



CÓDIGO MEF PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE 2D COM REFINAMENTO H-ADAPTATIVO

Costa, Esaú Queiroz Melo da

Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira

esauqmc@hotmail.com

paulo.vribeiro@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Centro de Tecnologia e Geociências

Departamento de Engenharia Civil

Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n, 50740-530, Pernambuco, Recife, Brasil

Abstract. *O presente trabalho aborda a análise de problemas de elasticidade 2D pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) com refinamento h-adaptativo utilizando o elemento triangular linear CST (Constant Strain Triangle). Busca-se demonstrar a vantagem e eficiência dessa estratégia frente ao simples refinamento uniforme da malha através de uma abordagem simples e acessível a comunidade acadêmica (inclusive a nível de graduação). Para tanto, um código em linguagem MATLAB foi desenvolvido para divisão progressiva da malha de partida originada no programa GiD. Regiões de refinamento são escolhidas com o estimador de erro a posteriori baseado na Média Nodal Simples (MNS) e, ao final, toda a malha é submetida a uma suavização laplaciana. A validação e eficiência do método é determinada pela comparação com resultados numéricos de referência, os quais se mostraram bastante coerentes e satisfatórios, confirmando então a utilidade da metodologia adotada. Para demonstração da estratégia supracitada, são analisados neste trabalho alguns casos de interesse prático, sendo eles a chapa com furo e estrutura em L.*

Keywords: *Método dos Elementos Finitos, Refinamento h-adaptativo, Elasticidade 2D, Estimador de erro a posteriori, Método da Média Nodal Simples.*

1 INTRODUÇÃO

A busca por solução de problemas complexos de engenharia, tem se tornado cada vez mais frequente. Nesse aspecto podemos destacar o Método dos Elementos Finitos (MEF) como sendo um método numérico consagrado e versátil da atualidade (KWON & BANG, 1997). Por se tratar de um método aproximado, uma preocupação existente reside na obtenção de resultados com precisão e baixo custo computacional. Para tanto, faz-se necessário o refinamento da malha, o que gera um aumento no número de elementos e de cálculos a serem realizados, e consequente aumento no custo computacional da análise numérica. Dessa forma, uma otimização do processo consiste em aumentar o número de elementos do domínio de modo inteligente, em regiões mais sensíveis, de forma a garantir um equilíbrio entre custo computacional e soluções com precisão desejada por meio de estimadores de erro que guiam o refinamento para regiões de interesse do modelo discreto (ZIENKIEWICZ, 2000).

Programas comerciais já solucionam o problema de malhas adaptativas com estimadores de erros sofisticados e geradores de malhas integrados, porém o presente trabalho possui por objetivo o desenvolvimento de um código MEF de baixa complexidade para a solução de problemas de elasticidade 2D com refinamento h-adaptativo. Os procedimentos, que adotam elementos lineares, médias nodais simples e triangularização Delaunay, são acessíveis a alunos de graduação com conhecimentos básicos do MEF e permitem a solução de problemas clássicos de elasticidade. Exemplos de aplicação deste código além dos já ilustrados neste artigo podem ser encontrados no endereço fornecido na seção Conclusão.

2 ELASTICIDADE 2D

Segundo Logan (2007), consideremos inicialmente um elemento plano em equilíbrio sujeito a tensões normais σ_x e σ_y , tensões cisalhantes τ_{xy} e forças de corpo X_b e Y_b (unidades de força por unidade de volume), como mostra a Fig. 1. As tensões são consideradas constantes atuando na espessura de cada face, porém variam de uma face para a face oposta, assumindo-se espessura unitária do elemento. Somando as forças na direção x e simplificando obteremos a Eq. (1), e similarmente podemos obter a Eq. (2) para direção y. Já a terceira equação do equilíbrio (Eq. (3)) pode ser satisfeita tomando momentos em relação ao ponto C da Fig. 1:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X_b = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y_b = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3)$$

Ainda analisando a Fig. 1 podemos determinar a deformação em x (ϵ_x) pela aplicação da Lei de Hooke à tensão em x somada com o efeito de Poisson dado pela tensão em y, e de maneira semelhante podemos obter a deformação em y (ϵ_y). Já a deformação cisalhante (τ_{xy}) pode ser dado pela Lei de Hooke adaptada a este caso utilizando o módulo de elasticidade transversal. Utilizando-se da notação matricial obtemos então as relações tensão-deformação de um material isotrópico, elástico e linear, que são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

O termo que multiplica a matriz de deformações é conhecido como *matriz constitutiva do material* ($[D]$), que foi particularizada para o estado plano de tensões.

