



AVALIAÇÃO DE UMA FORMULAÇÃO COMPLETA DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Marcos A.C. Rodrigues

rodriguesma.civil@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Avenida Fernando Ferrari, 514, 29075-910, Vitória, ES, Brasil

Luiz F.C.R. Martha

Murillo V. B. Santana

lfm@tecgraf.puc-rio.br

murillobento@yahoo.com.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Rua Marquês de São Vicente, 225, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Rodrigo B. Burgos

rburgos@eng.uerj.br

Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ)

Rua São Francisco Xavier, 524, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo. A maioria dos pacotes comerciais de análise estrutural utiliza o Método dos Elementos Finitos, sendo possível considerar a não linearidade geométrica ao se utilizar uma formulação Lagrangeana ou Corrotacional para o cálculo. Entretanto, a discretização da malha utilizada no problema possui influência significativa nos resultados. Esse problema pode ser reduzido ao se utilizar funções de interpolação obtidas da solução homogênea da equação diferencial do problema, sem nenhuma aproximação adicional além das simplificações já contidas na idealização do comportamento de barras. Desta forma, esta pesquisa avalia uma formulação completa para a matriz de rigidez do elemento de pórtico, utilizando funções de forma completas, obtidas da equação diferencial do problema da viga sob carga axial. Foram analisadas as cargas críticas de flambagem de elementos isolados e de pórticos. A partir dos resultados obtidos, verifica-se que a formulação completa é capaz de prever a carga crítica de estruturas, mesmo empregando uma malha reduzida.

Palavras-chaves: Não linearidade geométrica, Instabilidade estrutural, Matriz de rigidez, Funções de forma.

1 INTRODUÇÃO

O cálculo da carga crítica para colunas e pórticos é de fundamental importância para a Engenharia, já que o fenômeno da flambagem pode levar a estrutura ao colapso muito antes da tensão de ruptura do material. Burgos et al. (2005) analisa que as deflexões e rotações que antecedem a perda de estabilidade podem ser desprezadas, podendo-se tomar como base a configuração indeformada da estrutura para a formulação das equações de equilíbrio. Entretanto, com o desenvolvimento de estruturas cada vez mais esbeltas a análise da estrutura deformada se torna cada vez mais importante.

Para a análise da estrutura deformada pode-se utilizar o Método dos Elementos Finitos (MEF) em conjunto com as formulações Lagrangeanas e Corrotacional para a análise não linear. Esta formulação vem sendo pesquisada por diversos autores, como Crisfield (1991) e Pacoste e Eriksson (1995;1997). Menin e Silva (2003) empregaram a formulação corrotacional para verificar a resposta na fase pré-crítica e pós-crítica de pórticos planos com elementos de viga de Euler-Bernoulli. Recentemente, Santana e Silveira (2014) compararam os resultados obtidos pelas diferentes formulações não lineares, considerando a teoria de vigas de Timoshenko e Euler-Bernoulli.

Contudo, os métodos numéricos para a análise estrutural necessitam de uma discretização das barras, formando a malha de elementos finitos. Por se tratar de uma aproximação, o resultado está susceptível à discretização da malha, convergindo para a solução exata com maior refinamento. Em razão disso, a análise por elementos finitos, em geral, exige um estudo de convergência de resultados, necessitando mais testes a serem realizados e tempo de análise para estruturas de grande porte. Assim, é exigida experiência do engenheiro para definir a melhor discretização do problema proposto.

Dessa maneira, o resultado do MEF melhora à medida que a estrutura é mais discretizada. No entanto, com a utilização de funções de interpolação completas, ou seja, calculadas a partir das equações diferenciais que governam o problema, o comportamento contínuo de uma barra pode ser representado por parâmetros nodais, sem a consideração de nenhuma aproximação adicional, além das já contidas na idealização analítica do comportamento de barras, conseguindo-se, assim, uma discretização mínima da estrutura, quase que imediata.

Este fato pode ser verificado para estruturas reticuladas, com barras prismáticas e seção transversal constante, onde a solução obtida pela interpolação é a mesma da solução analítica do problema (Método da Rigidez Direta). Isto ocorre porque as funções de interpolação que definem a configuração deformada contínua são compatíveis com a idealização matemática do comportamento das barras feita pela mecânica dos sólidos.

