



UM ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NUMA PLACA DE CONCRETO COM UMA GERAÇÃO DE CALOR CONSTANTE NO DOMÍNIO

Gabriel Andrade Lanzaro

gabriellanzaro@gmail.com

Eliane de Fátima Rodrigues Martins

matelianemartins@gmail.com

Universidade de Brasília, UEG e UniEVANGÉLICA - Anápolis-GO

Lineu José Pedroso

lineu@unb.br

Universidade de Brasília

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE). Campus Universitário Darcy Ribeiro. CEP: 70910-900. Brasília -DF.

Resumo. Em função do grande volume de concreto que constitui grandes estruturas da engenharia, como barragens e eclusas, elas são passíveis de sofrerem efeitos térmicos ocasionados pela geração de calor oriunda das reações de hidratação do cimento. O gradiente térmico entre o interior e o exterior do domínio maciço da estrutura provoca tensões térmicas susceptíveis a introduzirem fissuras e danos na estrutura. Assim, torna-se necessária a determinação preliminar do gradiente térmico que afeta estas estruturas. Como o fenômeno térmico é regido pela equação completa do calor, faz-se necessário resolvê-la em etapas sucessivas e progressivas e, em consequência, este trabalho, como uma etapa inicial de tratamento da questão, aborda uma placa retangular de concreto, representativa de uma faixa bidimensional de um bloco maciço 3D, submetido a diferentes condições de temperatura no contorno, com uma geração interna constante de calor no domínio interior da estrutura. O domínio do problema é discretizado por uma malha retangular regular e a equação do calor, solucionada pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) através de rotinas computacionais, sendo os resultados obtidos comparados com soluções analíticas retiradas da literatura.

Keywords: Equação do Calor, Efeitos Térmicos, Diferenças Finitas, Geração de Calor, Hidratação do Cimento.

1 INTRODUÇÃO

Alguns problemas requerem a habilidade do estudioso em escolher artifícios para determinar uma solução aceitável aos parâmetros reais que os descrevam. Em face dessa necessidade, pesquisadores têm dedicado esforços para desenvolver e implementar métodos numéricos que venham ao encontro de soluções satisfatórias, que sejam embasadas em conceitos matemáticos sólidos e que os erros possam ser minorados.

Nesse contexto, destacam-se as pesquisas dos efeitos térmicos em estruturas de concreto por meio da equação de calor, como os trabalhos de Coelho (2013), Vasconcelos & Pedroso (2014), Pedroso (2011) e Martins & Pedroso (2016) do Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura da UnB (GDPE).

O estudo do fluxo de calor através de modelos numéricos é um procedimento eficiente devido às vantagens que estes modelos possuem em relação aos métodos experimentais. Cabe citar o Método das Diferenças Finitas (MDF), uma ferramenta capaz de transformar um problema de equações diferenciais em um problema algébrico, substituindo as derivadas por uma aproximação de quociente de diferenças adequada. Este quociente e os parâmetros podem ser escolhidos de forma a manter uma determinada ordem do erro de truncamento.

Assim, o objetivo desse trabalho é apresentar um estudo de caso sobre a determinação da distribuição de temperatura em uma placa de concreto. Serão apresentadas a solução analítica da equação de calor em regime permanente sem geração de calor (Equação de Laplace) e com geração de calor constante (Equação de Poisson), além da solução numérica através do MDF com auxílio do *software* MATLAB.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A equação geral que rege a condução de calor em um corpo sólido ortotrópico pode ser dada pela expressão Eq. (1):

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Onde: T = temperatura ($^{\circ}\text{C}$); k = condutividade térmica ($\text{W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}$); c = calor específico ($\text{J/g} \cdot ^{\circ}\text{C}$); ρ = massa específica (Kg/m^3); $\dot{q}$ = geração de calor interno (W/m^3).

Serão utilizados os estudos elaborados por Coelho & Pedroso (2011) sobre o MDF e a Eq. (1) será reescrita com base nos conceitos pertinentes ao MDF. Dessa forma, esse trabalho apresentará, sobretudo, as soluções analítica e numérica de variações da (Eq.1).

Se o corpo está em estado estacionário e sem geração de calor, ou seja, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ e $\dot{q} = 0$, tal equação é denominada Equação de Laplace.

E caso o corpo esteja em estado estacionário e com geração de calor, ou seja, tendo somente $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, a referida equação é denominada de equação de Poisson, sendo $\dot{q}$ é uma constante.