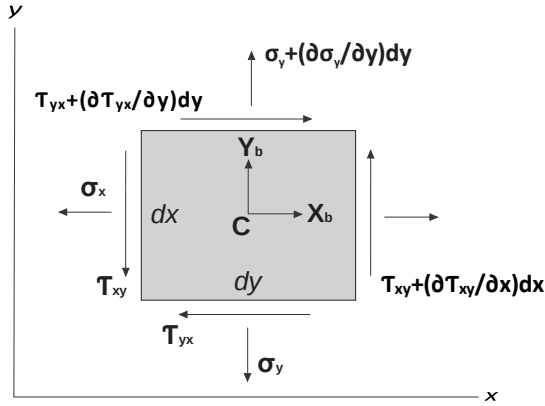


Figura 1: Equações de equilíbrio e compatibilidade. Logan (2007).

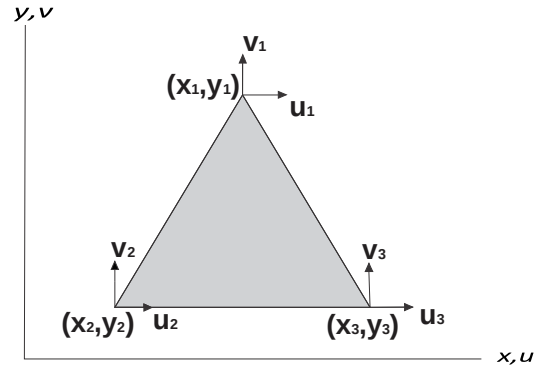


Figura 2: Elemento CST. Cook (1995).

3 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO CST

Segundo Cook (1995), podemos observar a derivação de uma expressão para energia de deformação por unidade de volume de um material linear (U_0) em diversas bibliografias a respeito de mecânica dos materiais, expressão essa dada por:

$$U_0 = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [D] [\varepsilon] \quad (5)$$

Onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material elástico linear adotado e as deformações $[\varepsilon]$ podem ser expressas em função dos deslocamentos pela relação a seguir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ou $[\varepsilon] = [B][d]$ (6)

Onde x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 são as coordenadas dos nós do elemento triangular indicado na Fig. 2. Integrando ao longo do volume de um elemento a Eq. (5) e substituindo a Eq. (6) na Eq. (5):

$$U = \frac{1}{2} d^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) [d] \quad (7)$$

Da expressão da Eq. (7) podemos identificar a matriz de rigidez como:

$$k = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (8)$$

Particularizando a Eq. (8) para o elemento CST, temos que as matrizes $[B]$ e $[D]$ dependem apenas das coordenadas nodais e das propriedades do material, logo podem sair do integrando, e além disso temos que $dV = t dA$, onde t é a espessura constante do elemento, considerada nesse trabalho como unitária, e A é a área do elemento triangular. Dessa forma, a Eq. (8) pode ser simplificada para a forma abaixo:

$$k = [B]^T [D] [B] t A \quad (9)$$

4 REFINAMENTO ADAPTATIVO

Os resultados de uma análise em Elementos Finitos devem convergir para a solução exata uma vez que a malha é repetidamente refinada (COOK, 1995). No entanto, uma forma mais eficiente consiste no uso do refinamento adaptativo, no qual o analista tem por objetivo refinar a malha para obter a precisão necessária usando apenas a quantidade de graus de liberdade necessários. O objetivo final do método é obter igual distribuição de um indicador de erro em todos os elementos (LOGAN, 2007). O tipo de refinamento adotado na proposta atual é o h-adaptativo, que consiste no incremento progressivo do número de elementos de regiões mais sensíveis, preservando a ordem das funções de interpolação. Para identificação das regiões onde se faz necessário o refinamento utilizaremos um estimador de erro *a posteriori*, que se baseia na própria solução numérica para geração de uma melhor estimativa dos campos de deslocamentos, tensões ou deformações, os quais são conhecidos na literatura como valores recuperados e são utilizados para guiar o processo adaptativo.

O erro será medido através da norma de energia, o qual se fundamenta na diferença entre o valor de tensão calculado pelo MEF ($\hat{\sigma}$) e o valor exato obtido analiticamente. Uma vez que não possuímos os valores exatos, podemos, no entanto, obter os valores melhorados (ou suavizados) de tensões (σ^*), os quais tem uma convergência muito superior ao calculado na solução por elementos finitos. A partir de então podemos obter o estimador de erro em norma de energia por:

$$\|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

A qualidade de um estimador de erro é então medida pelo índice de efetividade, dado por:

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \quad (11)$$

Onde $\|\bar{e}\|$ é a norma de energia do domínio e $\|e\|$ é o erro exato do domínio. Porém, para situações onde não se conhece a solução exata pode-se substituir pelo obtido com uma malha bem refinada, e é dessa forma que abordaremos no presente trabalho (SILVA, 2014). Um bom estimador de erro deve ter seu índice de efetividade tendendo a um à medida que a malha é refinada (ZIENKIEWICZ, 2000).