Muitos trabalhos foram desenvolvidos nesta área. Em Nukulchai et al. (1981), são formuladas soluções exatas para elementos finitos de vigas, considerando a deformação por cisalhamento da teoria de vigas de Timoshenko. Zhaohua e Cook (1983) desenvolvem elementos finitos para analisar vigas sobre fundações elásticas. Em Eisenberger e Yankelevsky (1985), é formulada uma matriz de rigidez exata de um elemento apoiado em uma fundação de Winkler. Além disso, Chiwanga e Valsangkar (1988) calcularam a matriz de rigidez e o vetor de carregamentos nodais de uma viga apoiada em uma base elástica de dois parâmetros, sem considerar deformação por cisalhamento, enquanto que Shirima e Giger (1992) levam em conta a teoria de vigas de Timoshenko.

Em Ha (1993), são desenvolvidos uma matriz de rigidez exata e procedimentos para análise de vigas-coluna sanduíche, Girhammar e Gopu (1993) apresentam uma análise exata de vigas mistas com interação parcial, submetidas a carregamentos transversais e axiais, para análises de primeira e de segunda ordem. Areiza-Hurtado et al. (2005) apresentam a matriz de rigidez e o vetor de carregamento de uma viga-coluna, incluindo os efeitos de força axial constante.

O problema resolvido por Onu (2008) considera o efeito de cargas axiais, carregamento transversal, deformação por cisalhamento e fundação elástica de dois parâmetros. Ao discorrer ainda sobre esses estudos, Burgos e Martha (2013) apresentam o cálculo das soluções analíticas para as funções de forma, incluídos carregamento transversal e axial e deformação por cisalhamento.

Dessa forma, este trabalho avalia uma formulação completa da matriz de rigidez do elemento, obtida a partir das funções de forma derivadas da solução analítica da equação diferencial do problema da viga sob carga axial. Para isso, é estudado o equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra deformado, submetido a uma carga distribuída transversal e um carregamento axial. Esta formulação é utilizada para verificar a carga crítica de flambagem de colunas e pórticos. A análise não linear é realizada com um método preditor de carga, incremental. Para isto, não foi necessário utilizar um método preditor-corretor.

Esta pesquisa se limitou apenas à teoria de vigas de Euler-Bernoulli, deixando para análises futuras a consideração da deformação por cisalhamento e o apoio de bases elásticas. O trabalho também se beneficia do programa computacional desenvolvido em Santana e Silveira (2014), utilizando o paradigma de orientação ao objeto que permitiu a simples inserção de um novo elemento com a formulação dos elementos finitos exposta neste trabalho.

2 FORMULAÇÕES NÃO LINEARES GEOMÉTRICAS

Segundo Menin e Silva (2003), a análise não linear geométrica de estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos pode ser realizada através das descrições Lagrangeana total, Lagrangeana atualizada e Corrotacional. Basicamente, as três descrições cinemáticas se diferenciam com relação à configuração de referência considerada. Yshii (2002) e Monteiro (2004) utilizam a Figura 1 para fazer uma abordagem didática das diferentes formulações.

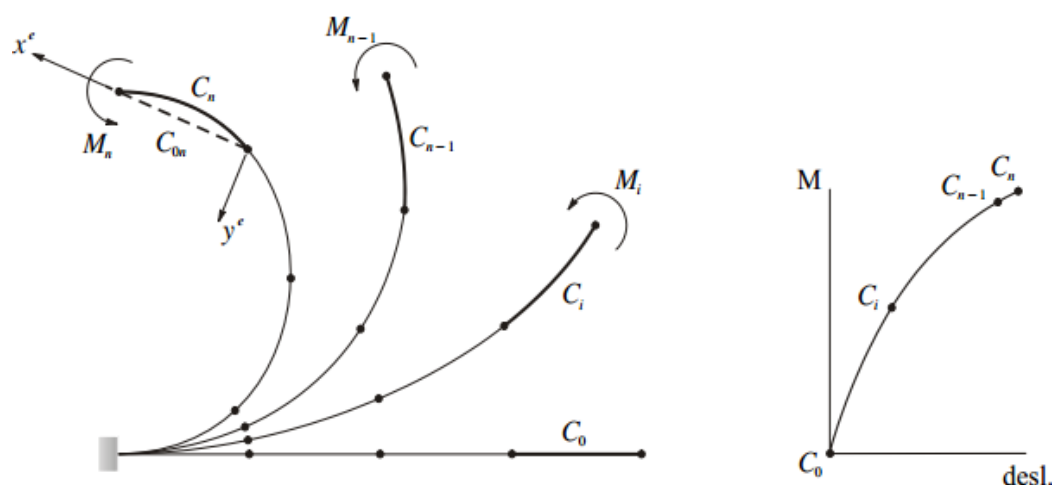


Figura 1 - Configurações de equilíbrio C_0 , C_i , C_{n-1} e C_n de um elemento de barra

A Figura 1 apresenta uma viga sujeita a grandes rotações e composta por quatro elementos finitos. A viga é engastada em uma extremidade e, na outra, é aplicada uma carga-momento. Supondo que se pretende obter a configuração final C_n do elemento na extremidade livre da estrutura, devido à natureza não linear do problema, é necessário conhecer as configurações de equilíbrio anteriores, a configuração inicial indeformada, C_0 , uma configuração intermediária, C_i e uma configuração imediatamente anterior a final, C_{n-1} .

