



NOVA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS PLANAS EM CONCRETO ARMADO COM PERDA DE RIGIDEZ DESCRITA SEGUNDO GHALI-FAVRE

Tatiane Maga Pereira Mendes

Iara Souza Ribeiro

Francisco Célio de Araújo

tati-op@hotmail.com

iarasribeiro90@gmail.com

dearaujofc@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto

R. Diogo de Vasconcelos, 122, Pilar, 35400-000, Ouro Preto, Minas Gerais, Brazil

Resumo. Neste artigo, apresenta-se uma nova formulação do Método da Rigidez Direta para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos em concreto armado. A não-linearidade física será incluída via implementação do modelo de Ghali e Favre (1986), segundo o qual, a rigidez, em uma dada seção de um elemento em concreto armado, é obtida da curva de esforços solicitantes versus deformações generalizadas. No estágio I, admite-se uma relação linear. No estágio II, a rigidez é determinada da interpolação das deformações generalizadas nos estádios I e II (puro) em função do esforço solicitante. Na nova formulação do Método da Rigidez Direta proposta neste artigo, a matriz de rigidez do elemento em concreto armado é determinada considerando-se a variação de rigidez que ocorre ao longo do elemento em função do processo de fissuração. O algoritmo não-linear consiste de um esquema incremental-iterativo de Newton-Raphson no qual a matriz de rigidez é atualizada, a cada incremento de carga, cada iteração do processo, considerando-se tanto a degradação da seção pela fissuração do concreto como grandes deslocamentos (formulação corrotacional). Comparações com resultados experimentais são mostradas para atestar a eficiência da estratégia.

Palavras-chave: Análise não-linear física e geométrica de estruturas em concreto armado; Método da Rigidez Direta, Modelo de Ghali-Favre.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, constata-se grande avanço tecnológico na produção de materiais de alta resistência, inclusive o concreto, e também na realização de obras civis ousadas como pontes de grandes vãos, edifícios altos com elementos estruturais esbeltos, em muitos casos, com seção geometricamente variável ao longo de seu comprimento. Nesse contexto da Engenharia Estrutural, a consideração de não-linearidades na determinação da resposta dos sistemas pertinentes tem sido imprescindíveis. Particularmente no projeto de estruturas em concreto armado, em consequência da fissuração, os métodos de análise precisam considerar a não-linearidade física e a variação de rigidez ao longo do elemento (Ghali e Favre, 1986; Khuntia e Ghosh, 2004).

Por outro lado, o aumento da esbeltez dos elementos estruturais implica em sistema geometricamente não-lineares, que usualmente apresentam grandes deflexões, de modo que efeitos de 2ª ordem também devem ser considerados no projeto de estruturas.

No presente trabalho, modela-se a perda de rigidez em elementos em concreto armado segundo o modelo proposto por Ghali e Favre (1986), no qual aproxima-se a rigidez, em uma dada seção de um elemento do pórtico, a partir das curvas dos esforços solicitantes (força normal e momento fletor) versus deformações generalizadas. Segundo esse modelo, no estágio II, a rigidez é obtida através da interpolação das deformações generalizadas nos estádios I e II puros, para a seção, em função do esforço solicitante. Neste estudo, em caso de flexão simples, para valores de momento inferiores ao de fissuração (estádio I) ou superiores ao momento de escoamento (estádio III, quando o aço começa a escoar), admite-se uma relação linear.

Para a implementação computacional, neste trabalho, desenvolve-se uma formulação baseada no Método da Rigidez Direta (MRD), que possibilita a modelagem de elementos estruturais de pórtico planos com rigidezes variáveis segundo leis quaisquer, inclusão de efeitos de deformação por cisalhamento, e com seções de formas geométricas quaisquer. Um processo para a derivação da matriz de rigidez geométrica de elementos com rigidez variável é também apresentado. Adicionalmente, com base no modelo de Ghali e Favre (1986), implementa-se um processo para a atualização das matrizes de rigidez de elemento em função da fissuração e nível de solicitação. Em relação à análise não-linear em si, adota-se um esquema incremental-iterativo de Newton-Raphson (com controle de carga) no qual a matriz de rigidez é atualizada, a cada iteração do processo, considerando-se tanto a degradação da seção pela fissuração do concreto como grandes deslocamentos. Neste algoritmo, adota-se uma formulação lagrangeana atualizada com variáveis descritas em relação referenciais corrotacionais.

Nas aplicações fazem-se comparações com resultados experimentais e apresentados por outros autores para atestar a eficiência da estratégia.

2 MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA (MRD)

No MRD as incógnitas do problema são os deslocamentos dos nós do modelo estrutural, os quais, em uma análise estática, se relacionam com as ações nodais a partir da equação:

$$\mathbf{K}_t \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

em que $\mathbf{K}_t$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura, $\mathbf{f}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes e $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos nodais

Para o caso de análise não-linear, os coeficientes da matriz de rigidez tangente são constituídos por termos lineares (efeitos de 1ª ordem) e de ordem superior, estes últimos dependentes do processo de deformação da estrutura. Nesta pesquisa, a matriz $\mathbf{K}_t$ constitui-se de duas partes apenas, que são a matriz de rigidez elástica, $\mathbf{K}_e$, e a matriz de rigidez geométrica, $\mathbf{K}_g$, que essencialmente inclui os efeitos geométricos de 2ª ordem em consequência de grandes deslocamentos.

As matrizes de rigidez $\mathbf{K}_e$ e $\mathbf{K}_g$ para um elemento de pórtico plano com variação genérica de rigidez são obtidas pelo processo descrito por de Araújo e Pereira (2017) e Ribeiro (2016), respectivamente. Aspectos genéricos dessa formulação são apresentados a seguir.

2.1 Matriz de rigidez do elemento de pórtico plano

As expressões genéricas dos coeficientes das matrizes de rigidez elástica (de Araújo e Pereira, 2017; Pereira, 2015) e geométrica (Ribeiro, 2016) foram calculadas utilizando uma formulação baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), considerando-se o elemento genérico de pórtico plano mostrado na Fig. 1.