Para descrever o comportamento dos problemas os quais analisaremos, definimos o erro relativo percentual da norma de energia como:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} * 100\% \quad (12)$$

Onde $\|u\|$ representa uma medida da energia total acumulada no domínio sendo calculada por:

$$\|u\| = \left[\int_{\Omega} [\varepsilon]^T [D] [\varepsilon] d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

4.1 Método da Média Nodal Simples

O método consiste inicialmente da obtenção do gradiente da solução, digamos tensões, através do cálculo da média das tensões que chegam em cada nó. Em um nó compartilhado por Nel elementos existem, em geral, Nel diferentes valores de tensões, sendo a média nodal dada por:

$$\sigma_m = \frac{1}{Nel} \sum_{j=1}^{Nel} (\sigma_i)_j \quad (14)$$

Onde $(\sigma_i)_j$ é o vetor de tensões obtido via MEF para o i -ésimo nó do j -ésimo elemento.

Um campo suavizado pode ser construído a partir da média nodal das tensões dos nós utilizando as funções de forma $[N]$. Sendo assim, o campo de tensões suavizadas num elemento pode ser dado por:

$$\sigma^* = [N] \sigma_m \quad (15)$$

Onde σ^* é o vetor de tensões suavizadas do elemento e σ_m é o vetor nodal das tensões recuperadas obtida através da Eq. (14) para o elemento em análise. Aplicando então o conceito de norma de energia a nível do elemento é possível computar o erro neste elemento (COOK, 2002).

No entanto, para este trabalho, assumimos o campo de tensões suavizada num elemento como sendo a média dos valores das tensões recuperadas nos nós, ou seja:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_m}{3} \quad (16)$$

Essa estratégia foi adotada para fins de simplificação do método sem implicar na perda de eficiência do mesmo, já que o elemento é linear.

4.2 Critério de refinamento do processo adaptativo.

O critério estabelecido para o refinamento a nível global é a busca por uma malha em que o erro relativo percentual em norma de energia esteja abaixo de um limite especificado $\bar{\eta}$, expresso da seguinte maneira:

$$\eta \leq \bar{\eta} \quad (17)$$

Para se atingir uma malha otimizada, no entanto, é necessário que o erro em norma de energia esteja distribuído igualmente por todos os elementos, o que é chamado de equidistribuição do erro. A partir desse conceito é possível podermos estabelecer que o erro máximo admissível num elemento qualquer k deve ser:

$$\|e\|_k < \bar{\eta} \left(\frac{\|\hat{u}\|^2 + \|e\|^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \bar{e}_m \quad (18)$$

Onde $\|e\|_k$ é o erro para um elemento k calculado pelo estimador de erro, $\bar{e}_m$ é o erro máximo admissível para um elemento qualquer k , $\|\hat{u}\|$ é a energia aproximada do domínio calculado pela Eq. (13) utilizando o estimador de erro, $\|e\|$ pode ser considerado o erro em norma de energia calculado no domínio também pelo estimador de erro da Eq. (16) e n é o número de elementos. Sendo assim, os elementos no qual a condição estabelecida pela Eq. (18) não é atendida devem então ser refinados (ZIENKIEWICZ, 2000).

5 PROCEDIMENTO E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Foi desenvolvido um código em MATLAB para análise de problemas de elasticidade 2D usando o Método dos Elementos Finitos com o elemento CST (*Constant Strain Triangle*). O tipo de elemento adotado se deu em razão da simplicidade de cálculo do mesmo, além da facilidade em se gerar novas triangularizações uma vez que possui nós apenas nos vértices e permite o refinamento por meio de rotinas Delaunay nativas do MATLAB. A malha inicial para análise será obtida através do gerador de malha GiD, no qual, após a geração da malha, exporta-se um arquivo texto com o vetor de coordenadas de todos os nós da malha e as conectividades, ou seja, quais nós compõem cada elemento triangular. Juntamente com esses vetores, será requerido do usuário ou analista que se entre com dados relativos a forças aplicadas e condições de apoio. As forças são todas descritas como uniformemente distribuídas, seja ao longo da estrutura (maneira convencional), ou transversalmente no lugar de uma força concentrada, para evitar a formação de singularidades e tensões infinitas próximas a essas forças. Os apoios podem ser de primeiro gênero, segundo gênero ou engaste. Por último são pedidas as características do material, sendo eles o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

Após a inserção dos dados iniciais sucede-se o processo de análise pelo Método dos Elementos Finitos seguido do refinamento h-adaptativo da malha inicial. O campo de tensões é determinado pelo Método das Médias Nodais Simples (Eq. (16)), e de posse desses resultados calcula-se o erro em norma de energia de cada elemento de acordo com a Eq. (10). A cada iteração a decisão quanto a refinar ou não determinado elemento surge com o erro da norma de energia elementar máximo admissível, calculado para cada elemento segundo um critério de equidistribuição de erro segundo a Eq. (18), no qual um elemento ao ter seu erro em norma de energia acima do admissível é selecionado para o refinamento. O processo de refinamento adotado é conhecido por “Red-Green” (BANK & SHERMAN, 1981) (Fig. 3): ao ser selecionado para o refinamento, um elemento recebe um novo nó no ponto médio de cada aresta; seus elementos vizinhos passam a ter um *hanging node* em uma de suas arestas; caso esse elemento receba um novo *hanging node* de um outro elemento vizinho e passe a ter dois *hanging nodes* sem que seja selecionado para refinamento pelo critério do erro em norma de energia, ele passa a ser selecionado para refinamento por conta dos dois *hanging nodes* que possui, e a partir da criação de todos os novos nós a nova malha refinada é gerada pelo