A descrição Lagrangeana é caracterizada pela determinação da configuração final C_n , estabelecendo-se equações que utilizam como referência uma configuração de equilíbrio conhecida. Se esta configuração de referência é dada pela inicial C_0 , tem-se uma descrição Lagrangeana total, enquanto que, utilizando-se a configuração C_{n-1} a descrição é conhecida como Lagrangeana atualizada. Em caso de se utilizar como referência a configuração final C_n , obtém-se uma descrição Euleriana. Em problemas lineares geometricamente, as descrições Euleriana e Lagrangeana total são praticamente idênticas, devido à proximidade das configurações inicial e final. Nesses casos, a descrição Lagrangeana total se apresenta como a mais intuitiva, devido à proximidade entre a configuração inicial e a final de equilíbrio.

A formulação Corrotacional facilita o tratamento do problema de não linearidade geométrica, pois a configuração de referência é dividida em duas partes, com as tensões e deformações medidas em função de uma configuração corrotacionada e os deslocamentos de corpo rígido medidos em função da configuração inicial. Utilizando a Figura 1, tem-se uma configuração indeformada desconhecida C_{0n} , encontrada unicamente pelo movimento de corpo rígido do elemento, sendo esta bem próxima à final; o movimento entre C_{0n} e C_n é o que realmente deformará o elemento e gerará tensões.

Menin e Silva (2003) apontam algumas vantagens da formulação corrotacional em relação à Lagrangeana, como a eficiência no tratamento de problemas com grandes rotações e pequenas deformações e a possível reutilização de elementos finitos lineares pré-existent dentro de uma análise não linear geométrica de estruturas. Entretanto, também ilustra algumas desvantagens, podendo-se citar sua não eficiência para tratar problemas envolvendo grandes deformações plásticas e para o caso de elementos finitos com geometria mais complexa.

3 FORMULAÇÃO COMPLETA

Para encontrar as funções de interpolação completas, faz-se necessário obter a equação diferencial que rege o comportamento do elemento. Sendo assim, para considerar a não linearidade geométrica da estrutura, realiza-se o equilíbrio do elemento infinitesimal de viga em sua configuração deformada. O desenvolvimento e implementação das funções de forma completas contribuem para a análise não linear das estruturas, pois, segundo Burgos et al. (2005), o uso de uma análise não linear completa, no sentido de necessitar de uma matriz de rigidez que leve a não linearidade em consideração, assim como a utilização de métodos preditores e corretores, tem a desvantagem de ser muito exigente do ponto de vista computacional, além de envolver muitas tomadas de decisões, como os valores de incremento de carga ou de deslocamento.

3.1 Equação Diferencial de Equilíbrio de uma Viga-Coluna

A representação do comportamento de estruturas de barras considera que as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas para toda a estrutura, o que inclui um elemento infinitesimal de barra. A Figura 2 ilustra a configuração deformada do elemento infinitesimal de uma viga-coluna em que atua um carregamento distribuído q e uma carga axial P .

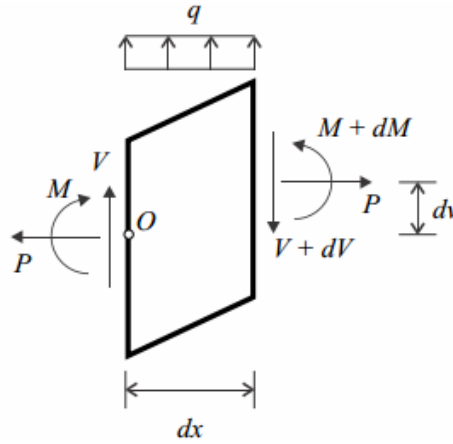


Figura 2 – Equilíbrio de um elemento de viga-coluna deformado

Impondo as condições de equilíbrio, encontra-se o resultado apresentado na Eq. (1) e na Eq. (2).