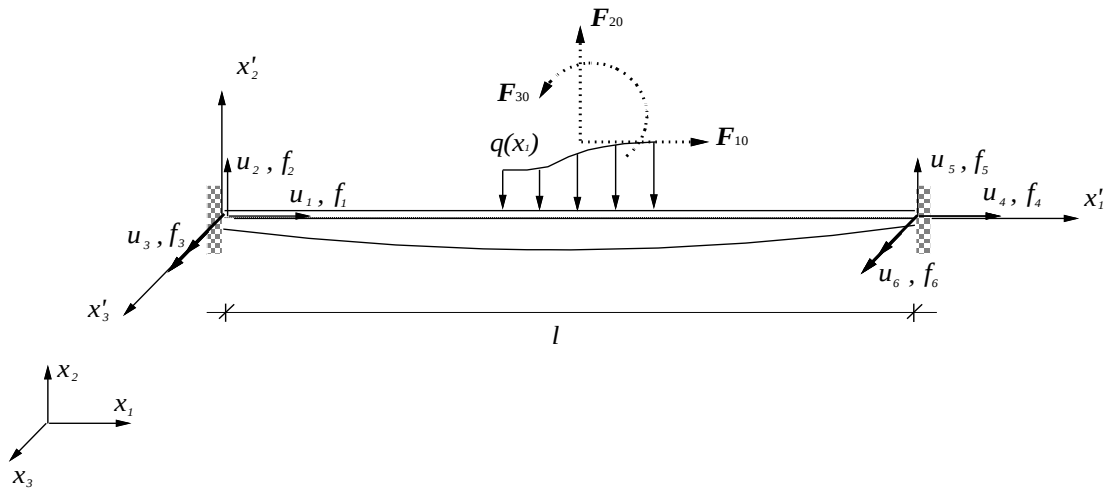


Figura 1. Elemento de pórtico plano

Aplicando-se o PTV, estabelece-se a seguinte equação de compatibilidade de deslocamentos,

$$\bar{f}_i u_i = \int_l \bar{M}_i d\theta + \int_l \bar{N}_i d\delta + \int_l \bar{Q}_i d\lambda \quad (2)$$

em que u_i são os deslocamentos incógnitos; $d\theta$ é a rotação flexional relativa; $d\delta$ corresponde ao deslocamento axial relativo e $d\lambda$ ao deslocamento transversal relativo; $\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$, e $\bar{Q}_i$ são os esforços devidos ao estado de carregamento (Fig. 2) em que $\bar{f}_i = 1$, ou seja,

$$\bar{M}_i = M_i(\bar{f}_i), \quad \bar{N}_i = N_i(\bar{f}_i), \quad \bar{Q}_i = Q_i(\bar{f}_i) \quad (3)$$

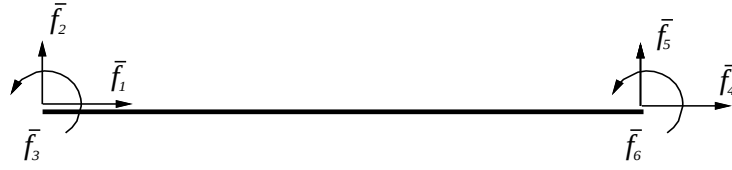


Figura 2. Estado de carregamento de um elemento de pórtico plano

A partir da equação 2, gera-se um conjunto de equações de compatibilidade que permite a obtenção dos valores de rigidez para elementos com variações quaisquer de inércia (de Araújo e Pereira, 2017). A seguir, apresentam-se detalhes dessa formulação para a obtenção de matriz de rigidez geométrica de pórtico (Ribeiro, 2016).

2.1.1 Matriz de rigidez geométrica de elemento de pórtico plano (K_g)

Para derivação da matriz de rigidez geométrica foram considerados os esforços adicionais gerados por cargas axiais e transversais em presença de deslocamento lateral do elemento. Foram considerados dois casos distintos, o caso I e o caso II, mostrados como segue.

Caso I:

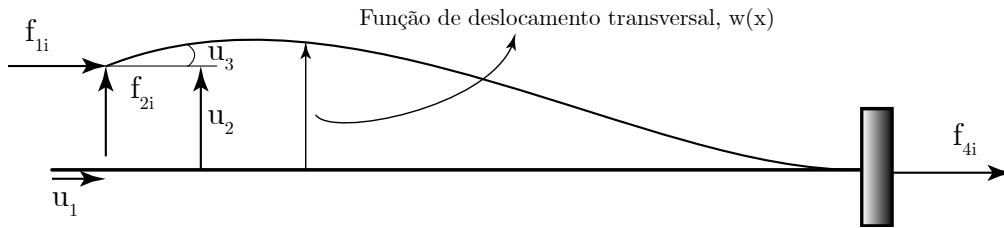


Figura 3. Elemento de pórtico plano deformado no caso I

Neste caso o nó final está restringido, isto é $u_4 = u_5 = u_6 = 0$. Baseado na Fig. 3, vê-se que o momento fletor adicional gerado pela carga axial (f_{1i}) pode ser expresso por

$$M_1 = M(f_{1i}) = -f_{1i} [w(x) - u_2] \quad (4)$$

Além disso, pela decomposição das forças f_{1i} e f_{2i} segundo as direções tangente, t , e normal, n , ao eixo deformado (Fig. 4), há o surgimento de um esforço cortante (Q_1) e de um esforço normal (N_2). Sabendo-se que a rotação u_3 em um ponto é dada pela derivada primeira da função deslocamento, escreve-se a equação dos referidos esforços na forma:

$$Q_1 = Q(f_{1i}) = -f_{1i} w'(x) \quad (5)$$

$$N_2 = N(f_{2i}) = f_{1i} u'(x) \quad (6)$$

em que $u(x)$ é a função que descreve os deslocamentos axiais.

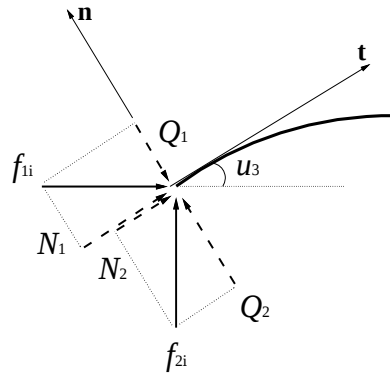


Figura 4. Decomposição das forças f_{1i} e f_{2i} no eixo deformado

Caso II:

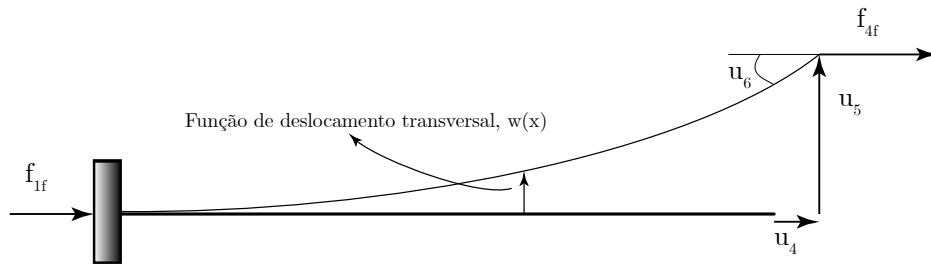


Figura 5. Elemento de pórtico plano deformado no caso II

Seguindo o mesmo procedimento do caso I, podem-se derivar as expressões para avaliação dos coeficientes de rigidez geométrica no caso II (Fig. 5). O momento fletor adicional gerado pela carga axial (f_{4f}) é expresso por:

$$M_4 = M(f_{4f}) = -f_{4f} [u_5 - w(x)] \quad (7)$$

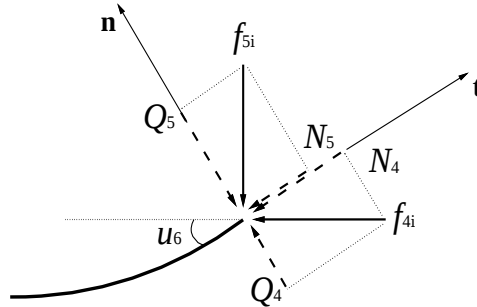


Figura 6. Decomposição das forças f_{4f} e f_{5f} no eixo deformado

Assim como na determinação dos esforços Q_1 e N_2 , os esforços cortante (Q_4) e normal (N_5) adicionais referentes ao caso II são obtidos pela decomposição da carga axial (f_{4f}) e transversal (f_{5f}) no eixo deformado (Fig. 6), segundo as equações:

$$Q_4 = Q(f_{4f}) = f_{4f} w'(x) \quad (8)$$

$$N_5 = N(f_{5f}) = f_{5f} u'(x) \quad (9)$$

Considerando-se as expressões de esforços adicionais dados nas Eqs. de (4) a (8), na Eq. (2) e estabelecendo-se as condições de compatibilidade e de equilíbrio para o elemento, pode-se obter a matriz de rigidez geométrica do elemento de pórtico plano em situações quaisquer de variação de rigidez. Particularmente para elementos de rigidez constante, resulta:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{l} & 0 & 0 & \frac{f_4}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_1 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & \frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{f_4 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} \\ 0 & \frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & \frac{f_1 l (5\varphi_y + 8)}{60 (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} & \frac{f_4 l}{(1 + \varphi_y)} \left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi_y}{12} \right) \\ -\frac{f_1}{l} & 0 & 0 & -\frac{f_4}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_1 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & 0 & -\frac{f_4 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & \frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} \\ 0 & \frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_1 l}{(1 + \varphi_y)} \left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi_y}{12} \right) & 0 & \frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_4 l (5\varphi_y + 8)}{60 (1 + \varphi_y)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

com $\varphi_y = \frac{12EI\chi}{GSI^2}$, χ sendo o fator de forma ao cisalhamento segundo a direção y.

Nos casos em que haja variação das características geométricas e físicas ao longo do elemento, integração numérica segundo a quadratura de Gauss–Legendre (Bathe, 1996) é empregada para estabelecimento das equações de compatibilidade, que possibilitarão, por sua vez, a obtenção dos coeficientes de rigidez (Ribeiro, 2016).

3 CÁLCULO DA RIGIDEZ DE SEÇÕES EM CONCRETO ARMADO

3.1 Modelo de Ghali e Favre (1986)

Quando um elemento de concreto armado (CA) está submetido à flexão simples (Fig. 7), a região abaixo da linha neutra (l.n.) é tracionada, e verifica-se o surgimento de fissuras quando o momento solicitante ultrapassa o chamado momento de fissuração, M_r , que separa o estágio I do estágio II.

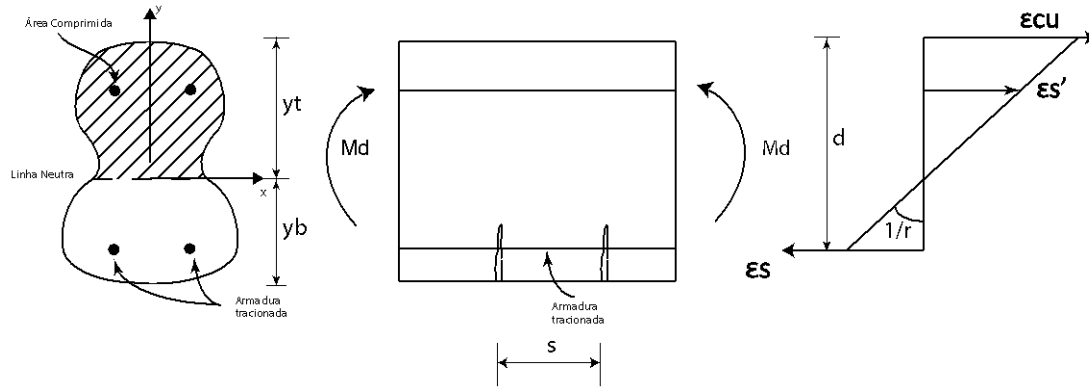


Figura 7. Elemento de CA fletido. Fonte: Adaptado de Ghali e Favre (1986)

Em geral, o diagrama momento-curvatura tem a forma mostrada na Fig. 8.

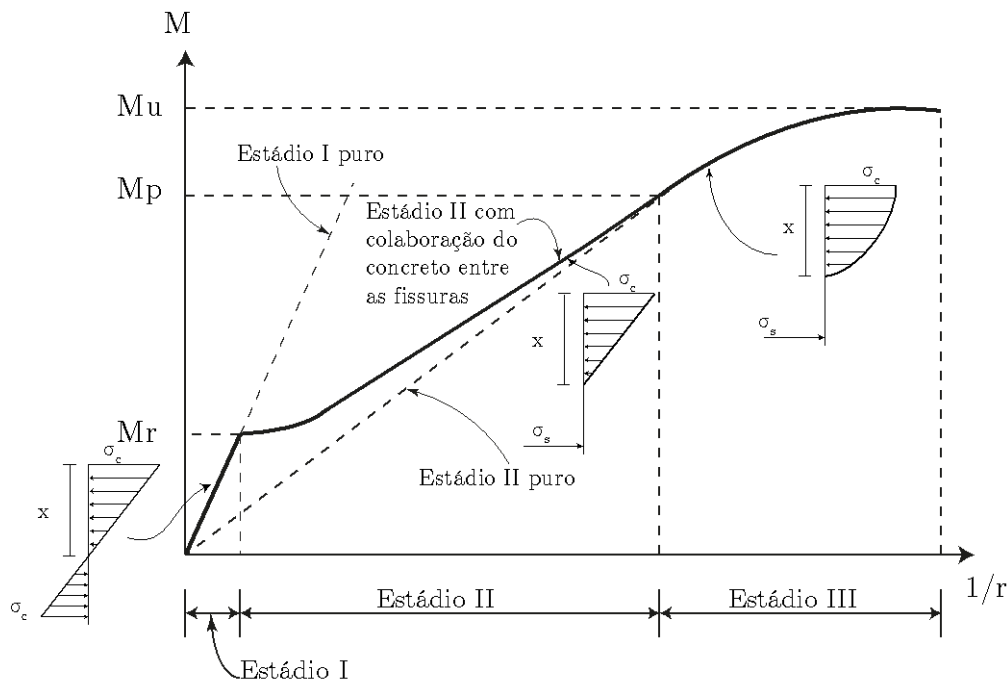


Figura 8. Momento-Curvatura. Fonte: Adaptado de Guarda (2005)