processo de triangularização Delaunay do próprio MATLAB, ou seja, não é feito uso de nenhum gerador de malha externo ao próprio código aqui desenvolvido. Uma vez gerada a nova malha, ela passa por um processo de suavização laplaciana, um procedimento simples de movimentação dos nós a fim de que eles se localizem no centroide dos demais nós aos quais está ligado e garanta assim uma melhor qualidade da malha, evitando distorções na forma dos elementos, o que geraria erros maiores.

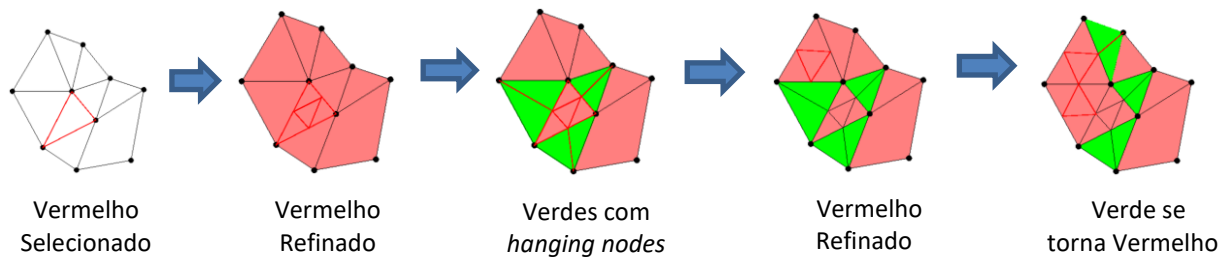


Figura 3: Refinamento “Red-Green”.

O processo de refinamento é interrompido quando se atinge um valor abaixo do estabelecido em erro relativo percentual da norma de energia máximo admissível para o domínio (Eq. (17)), no qual o erro da norma de energia é dado pela soma da contribuição do erro de todos os elementos, e posteriormente é utilizada a expressão da Eq. (12) para cálculo do erro relativo percentual em norma de energia do domínio, onde $\|u\|$ foi calculado de acordo com a Eq. (13) aproximado pelos valores de deformação calculados pelo modelo discreto. O erro relativo percentual em norma de energia máximo admissível deve ser determinado e ajustado pelo usuário ou analista de acordo com suas necessidades de precisão dos resultados a serem obtidos. Os erros em norma de energia de cada elemento são somados para obter-se um erro global do domínio a cada iteração.

Por fim é realizado o pós-processamento com a plotagem da malha final e das curvas de isovalores de tensões, deformações ou deslocamentos de acordo com a necessidade do usuário ou analista.

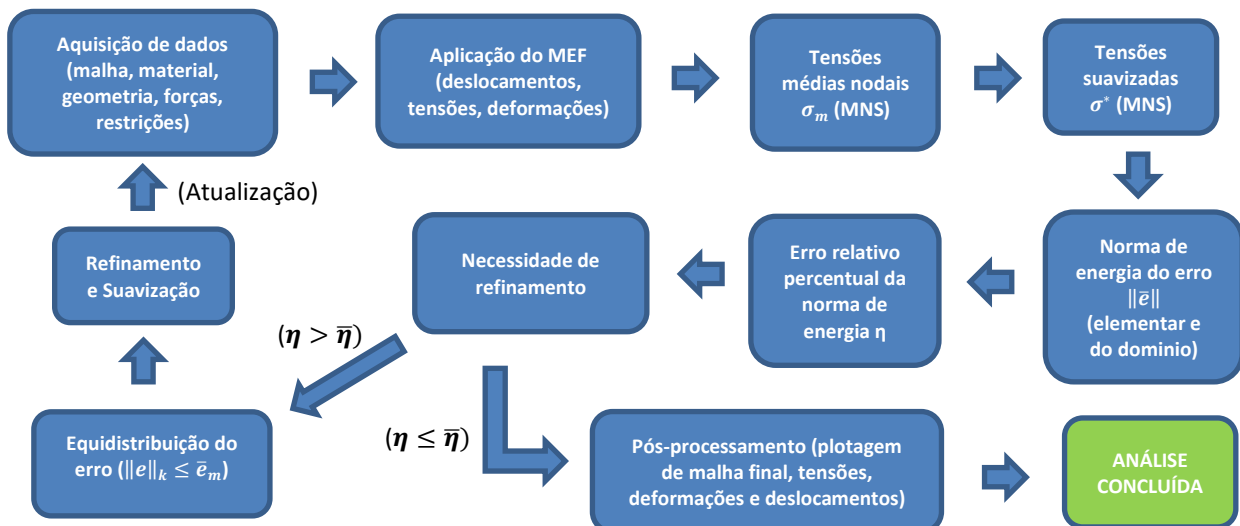


Figura 4: Estrutura do código.