$$-dV + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = q(x) \quad (1)$$

$$dM - (V + dV)dx - Pdv + q(x)\frac{dx^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x) + P\frac{dv(x)}{dx} \quad (2)$$

onde $v(x)$ é o deslocamento transversal do elemento infinitesimal, $q(x)$ a carga transversal distribuída, $V(x)$ a componente vertical do esforço na seção transversal, P a componente horizontal do esforço na seção transversal e $M(x)$ o momento fletor na seção transversal. Da equação da linha elástica escrita na Eq.(3), e substituindo a relação da Eq. (1) na Eq. (2), tem-se o resultado apresentado na Eq. (4).

$$M(x) = EI \frac{d\theta}{dx} \quad (3)$$

$$EI \frac{d^3\theta}{dx^3} - \frac{dV(x)}{dx} - P \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0 \quad (4)$$

Como é sabido, das equações fundamentais da estática, o carregamento atuante em uma viga é igual à derivada do esforço cortante. Assim, pode-se escrever a relação da Eq.(5), que é equivalente ao equilíbrio na direção vertical (Eq. (1)).

$$q(x) = \frac{dV}{dx} \quad (5)$$

Desta maneira, pode-se, então, escrever a equação diferencial do problema, conforme apresentada na Eq.(6).

$$EI \frac{d^3 \theta}{dx^3} - P \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = q(x) \quad (6)$$

3.2 Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli considera a rotação como sendo a derivada do deslocamento transversal, conforme a Eq.(7).

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

Assim, de acordo como a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, a equação diferencial que rege o comportamento de uma viga-coluna, apresentada na Eq.(6), pode ser escrita conforme a relação da Eq.(8).

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - P \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = q(x) \quad (8)$$

Ou conforme a Eq.(9).

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{P}{EI} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI} \quad (9)$$

A relação anterior pode ser reescrita conforme a Eq.(10), considerando apenas a parcela homogênea.

$$\frac{d^4 v_0(x)}{dx^4} - \mu^2 \frac{d^2 v_0(x)}{dx^2} = 0, \quad \mu^2 = \frac{P}{EI} \quad (10)$$

A solução da equação fornece o deslocamento $v_0(x)$, conforme Eq.(11). Para o cálculo da rotação da seção transversal utiliza-se a relação $\theta(x) = dv_0(x)/dx$. Ao se utilizar funções de forma baseadas na solução homogênea analítica, os deslocamentos são iguais à solução analítica do problema.

$$\lambda^2(\lambda^2 - \mu^2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = \mu, \lambda_4 = -\mu$$

$$v_0(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} + Cx + D \quad (11)$$

3.3 Matriz de Rigidez Completa

O comportamento estrutural analítico de um meio contínuo pode ser substituído por um comportamento discreto, no qual os parâmetros adotados no modelo discreto dependem do método de análise utilizado. Por exemplo, no Método Clássico de elementos finitos de deslocamentos para barras, a configuração deformada da estrutura representa a solução contínua, enquanto as deslocabilidades nodais representam a solução discreta do problema, conforme a Figura 3.

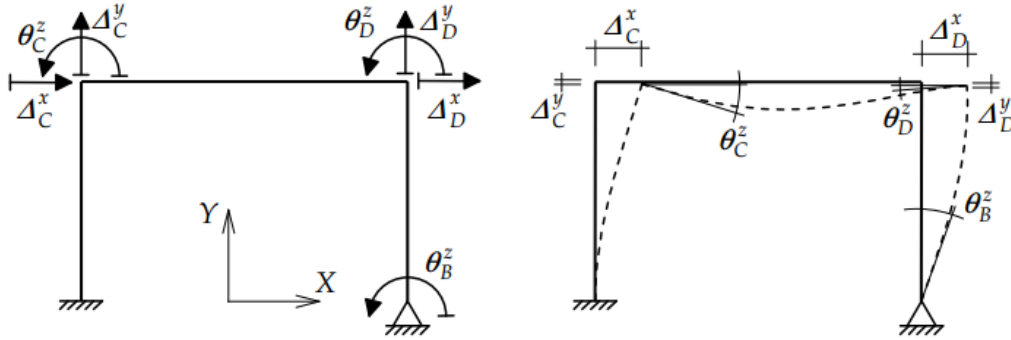


Figura 3 – Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo método dos deslocamentos

A solução contínua, neste método, pode ser encontrada por interpolação dos valores discretos dos deslocamentos e rotações nodais, conforme a Figura 4 e, matematicamente, nas Equações.(12), (13) e (14).