Ghali e Favre (1986) propuseram um modelo que permite obter este diagrama, no estágio II, através de uma interpolação entre os estádios I e II puros. Para isso, eles mostram que para uma seção em concreto armado, no estágio II, para um dado momento fletor solicitante, M , a curvatura média na seção é dada por

$$\left(\frac{1}{r}\right)_m = (1-\zeta)\left(\frac{1}{r}\right)_I + \zeta\left(\frac{1}{r}\right)_{II} \quad (11)$$

com $\left(\frac{1}{r}\right)_I = \frac{M}{EI_1}$ e $\left(\frac{1}{r}\right)_{II} = \frac{M}{EI_2}$ (curvaturas da seção no estágio I e II, respectivamente) e ζ é um coeficiente de interpolação entre os estádios I e II puros, determinado por

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 \quad (12)$$

sendo $M_r = \frac{\alpha_e \cdot f_{ct} \cdot I}{y_b}$ o momento de fissuração da seção, $\beta_1 = 1$ para barras nervuradas, $\beta_1 = 0,5$ para barras lisas, $\beta_2 = 1$ para o primeiro carregamento ou para cargas pouco representativas, e $\beta_2 = 0,5$ para cargas permanentes ou com grande número de ciclos de carga. Assim, a curva momento fletor versus curvatura pode ser obtida, de forma simples, e de posse dela, a determinação da rigidez flexional da seção para o momento solicitante corrente M é imediata. Note que no cálculo de M_r , considera-se o fator α_e , que correlaciona a resistência à tração do concreto na flexão com a obtida em ensaio direto.

Ressalta-se que, em elementos de concreto armado, a variação de rigidez ao longo do comprimento do elemento se dá tanto pela variação das características geométricas propriamente como conforme o nível de solicitação em cada seção. Vê-se, porém, que a formulação do MRD descrita na seção 2 possibilita então a consideração de todas essas variações de rigidez, de forma precisa e conveniente, bastando para isso que sejam calculadas as rigidezes nos pontos de integração do elemento. Particularmente para elementos sob flexão, considera-se, nas seções que correspondem aos pontos de integração, a relação

$$EI_{\text{int}} = \frac{M}{\left(\frac{1}{r} \right)_m} \quad (13)$$

3.2 Linha neutra e propriedades geométricas das seções

No presente trabalho, apenas os efeitos da flexão foram considerados. Para cálculo da linha neutra, l.n., momento de inércia e área comprimida nos estádios I e II, desenvolveu-se uma estratégia iterativa que consiste, a princípio, em anular o momento estático da seção de concreto armado em relação à l.n. (que resulta do equilíbrio da seção no regime físico linear). Sendo, para a seção íntegra (vide Fig. 9a), o momento estático dado por

$$M_s = \int_0^{y_t} y dA + \alpha \sum_{j=1}^n [A_{sj} y_{sj}] + \int_{y_b}^0 -y dA \quad (14)$$

onde dA é a área elementar de concreto, A_{sj} a área de aço da j -ésima camada, n o número de camadas de armadura, y_{sj} a ordenada da camada de aço, y_t a ordenada da fibra superior, y_b a ordenada da fibra inferior, todas as ordenadas medidas a partir do centroide da seção, descreve-se este processo iterativo conforme o algoritmo abaixo:

- 1) Arbitra-se como posição inicial da l.n., $x^{(0)} = \frac{h}{2}$, onde h é a metade da altura da seção. Então para iterações $i = 1, 2, \dots$, até a convergência para uma dada tolerância:
- 2) Calcula-se o momento estático da seção em concreto armado, M_s , em relação à l.n.

$$\begin{cases} \text{Se } |M_s| \leq tol, & x^* = x^{(i)} \text{ stop} \\ \text{Se } |M_s| > tol, & \text{passo 3} \end{cases},$$

3) Determina-se a posição da l.n na próxima iteração, $x^{(i+1)}$, pela expressão

$$\begin{cases} \text{Se } M_s > tol, & x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{x^{(0)}}{2} \\ \text{Se } M_s < -tol, & x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{x^{(0)}}{2} \end{cases}$$

4) Translação da origem do sistema de referência para a nova posição da l.n., $x^{(i+1)}$, e atualização das coordenadas dos elementos que definem o contorno da seção (usada no cálculo de M_s ; vide Fig. 9b) e volte para o passo 2.

O algoritmo acima fornece então a posição da l.n., x^* . Neste estudo adota-se $tol = 10^{-8}$.

A fim de possibilitar a descrição geométrica de seções quaisquer, a seção foi subdividida em um dado número de faixas paralelas aos eixos principais, as quais são por sua vez fornecidas geometricamente descritas por meio de uma malha de elementos lineares de contorno (Fig. 9). Para este tipo de elemento, escreve-se o momento estático da área de concreto, com auxílio do teorema de Green, pela seguinte expressão (Pereira, 2015):

$$\int_{y_b}^{y_t} y dA = \sum_{k=1}^{nbe} \oint_{\Gamma_k} x y n_x d\Gamma = \sum_{k=1}^{nbe} n_x^{(k)} l_k \left(x_k y_k + \frac{x_k l_k \sin \theta_k}{2} + \frac{y_k l_k \cos \theta_k}{2} + \frac{l_k^2 \cos \theta_k \sin \theta_k}{3} \right) \quad (15)$$

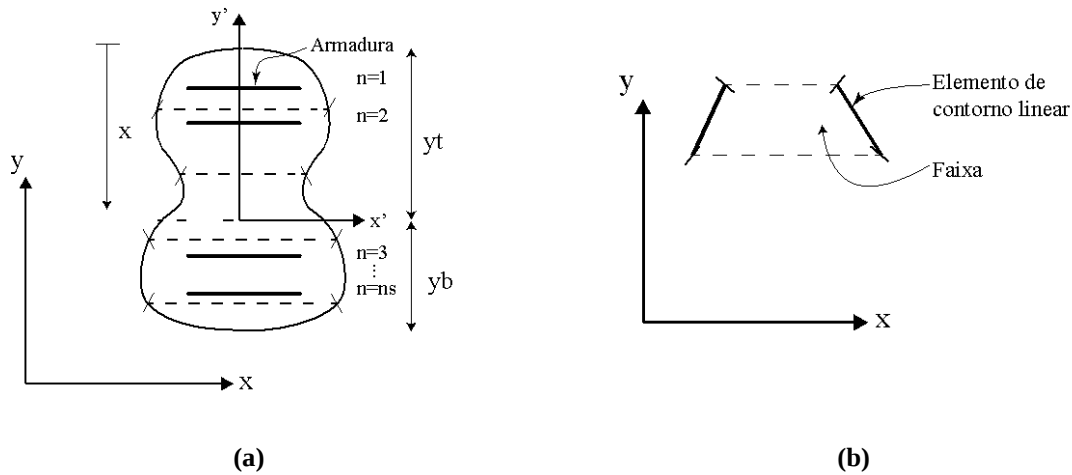


Figura 9. Discretização da seção em faixas e detalhe de uma faixa com seus pontos de integração.

sendo x_k e y_k as coordenadas do nó inicial do k -ésimo elemento de contorno, l_k o seu comprimento, $n_x^{(k)}$ a componente x de seu vetor normal unitário apontando para fora do domínio, θ_k a sua inclinação em relação ao eixo x , e nbe é o número total de elementos de contorno usados para representar a geometria da seção. Observa-se que o mesmo algoritmo

acima, para cálculo da posição da l.n., se aplica para seções tanto no estágio I como no II. Se no estágio II, basta, no cálculo de M_s , eliminar as integrais sobre os elementos de contorno que definem, na iteração corrente, a região tracionada da seção (quer dizer aqueles com ordenada $y_k \leq 0$).