Um código auxiliar para refinamento uniforme da malha foi desenvolvido paralelamente como ferramenta de verificação e validação dos resultados obtidos com o refinamento h-adaptativo. Nesse código, a cada iteração, o erro dos elementos também é medido em norma de energia e são somados para obter-se o erro global do domínio e é também computado o erro relativo percentual em energia do domínio de acordo com as mesmas equações usadas no refinamento adaptativo, interrompendo o processo de refinamento quando esse erro fica abaixo de um máximo admissível estabelecido pelo usuário. Posteriormente é realizada uma comparação dos erros relativos percentuais em energia do domínio das malhas refinadas globalmente e adaptativamente para a avaliação da eficiência do método. A estrutura do código adaptativo é ilustrada no fluxograma da Fig. 4.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção analisaremos dois casos de interesse prático para exemplificação do funcionamento do código desenvolvido. Para ambos os casos utilizaremos como material o aço com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson de 0,3. As malhas iniciais dos problemas gerados com o GiD são mostradas na Fig. 5.

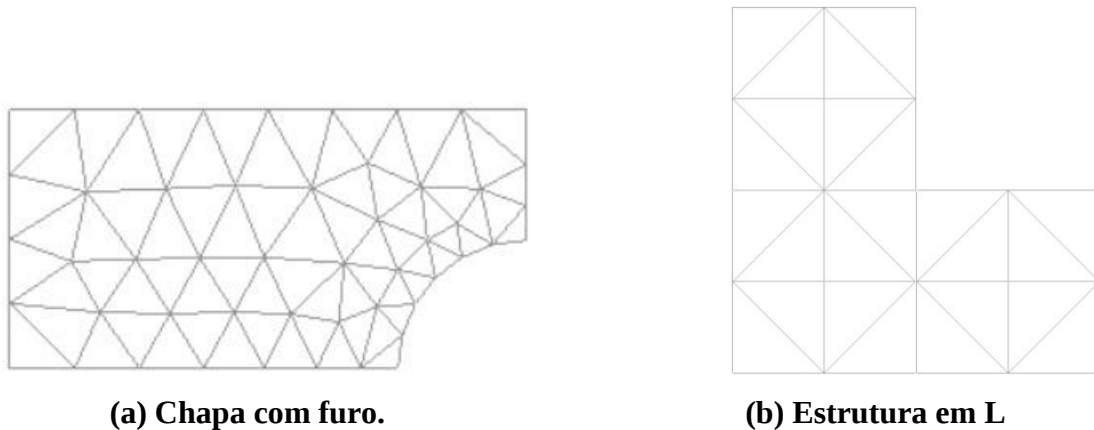


Figura 5: Malhas iniciais geradas com o GiD.

6.1 Problema 1: Chapa com furo

O primeiro caso a analisarmos consiste numa chapa com furo circular. Para redução de esforços computacionais, nos utilizamos da simetria do problema e analisamos um quarto da placa com um quarto de círculo de furo, que possui 4m de comprimento, 2m de altura e um quarto de círculo de 1m de raio como furo. A força foi aplicada de maneira uniformemente distribuída na face lateral esquerda com um valor de 1kN/m na forma de tração da chapa. Os apoios para garantirem a simetria do problema foram de primeiro gênero aplicados tanto na face inferior da chapa, restringindo o movimento em y, quanto na face direita, restringindo o movimento em x. A malha inicial do problema está apresentada na Fig. 5a e na Fig. 6 está apresentado a evolução das malhas. O refinamento foi realizado tomando como critério de parada o erro relativo percentual em energia máximo de 4% ($\bar{\eta}=4\%$).

Para melhor análise dos resultados são mostrados na Fig. 7a um gráfico com o erro em norma de energia versus o número de elementos para os casos adaptativo e uniforme, mostrando que no caso adaptativo esses erros são menores para um mesmo número de

elementos e, equivalentemente, para se atingir um mesmo valor de erro é necessário menos elementos no refinamento adaptativo, comprovando assim a sua eficiência. Na Fig. 7b é feito um comparativo entre os valores de tensões Von Mises para os dois casos para uma seção ao longo do eixo x tomada na altura de 1m no eixo y (como indicado na Fig. 8b), mostrando a grande semelhança entre os resultados obtidos, validando assim a nossa análise. O índice de efetividade obtido para este caso foi de 1,25. Na Fig. 8a apresentamos a malha final gerada pelo código através do refinamento adaptativo proposto e na Fig. 8b mostramos a distribuição de tensões Von Mises.