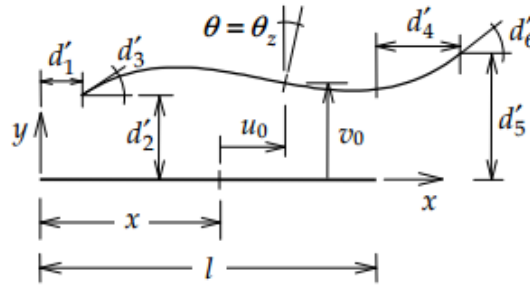


Figura 4 – Configuração deformada de barra isolada

$$u_0(x) = N_1^u(x)d'_1 + N_4^u(x)d'_4 \quad (12)$$

$$v_0(x) = N_2^v(x)d'_2 + N_3^v(x)d'_3 + N_5^v(x)d'_5 + N_6^v(x)d'_6 \quad (13)$$

$$\theta(x) = N_2^\theta(x)d'_2 + N_3^\theta(x)d'_3 + N_5^\theta(x)d'_5 + N_6^\theta(x)d'_6 \quad (14)$$

Essas equações podem ser apresentadas de forma matricial, conforme Eq.(15) e de uma forma condensada, como na Eq.(16).

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u(x) & 0 & 0 & N_4^u(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2^v(x) & N_3^v(x) & 0 & N_5^v(x) & N_6^v(x) \\ 0 & N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & 0 & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d'\} \quad (16)$$

Desta maneira, o deslocamento da barra, conforme Eq.(11), dado pela equação diferencial do problema, apresentado na Eq.(10), será dado na forma da Eq.(17),

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot \{C\} \quad (17)$$

em que $[X]$ representa as funções e $\{C\}$ as constantes que multiplicam as funções. As condições de contorno são dadas pela Eq.(18). Esta equação avalia a solução homogênea nas extremidades das barras, com $[H]$ sendo a avaliação das funções de solução nos extremos da barra.

$$\{d'\} = \{d'_1 \quad d'_2 \quad d'_3 \quad d'_4\}^t = \{v_0(0) \quad \theta(0) \quad v_0(L) \quad \theta(L)\}^t$$

$$[H] \cdot \{C\} = \{d'\} \quad (18)$$

Utilizando a Eq.(16) e a Eq.(18), encontram-se as funções de forma completas, conforme a Eq.(19).

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot [H]^{-1} \cdot \{d'\} \Rightarrow [N] = [X] \cdot [H]^{-1} \quad (19)$$

Assim, as funções de forma interpolam o deslocamento transversal e a rotação da seção transversal em termos dos valores de contorno, de acordo com a Eq.(20).

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d'\} \quad , \quad [N] = \begin{bmatrix} N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v \\ N_1^\theta & N_2^\theta & N_3^\theta & N_4^\theta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, encontra-se a matriz de rigidez do elemento, conforme a Eq.(21).

$$\{f'\} = \int_0^l [B]^T [S] [B] \cdot dx \cdot \{d'\} \rightarrow \{f'\} = [k'] \cdot \{d'\} \rightarrow [k'] = \int_0^l [B]^T [S] [B] \quad (21)$$

A matriz B é calculada utilizando-se a Eq.(22).

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{d(N_1^\theta)}{dx} & \frac{d(N_2^\theta)}{dx} & \frac{d(N_3^\theta)}{dx} & \frac{d(N_4^\theta)}{dx} \\ \frac{d(N_1^v)}{dx} - N_1^\theta & \frac{d(N_2^v)}{dx} - N_2^\theta & \frac{d(N_3^v)}{dx} - N_3^\theta & \frac{d(N_4^v)}{dx} - N_4^\theta \\ \frac{d(N_1^v)}{dx} & \frac{d(N_2^v)}{dx} & \frac{d(N_3^v)}{dx} & \frac{d(N_4^v)}{dx} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Informações mais detalhadas são expostas em Burgos e Martha (2013).

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para análise do elemento, foram verificadas a carga crítica de flambagem de colunas e pórticos planos. O elemento foi implementado em código do Matlab no programa computacional desenvolvido em Santana e Silveira (2014), utilizando o paradigma de orientação ao objeto, que permitiu a simples inserção de um novo elemento com a matriz de rigidez calculada a partir das funções de forma, obtidas da equação diferencial do problema.

4.1 Carga Crítica de Colunas

Para analisar os resultados obtidos pela formulação completa, estudou-se a carga de flambagem de colunas com diferentes condições de contorno, utilizando-se uma malha de elementos finitos de apenas um elemento. Primeiramente, foi calculada a carga de flambagem de uma coluna engastada e livre e, em seguida, de uma coluna biapoiada. Por fim, foi calculada uma coluna engastada e apoiada, conforme Figura 5. Em todos os casos, considerou-se a teoria de vigas de Euler-Bernoulli (EBBT).