Novamente aplicando o teorema de Green, obtêm-se as expressões para cálculo da área e do momento de inércia da seção em concreto armado (homogeneizada pelo coeficiente $\alpha = E_s/E_c$):

$$A = \oint x n_x d\Gamma + \alpha \sum_{j=1}^{ns} A_{sj} = \sum_{k=1}^{nbe} l_k n_x^{(k)} \left(x_k + \frac{l_k}{2} \cos \theta_k \right) + \alpha \sum_{j=1}^{ns} A_{sj} \quad (16)$$

$$I = \oint x y^2 n_x d\Gamma + \alpha \sum_{j=1}^{ns} A_{sj} y_{sj}^2 = \sum_{k=1}^{nbe} l_k n_x^{(k)} \left(x_k y_k^2 + x_k y_k l_k \sin \theta_k + \frac{x_k}{3} l_k^2 \sin^2 \theta_k + \right. \\ \left. + \frac{y_k^2}{2} l_k \cos \theta_k + \frac{2 y_k}{3} l_k^2 \cos \theta_k \sin \theta_k + \frac{l_k^3}{4} \cos \theta_k \sin^2 \theta_k \right) + \alpha \sum_{j=1}^{ns} A_{sj} y_{sj}^2 \quad (17)$$

4 MÉTODO DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

No presente trabalho o método iterativo utilizado para resolver o sistema não-linear de equações é o procedimento de *Newton-Raphson* com controle de carga e atualização da matriz de rigidez a cada iteração (Fig. 10).

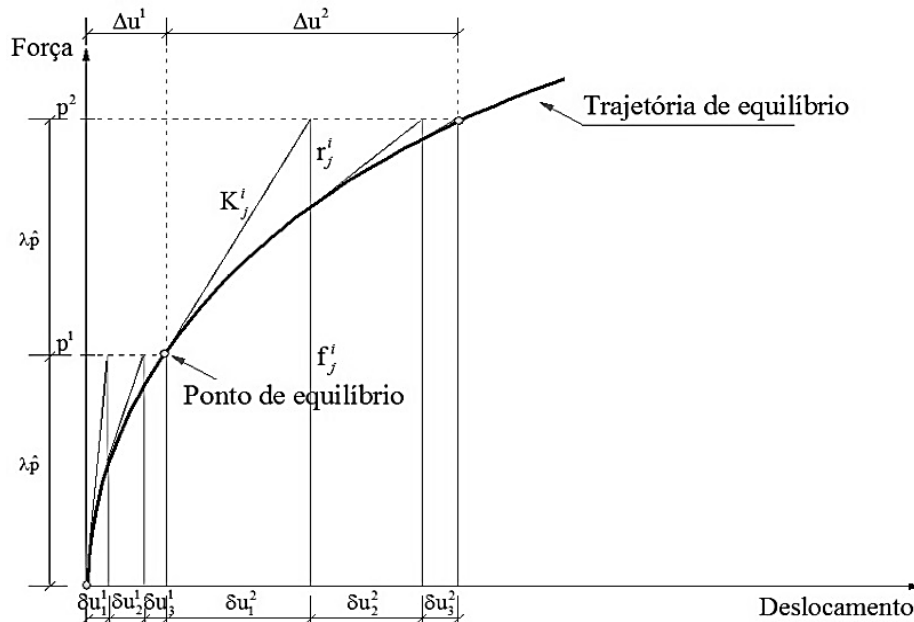


Figura 10. Método de Newton-Raphson padrão

O referido método foi implementado conforme o fluxograma da Fig. 11 (Yang e Kuo, 1994). Em linhas gerais, para cada passo do *loop* incremental, busca-se encontrar a

configuração deformada de equilíbrio do sistema estrutural através de um processo iterativo. Neste processo, destaca-se a atualização da matriz de rigidez tangente a cada iteração, com degradação da rigidez flexional, e a incorporação da abordagem corrotacional.