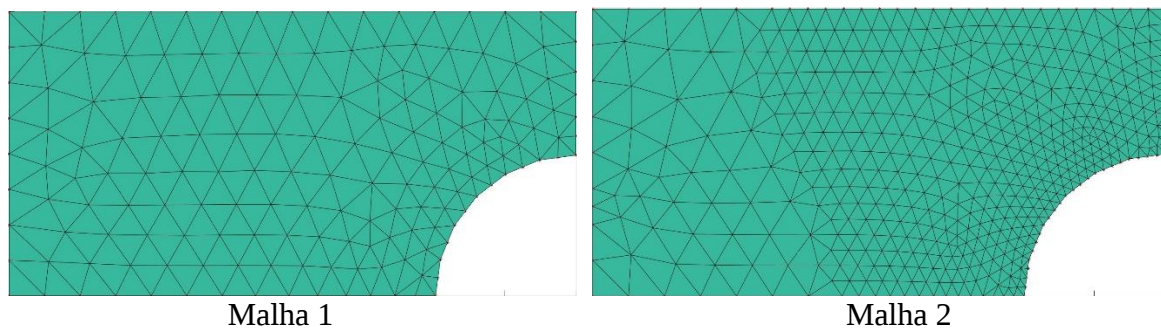


Figura 6: Evolução das malhas.

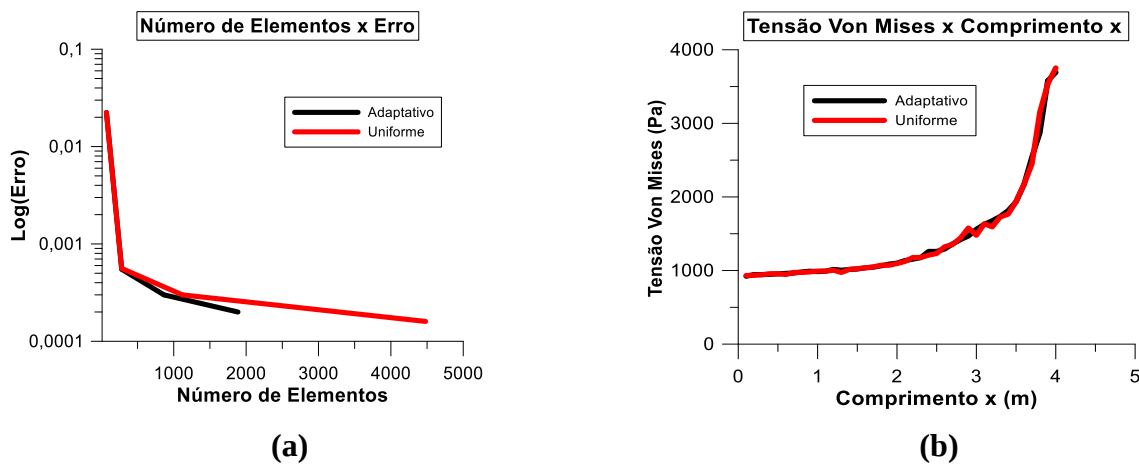


Figura 7: a) Número de elementos x Erro; b) Tensão Von Mises x Comprimento x.

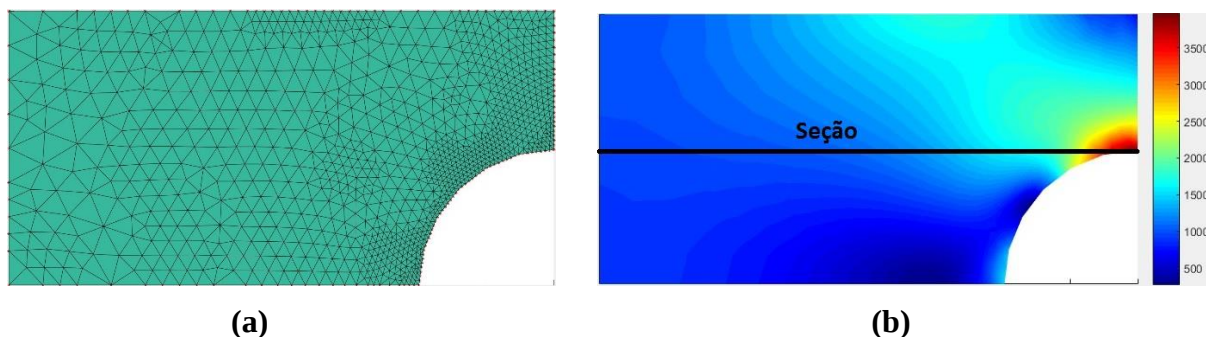


Figura 8: a) Malha Final; b) Distribuição de Tensões Von Mises.

6.2 Problema 2: Estrutura em L

Seguindo o mesmo procedimento de análise utilizado para o caso anterior, analisamos uma estrutura em L, possuindo 4m de altura e 4m de comprimento, com a espessura do L sendo de 2m. Na face esquerda há uma força distribuída de 1kN/m aplicada para a direita. Na face direita há apoios de primeiro gênero em toda a face com restrição de movimento em x e na face superior também há apoios de primeiro gênero em toda a face, porém com restrição de movimento em y. A malha inicial do problema está mostrada na Fig. 5b e na Fig. 9 está apresentada a evolução das malhas. O refinamento foi realizado tomando como critério de parada o erro relativo percentual em energia máximo de 9% ($\bar{\eta}=9\%$).

