2667–2682.
- Xu XP, Needleman A. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. *Model Simul Mater Sci Engng* 1993; **1**: 111–32.
- Xu XP, Needleman A. Numerical Simulations of Fast Crack Growth in Brittle Solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 1994; **42**: 1397–1434.