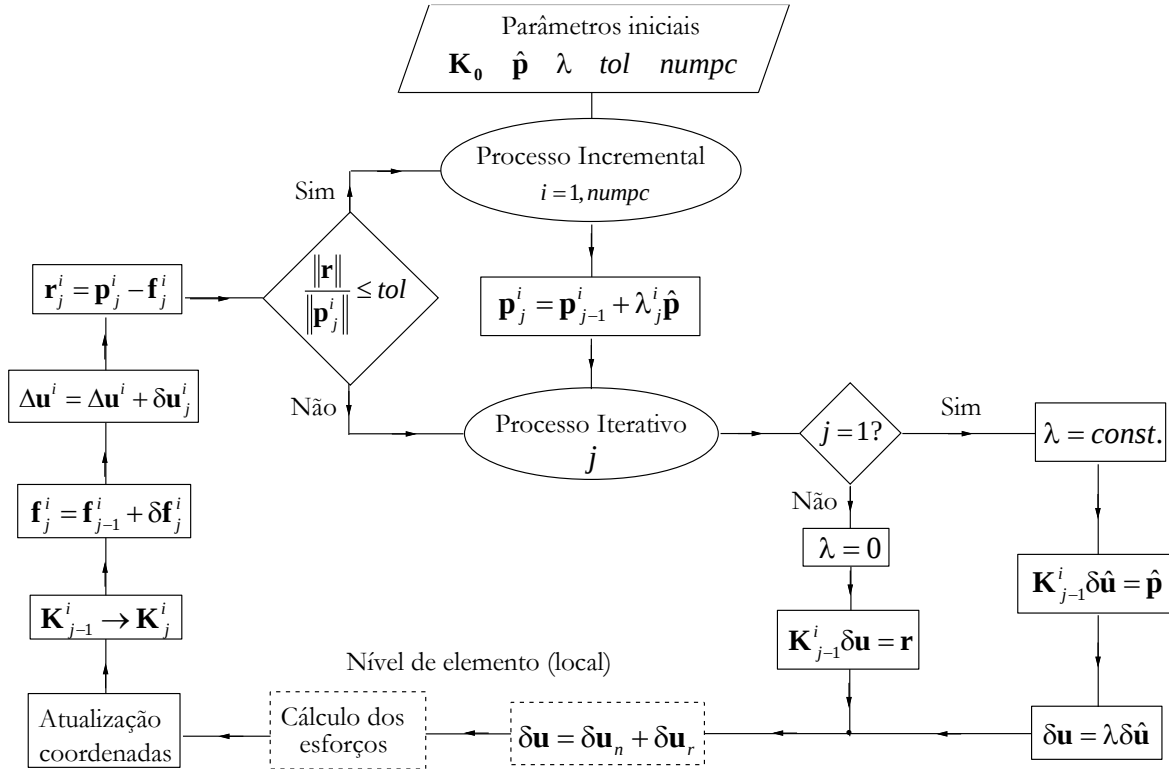


Figura 11. Fluxograma que descreve o Método de Newton-Raphson padrão

5 DESCRIÇÃO CORROTACIONAL

As componentes do vetor de deslocamentos naturais, $\delta \mathbf{u}_n$, responsáveis pela deformação do elemento, são obtidas excluindo-se os deslocamentos de corpo rígido, $\delta \mathbf{u}_r$, do vetor deslocamentos, $\delta \mathbf{u}$, e constam em duas rotações naturais nos nós do elemento, θ_a e θ_b , e uma deformação natural, u_b , isto é:

$$\mathbf{u}_n^T = [0 \quad 0 \quad \theta_a \quad u_b \quad 0 \quad \theta_b] \quad (18)$$

Para tal dedução, considera-se que os deslocamentos de corpo rígido ocorrem previamente aos naturais. Um esquema da configuração deformada C_2 em relação à configuração C_1 é mostrado na Fig. 12.

De forma bastante simples, pode-se determinar os de corpo rígido como:

$$\mathbf{u}_r^T = [u_a \quad v_a \quad \theta_r \quad u_a \quad v_a - \theta_r^1 L \quad \theta_r] \quad (19)$$

e, portanto, facilmente calcular $\delta \mathbf{u}_n$ através da equação

$$\delta \mathbf{u}_n = \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}_r. \quad (20)$$

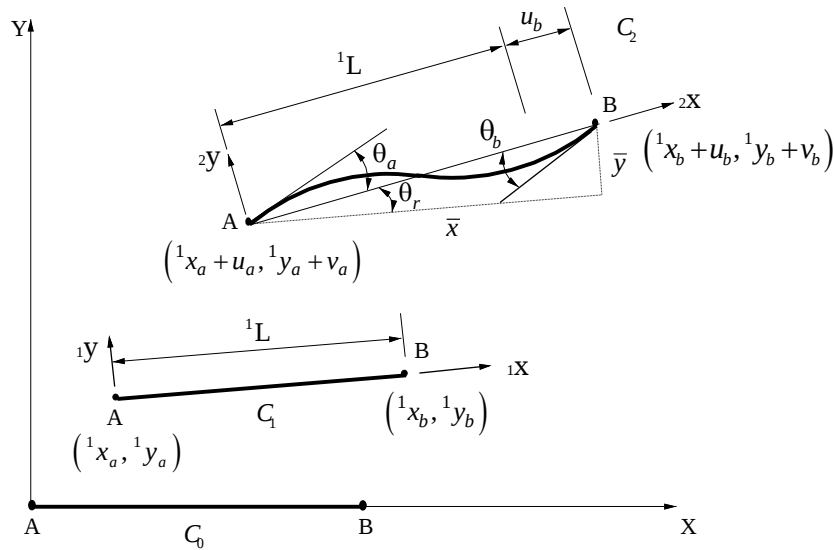


Figura 12. Deslocamentos naturais

6 EXEMPLOS

6.1 Aplicação 1

Esta aplicação preliminar foi feita para testar o processo iterativo de determinação das propriedades das seções nos estádios I e II, e determinação do diagrama momento-curvatura. Uma seção trapezoidal com um furo retangular foi proposta (Figs. 13 e 14).

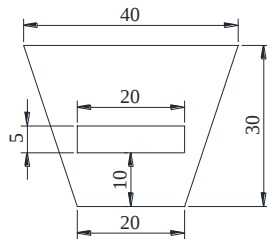


Figura 13. Seção Trapezoidal (cm)

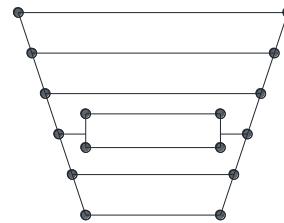


Figura 14. Seção Trapezoidal dividida em faixas

A área de aço inferior utilizada é $A_s = 3,1415 \text{ cm}^2$, a área de aço superior utilizada é $A_s = 0,393 \text{ cm}^2$, a altura útil é $d = 27,5 \text{ cm}$ e posição da armadura comprimida é $d' = 2,25 \text{ cm}$.

Os dados dos materiais encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1. Dados dos materiais (kN/cm²)

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 2920$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 19600$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,204$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,550$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50$
Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 2920$

Com os dados listado acima e a estratégia descrita no item 3 determina-se os momento e curvaturas relevantes, mostrados na Tabela 2.

Tabela 2. Momentos e curvaturas

Momento de fissuração	$M_r = 1246,004590 \text{ kN.cm}$
Curvatura de fissuração	$(1/r)_r = 0.733900\text{E-}05 \text{ cm}^{-1}$
Momento de plastificação	$M_p = 4430,321879 \text{ kN.cm}$
Curvatura de plastificação	$(1/r)_p = 0.122061\text{E-}03 \text{ cm}^{-1}$

A partir dos valores da Tabela 2 e fazendo uso das Eqs. 12 e 13 traça-se a curva momento-curvatura mostrada abaixo com $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0,5$.

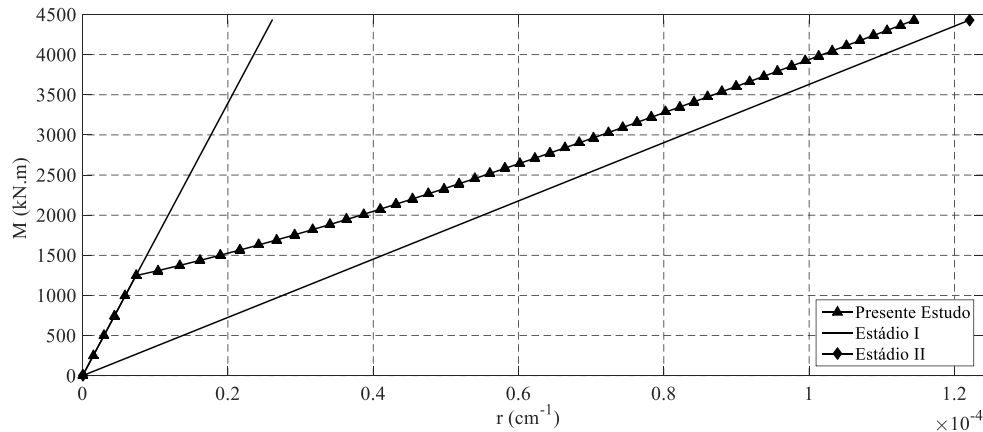


Figura 15. Diagrama Momento-Curvatura seção 4 φ 10mm.