Na Fig. 10a traçamos o gráfico do erro em norma de energia versus o número de elementos, mostrando semelhantemente ao caso anterior a vantagem do refinamento adaptativo, e na Fig. 10b apresentamos o comparativo entre tensões Von Mises numa seção ao longo do eixo y tomada na posição x de 1,5m da esquerda para direita para os casos adaptativo e uniforme (como indicado na Fig. 11b), mostrando a grande semelhança entre os resultados obtidos e a validade da análise. O índice de efetividade obtido para este caso foi de 1,11.

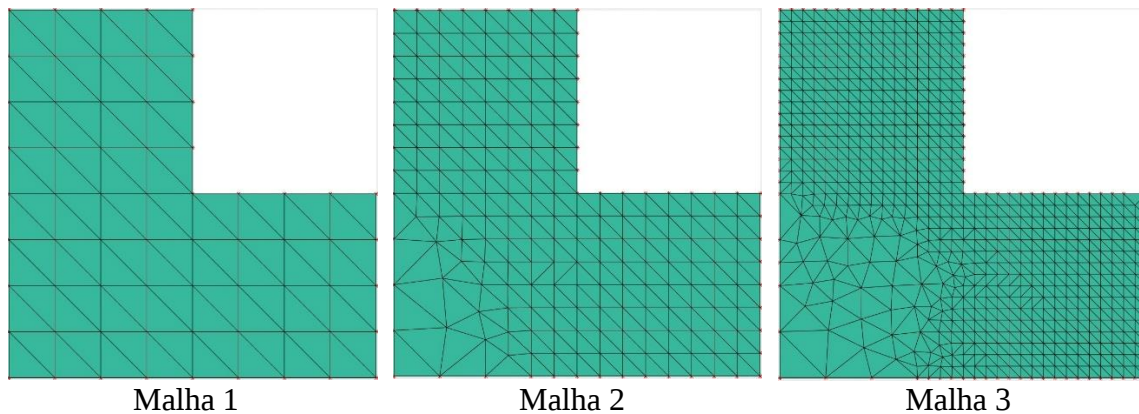


Figura 9: Evolução das malhas

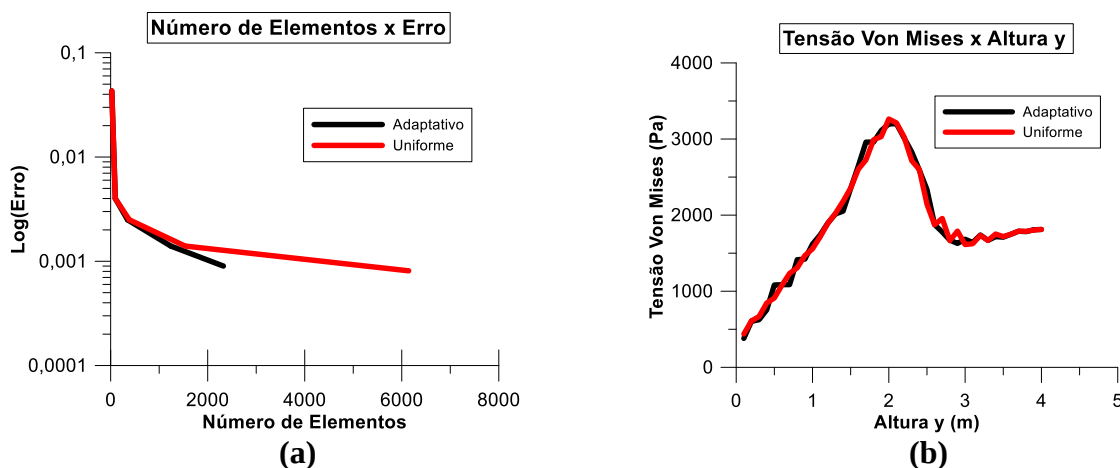


Figura 10: a) Número de elementos x Erro; b) Tensão Von Mises x Altura y.

Na Fig. 11a apresentamos a malha final gerada pelo código através do refinamento adaptativo proposto e na Fig. 11b mostramos a distribuição de tensões Von Mises.