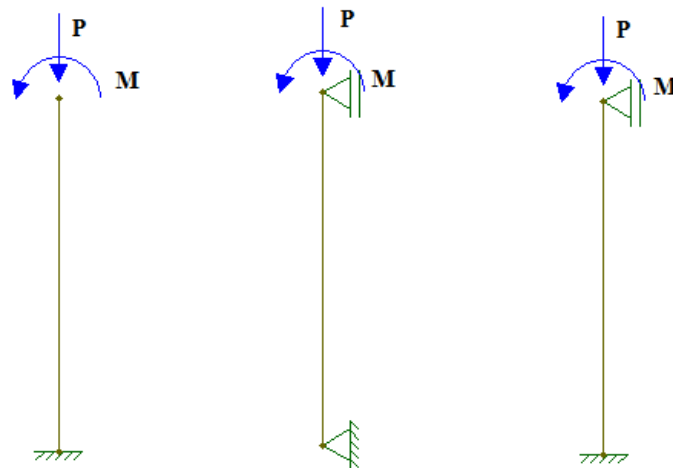


Figura 5 – Colunas analisadas

As análises foram feitas a partir de elementos baseados na formulação de elementos finitos completos, ou seja, a matriz de rigidez foi calculada com funções de forma obtidas da solução da equação diferencial do problema. Também foi considerado o comprimento das barras iguais à unidade ($L=1$). Para a elaboração dos gráficos, a carga crítica foi normalizada pela

rigidez à flexão da seção transversal (EI). Assim, a carga de flambagem de uma coluna é dada pela Eq.(23),

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2} \quad (23)$$

em que P_{cr} é a carga crítica de flambagem e L_{eq} é o comprimento equivalente da coluna de Euler. Assim, a carga crítica de flambagem normalizada para coluna engastada e livre é dada por 2.467. O comportamento da coluna, utilizando-se a formulação completa é apresentado na Figura 6.

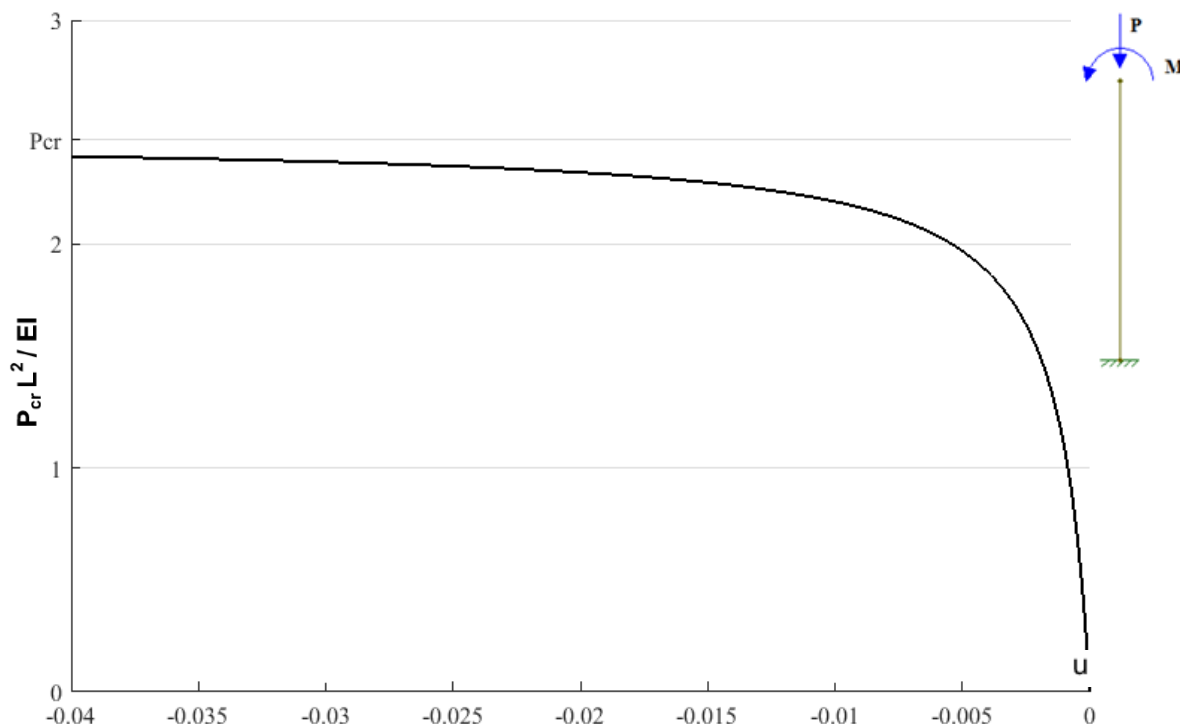


Figura 6 – Carga crítica para coluna engastada e livre (1 elemento completo)