6.2 Aplicação 2

A aplicação a seguir tem por objetivo validar o processo de degradação da rigidez implementado, foram obtidos os valores de deslocamento verticais de uma viga bi apoiada

experimentada por Álvares (1993) (Figs. 15 e 16), o resultado também foi comparado com a análise realizada por Silva (2012).

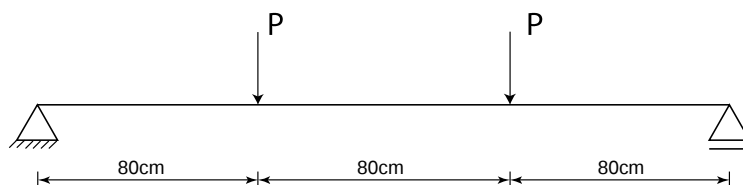


Figura 16. Viga analisada

Os dados dos materiais são fornecidos por Silva (2015) e são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3. Dados dos materiais (kN/cm²)

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 2920$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 19600$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,204$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,550$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50$

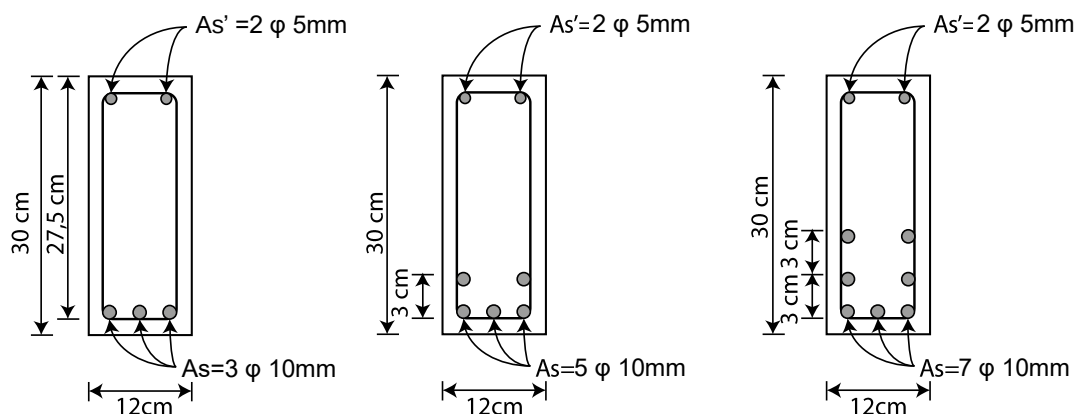


Figura 17. Armaduras das vigas analisadas

Inicialmente, traçaram-se os diagramas momento curvatura de cada viga usando as estratégias mencionadas no item 3. A seção foi discretizada em 5 faixas, e respostas com $\beta_2 = 1,0$ e $\beta_2 = 0,5$ são calculadas.

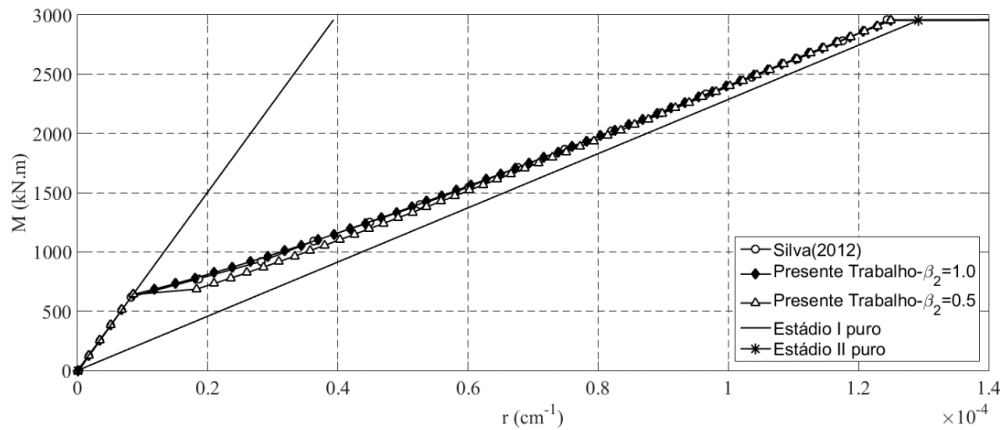


Figura 18. Diagrama Momento-Curvatura para a viga com 3 φ 10mm

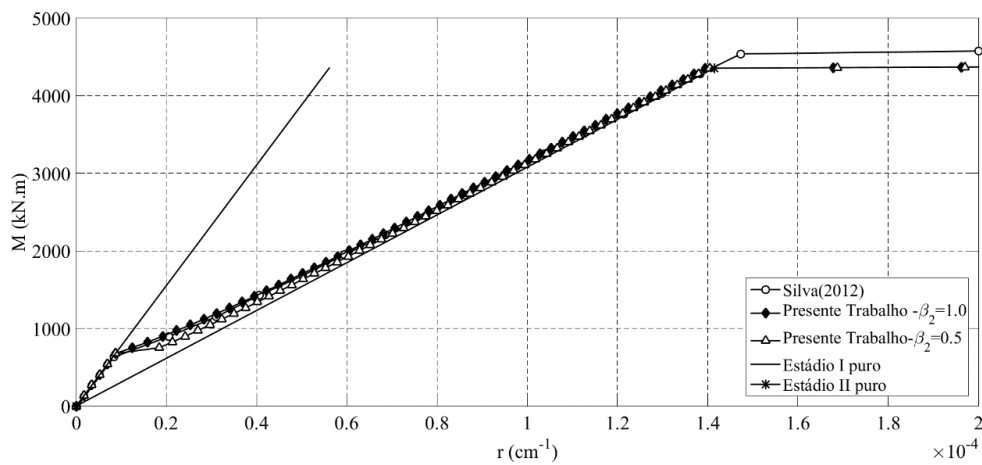


Figura 19. Diagrama Momento-Curvatura para a viga com 7 φ 10mm

Nota-se que as curvas obtidas fazendo $\beta_2 = 0,5$ têm uma descontinuidade na passagem do estágio I para o II.

Com os diagramas momento curvatura, parte-se para o processo incremental iterativo não-linear e plotam-se as soluções com $\beta_2 = 1,0$ e $\beta_2 = 0,5$ (Figs. 20, 21 e 22). O peso próprio foi considerado, em todas as análises, como uma carga uniformemente distribuída de valor $q = 0,009kN / cm$.