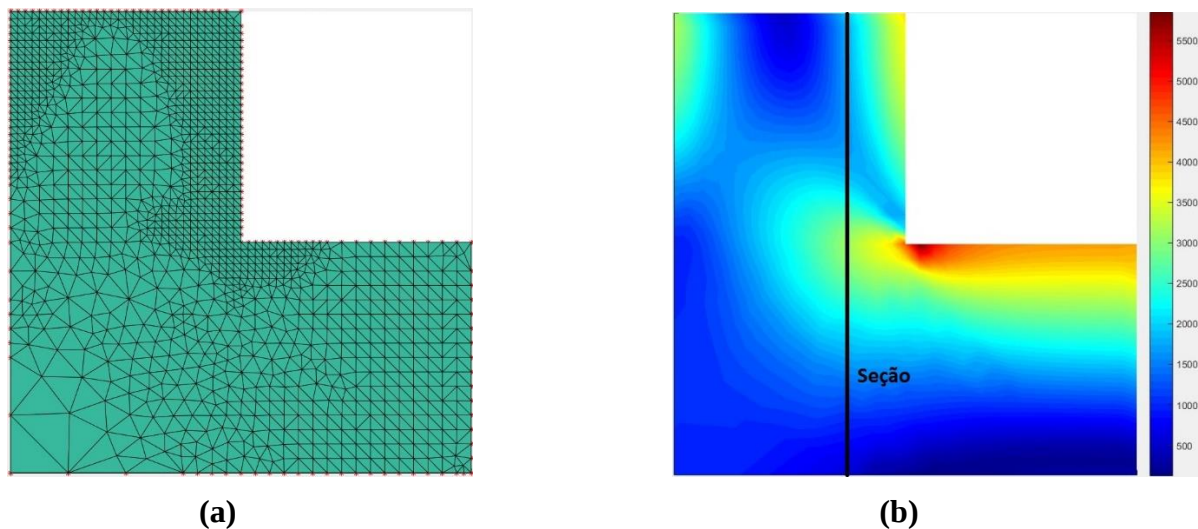


Figura 11: a) Malha Final; b) Distribuição de tensões Von Mises.

7 CONCLUSÃO

Após a análise dos exemplos numéricos apresentados, podemos concluir que a estratégia adotada é eficiente e coerente com os resultados do refinamento uniforme da malha. Eficiente por gerar malhas, as quais podemos considerar de boa qualidade dentro das limitações inerentes ao código, com grande economia de elementos, a exemplo da estrutura em L que utilizou apenas 38% dos elementos necessários no refinamento uniforme, e coerente por apresentar tensões praticamente idênticas com a análise uniforme.

Além disso, demonstramos que uma estratégia eficiente de análise numérica de estruturas pode ser desenvolvida com bastante simplicidade, de modo a tornar acessível a grande parte da comunidade acadêmica o desenvolvimento de ferramentas semelhantes, uma vez que toda a programação foi realizada em MATLAB, sem auxílio de geradores de malha (a exceção do gerador da malha inicial, GiD) e se apropriando de uma estratégia de pouca complexidade para se estimar erro (Método da Média Nodal Simples), que neste trabalho ainda contou com uma simplificação (Eq. (16)), tudo isso utilizando o mais simples dos tipos de elementos, o elemento CST, que em alguns casos implica em erros maiores que o esperado, como descrito pelos índices de efetividade um pouco elevados dos exemplos analisados, porém com fornecimento de resultados satisfatórios para o nível de precisão adotado.

Para exemplos adicionais da aplicação do código o seguinte link pode ser acessado: <https://goo.gl/DJQEE6>.

REFERÊNCIAS

BANK, R. E.; SHERMAN, A. H. **An Adaptive, Multi-level Method for Elliptic Boundary Value Problems**. 1981.

COOK, Robert D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4^a. ed. John Wiley & Sons, 2002. 662 p. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/212457647/2002-Cook-Et-Al-Concepts-and-Applications-of-Finite-Element-Analysis-4ed>>. Acesso em: 01 jul. 2017.

COOK, Robert D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**. John Wiley & Sons, 1995. 307 p.

GID. *The personal pre and postprocessor*: version 12.0.9. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering, 2008.

KWON, Young W.; BANG, Hyochoong. **The Finite Element Method Using MATLAB**. CRC Press, 1997. 519 p.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method**. 4^a. ed. Thomson, 2007. 808 p.

MATLAB. *Matlab*: version r2015a. Massachusetts: MathWorks, 2015.

SALOME Platform Documentation, 2017. Disponível em: <http://docs.salome-platform.org/latest/gui/SMESH/smoothing_page.html>. Acesso em: 14 ago. 2017.

SILVA, Jéderson da. **Análise de Estimadores de Erro A Posteriori Aplicados Ao Método dos Elementos Finitos Utilizando Refino H-Adaptativo**. 2015. 150 p. Mestrado (Engenharia Mecânica)- UFPR, Curitiba/PR, 2015.

SILVA, Jéderson da et al. **Análise de Diferentes Estimadores de Erro a Posteriori Aplicados a Problemas Bidimensionais Utilizando Refino H-Adaptativo**. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, 2014, Caldas Novas/GO.

BANGERTH, Wolfgang. **MATH 676: Finite Element Methods in Scientific Computing Course**. Disponível em: <<http://www.math.colostate.edu/~bangerth/videos.html>>. Acesso em: 27 abr. 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. . **The Finite Element Method**. 5^a. ed. Butterworth-Heineman, 2000. 618 p. v. 1.