Pode-se observar que, resolvendo o problema com a formulação completa, baseada na equação diferencial do elemento infinitesimal, com apenas um elemento, a carga de flambagem da coluna foi encontrada, e uma discretização da malha é desnecessária. Além disso, apenas utilizou-se um método preditor de cargas, não exigindo, até a carga crítica de flambagem, um método preditor corretor.

Para a coluna biapoada, a carga crítica de flambagem normalizada pela rigidez à flexão da seção transversal (EI) é dada por 9.867. O comportamento da coluna, utilizando-se a formulação completa, também foi estudado e é apresentado na Figura 7.

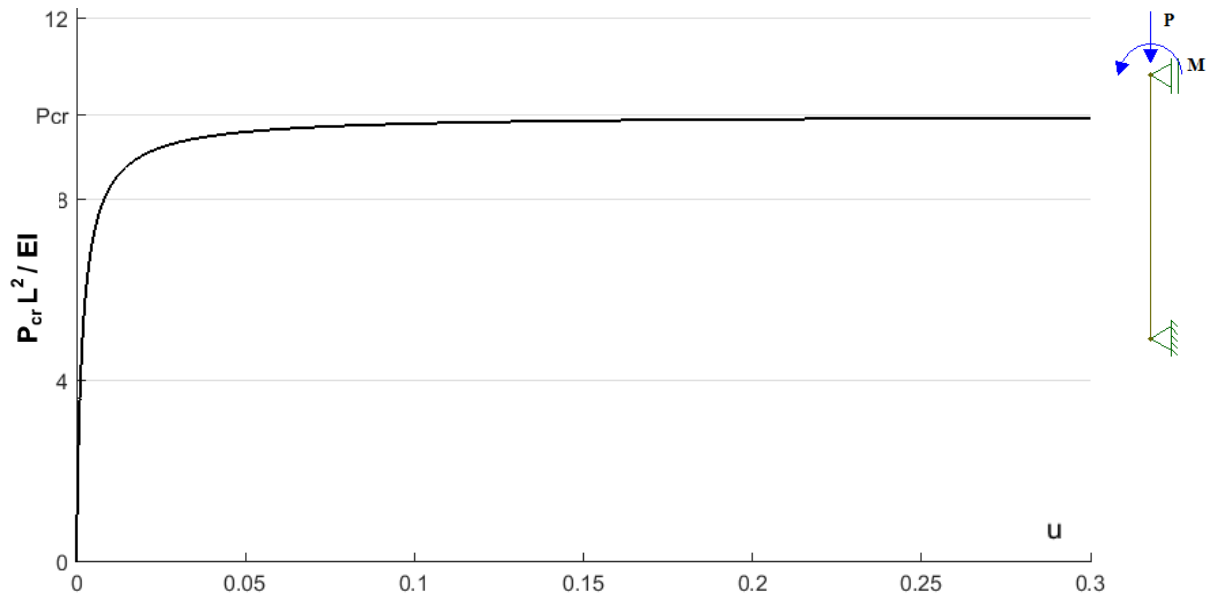


Figura 7 – Carga crítica para coluna biapoçada (1 elemento completo)

Como no exemplo anterior, empregando-se a matriz de rigidez completa, apenas um elemento é necessário para se obter a carga crítica de flambagem da estrutura. Da mesma maneira, utilizou-se apenas um método preditor de cargas, reduzindo os esforços de tomadas de decisão, como discretização da malha, escolha de métodos preditores-corretores, passos de carga ou deslocamento, dentre outros, característicos de uma análise não linear.

Para o último exemplo de elementos isolados, analisou-se o comportamento de uma coluna engastada em um apoio e simplesmente apoiada em outro. Para essa estrutura, a carga crítica analítica de flambagem normalizada pela rigidez à flexão (EI) é dada por 20.142. Os resultados obtidos com a formulação completa são apresentados na Figura 8.