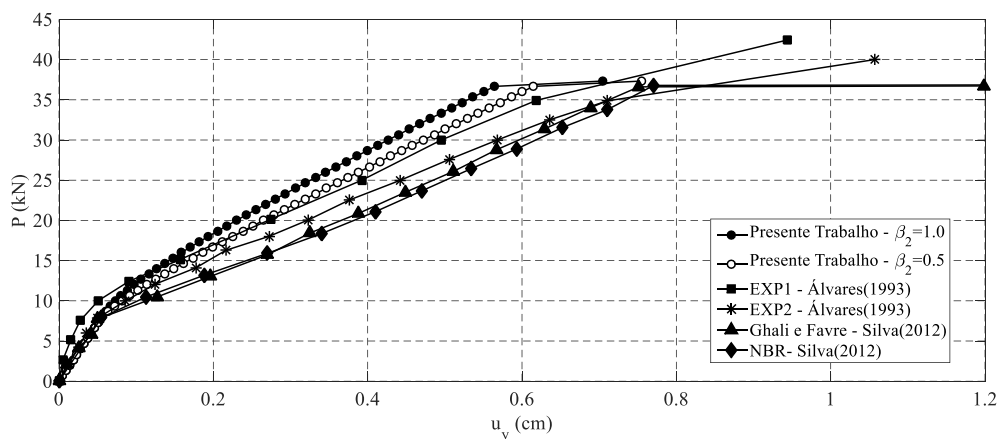


Figura 20. Deslocamento vertical para a viga com 3 ϕ 10mm.

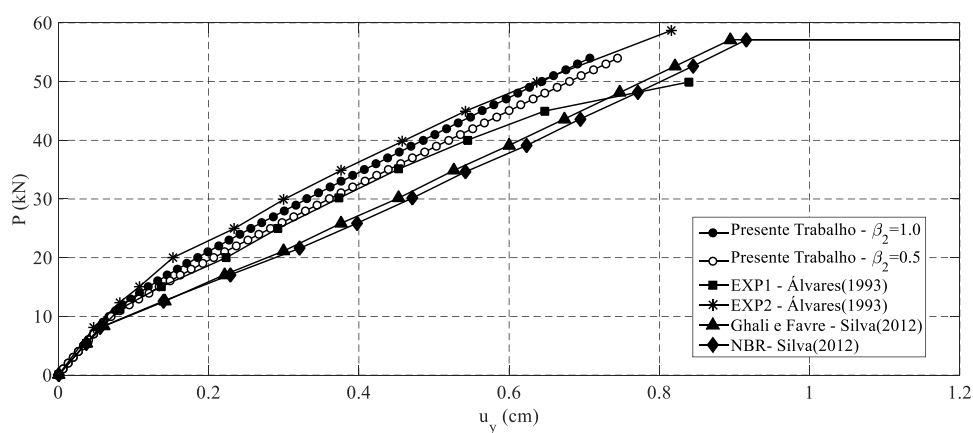


Figura 21. Deslocamento vertical para a viga com 5 ϕ 10mm

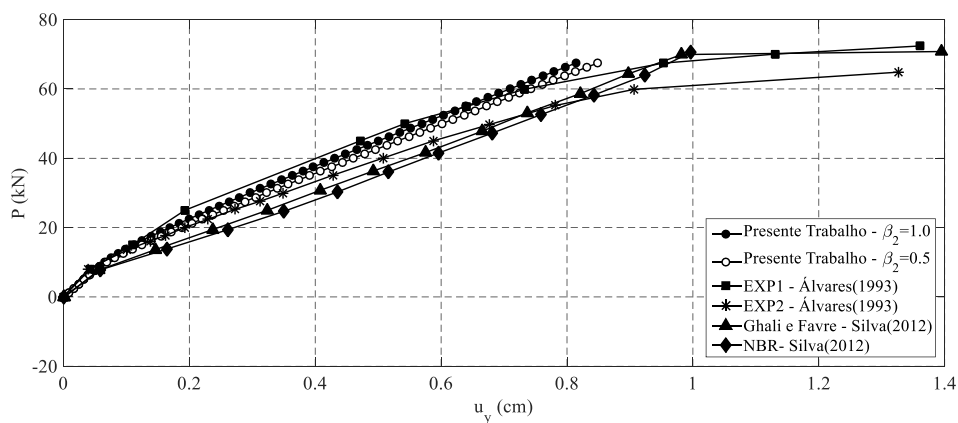


Figura 22. Deslocamento vertical para a viga com 7 ϕ 10mm

7 CONCLUSÕES

No problema 01 foi obtida a curva momento-curvatura, de uma seção trapezoidal, para demonstrar o desempenho das estratégias implementadas no que tange a simplicidade da malha

da seção transversal (de contorno) fornecida para a determinação de propriedades de interesse da seção (I.n, áreas, momentos estáticos e de inércia, etc.). Infere-se que seções quaisquer podem ser facilmente modeladas e curvas momento-curvatura facilmente construídas.

No problema 02, foi resolvida uma viga simplesmente apoiada considerando o peso próprio e duas cargas pontuais. Os resultados da análise, comparados aos experimentais de Álvares (1993), apresentam excelente concordância. Pode-se notar que a utilização de $\beta_2 = 0,5$ fornece uma resposta de melhor concordância com os valores experimentais, indicando que, na realidade do experimento, características de carga permanente são verificadas. Nota-se que em Silva (2015), um processo simplificado de cálculo de deslocamentos na viga (integrando-se duplamente a curvatura) é adotado, e respostas menos precisas são obtidas.

Por fim, ressalta-se que a estratégia neste trabalho adotada na simulação da rigidez variável de elementos estruturais com seções geométricas quaisquer (usuais ou não) combinada com o processo proposto por Ghali e Favre (1986) mostrou-se muito eficaz para consideração da não linearidade física e geométrica de estruturas em concreto armado

Presta-se os devidos agradecimentos às agências de fomento CAPES, FAPEMIG e CNPQ e também a UFOP e ao PROPEC.

8 REFERÊNCIAS

- Álvares, M. da S., 1993. *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos*. 150f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures in Eng. Analysis*. Prentice–Hall, Inc., New Jersey.
- de Araújo, F. C., Pereira, R. A. T., 2017. *Boundary-integral-based process for calculating stiffness matrices of space frame elements with axially varying cross section*. Engineering Analysis with Boundary Elements, n. 77, p.61-69.
- Ghali, A., Favre, R., 1986. *Concrete structures: stresses and deformations*. 1 ed. London. E & FN Spon, Chapman and Hall, 372 p.
- Guarda, M. C. C. da., 2005. *Cálculo de deslocamentos em pavimentos de edifícios de concreto armado*. 266f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Khuntia, M.; Ghosh, S. K., 2004. *Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach*. ACI Structural Journal. Title n. 101-S36. p. 350-363.
- Pereira, R. A. T., 2015. *Análise de estruturas reticuladas espaciais com barras de seções variáveis*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós–Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Ribeiro, I. S., 2016. *Análise não–linear geométrica de sistemas aporticados planos com elementos de rigidez variável – aplicações em estruturas de aço e de concreto armado*.

Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil,
Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Silva, A. A. E. F. da., 2015. *Contribuições Ao Estudo Da Não-Linearidade Física Em Vigas De Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado, Programa De Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal De Santa Maria.

Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.