Na discretização elaborada considerou-se uma placa retangular no plano cartesiano e coberta por uma malha com pontos nodais espaçados $\Delta x = l$ e $\Delta y = h$, ocorrendo fluxo de calor nas direções x e y , conforme ilustrado na Fig. (1).

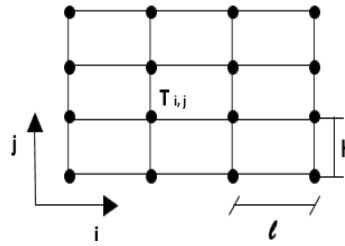


Figura 1. Diagrama de solução do método das diferenças finitas

A Tabela 1 exibe parte de um resumo disponibilizado em Coelho (2013), que se trata da solução analítica para as equações de Laplace e Poisson 2D numa placa retangular, em que podem ser prescritas as condições de contorno de temperatura em cada um dos lados.

Tabela 1. Soluções Analíticas da Equação de Laplace e Poisson 2D

Equação Diferencial	Condições de Contorno	Solução Analítica
$\nabla T^2 = 0$	$T(x, H) = f(x)$ $T(L, y) = 0$	$T(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sinh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{L}\right) \right]$ $A_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{\sinh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot H}{L}\right)} \cdot \int_0^L [f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)] dx$
$\nabla T^2 + \frac{\dot{q}}{k}$	$T(x, 0) = 0$ $T(0, y) = 0$	$T(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[B_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sinh(\phi \cdot y) \right]$ $B_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{\sinh(\phi \cdot H)} \cdot \int_0^L [f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)] dx, \text{ em que } \phi^2 = \frac{\dot{q}}{k} + \lambda^2$

3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (MDF) PARA SOLUÇÃO

O MDF é um artifício capaz de transformar um problema de equações diferenciais em um problema algébrico, substituindo as derivadas na equação por uma aproximação de quociente de diferenças adequada. Cabe ressaltar que é permitido que o quociente e os parâmetros sejam escolhidos para manter uma determinada ordem do erro de truncamento.

Mostra-se, na Tabela 2, as expressões de substituição das derivadas de primeira e segunda ordens de uma função $T = T(x, y, z)$, com o MDF, e de acordo com Szilard (1974) e Pedroso (2011).

Tabela 2. Expressões das Derivadas de 1ª e 2ª Ordens com o MDF (Szilard, 1974)

Eixo	Derivada – 1ª ordem	Derivada – 1ª ordem
X	$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j,l} - 2 \cdot T_{i,j,l} + T_{i-1,j,l}}{(\Delta x)^2}$
Y	$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1,l} - 2 \cdot T_{i,j,l} + T_{i,j-1,l}}{(\Delta y)^2}$

Com as derivadas parciais reescritas com o MDF de acordo com a Tabela 2 e, para simplificar a notação, as equações de Laplace e Poisson são apresentadas respectivamente pelas Eq. (2) e Eq. (3) a seguir, de uma placa retangular no plano cartesiano e coberta por uma malha com pontos nodais espaçados Δx e Δy , ocorrendo fluxo de calor em ambas as direções:

$$2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 + 1 \right) T_{i,j} - (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) - \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) = 0 \quad (2)$$

$$2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 + 1 \right) T_{i,j} - (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) - \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O caso proposto consiste em determinar a distribuição interna da temperatura em uma placa quadrada de dimensões ($a \times a$) em função do tempo e da posição, submetida à condição inicial $T(x, a) = 100^\circ\text{C}$, e condições de contorno: $T(a, y) = 0, T(x, 0) = 0, T(0, y) = 0$, no estado estacionário com e sem geração interna de calor para uma função constante. Considera-se ainda que o material da placa possui condutividade térmica igual a $1,79 \text{ (w/m}^\circ\text{C)}$, além de um valor de $\dot{q} = 200 \text{ W/m}^3$ para a geração interna do calor.

Com o auxílio de rotinas computacionais com o *software* MATLAB, obtém-se as superfícies exibidas na Fig. 2 para o problema com a equação de Laplace. O dado analítico foi determinado com as condições aplicadas às equações da Tabela 1, considerando-se a série com dez termos. O MDF, por sua vez, foi aplicado com as Eq. (4) e Eq. (5) a seguir, sobre uma malha com 210 pontos em cada borda da placa. Constata-se que o valor da diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica no centro da placa é da ordem de 0,13%.

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad (4)$$

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} + \frac{\dot{q} \cdot L^2}{4k} \quad (5)$$

As superfícies são bem semelhantes, evidenciando que o MDF fornece uma boa aproximação na determinação da distribuição de temperatura na referida placa, enquanto que a solução analítica, mesmo com uma série de poucos termos, também reproduz de forma satisfatória o resultado esperado.

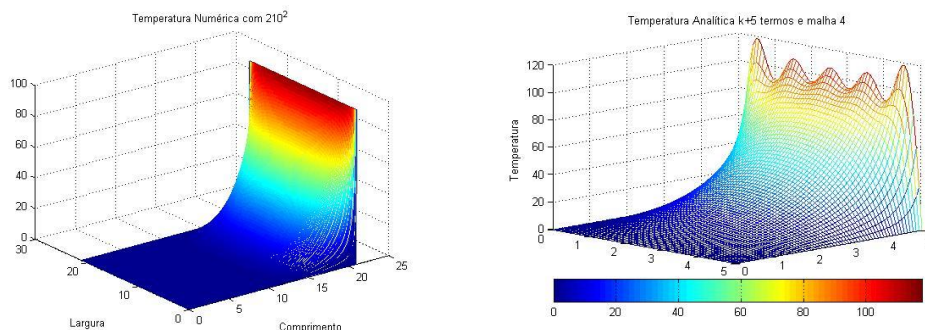


Figura 2. Distribuição do fluxo de calor numa placa em função da posição

Situação semelhante é observada para o problema com a equação de Poisson quando a geração interna de calor é uma constante. A seguir, mostra-se, na Fig. 3, a comparação visual dos valores da distribuição de temperatura entre a solução analítica (Tabela 1) e a solução numérica (Eq. 3), considerando-se que a geração interna de calor é de 200 W/m^3 . Nota-se que, ao passo que se retira a geração de calor constante, os gráficos abaixo se tornam semelhantes. Há coerência entre os resultados numéricos e analíticos.

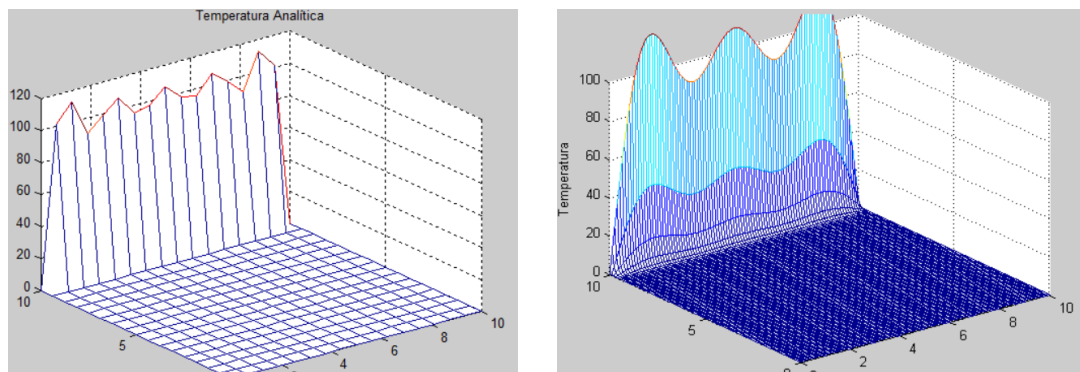


Figura 3. Comparação entre resultado analítico e numérico para a variação de temperatura em função da posição

5 CONCLUSÃO

A partir da análise dos resultados, é possível constatar que a difusão de calor em placas pode ser satisfatoriamente modelada e prevista através do Método das Diferenças Finitas, pois os resultados foram precisos quando comparados aos analíticos. Assim, este método, para as geometrias simples testadas, apresenta-se como uma excelente alternativa para a solução de problemas relacionados à natureza térmica em estruturas de concreto massa na engenharia.

REFERÊNCIAS

- Coelho, N. A.; Pedroso, L. J., 2013. *Relatórios Técnicos de Pesquisa - RTP - NAC1 - 2013*. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Const. Civil – PECC-GDFE, UnB, Brasil
- Martins, E. de F. R.; Pedroso, L. J., 2016. *Relatórios Técnicos de Pesquisa - RTP - EFRM – 06 – 05/2016*. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Const. Civil – PECC-GDFE, UnB, Brasil
- Pedroso, L. J.; 2011. *Uma Introdução ao Método das Diferenças Finitas Centrais*. In: Apostilha Didática. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC - GDFE, Universidade de Brasília, Brasil.
- Szilard, R.; 1974. *Theory and Analysis of Plates Classical And Numerical Methods*. Prentice - Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Vasconcelos, M. A., Pedroso, L. J.; 2014. *Aplicação do Método das Diferenças Finitas a Problemas Envolvendo Barragem-Reservatório*. 20º Congresso de Iniciação Científica da UnB.