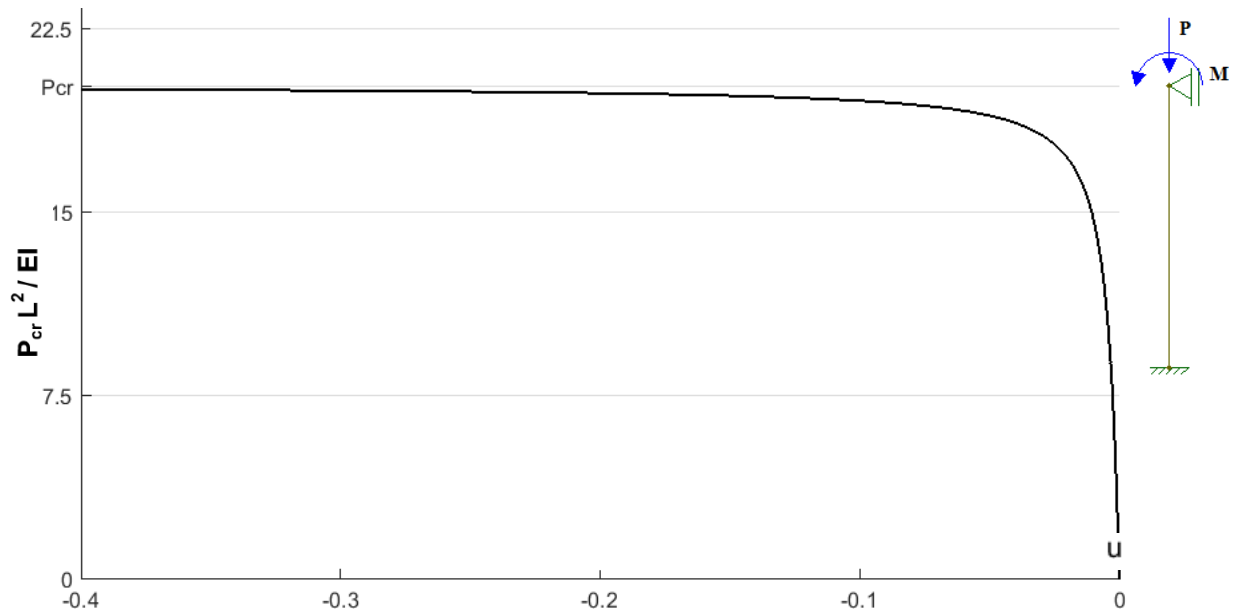


Figura 8 – Carga crítica para coluna engastada e biapoçada (1 elemento completo)

A análise da coluna engastada em um apoio e simplesmente apoiada em outro também leva à conclusão de que, ao se utilizar a matriz de rigidez completa, a discretização de malha é desnecessária, assim como, um método corretor. É importante observar que esta conclusão é obtida apenas até a carga de flambagem da estrutura.

4.2 Carga Crítica de Pórticos Planos

Também foram realizadas análises para a carga crítica de pórticos. Foram elaborados dois exemplos do pórtico de Roorda, com diferentes carregamentos, que também foram analisados em Burgos et al. (2005), conforme apresentado na Figura 9.

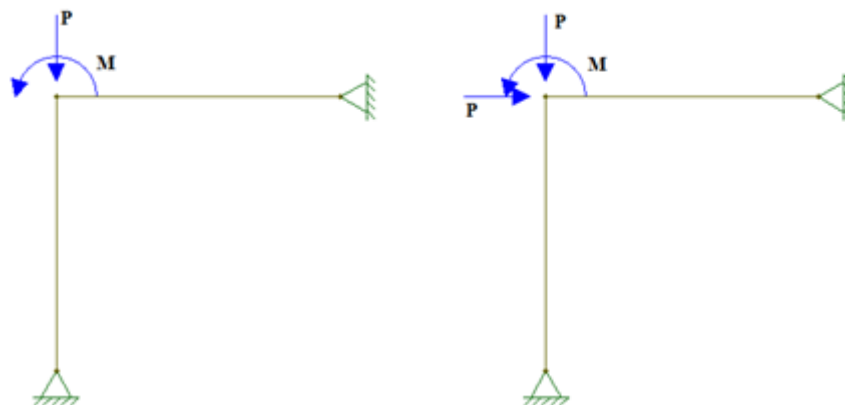


Figura 9 – Carga crítica para coluna engastada e biapoiada (2 elementos completos por barra)

Para a análise, ainda foi considerado o comprimento das barras iguais à unidade ($L=1$). Para a elaboração dos gráficos, assim como nos exemplos anteriores, a carga crítica foi normalizada pela rigidez à flexão da seção transversal (EI) das barras. O momento aplicado é pequeno e serve para gerar não linearidade ao problema.

Para o pórtico com apenas a carga vertical, a carga crítica é apresentada na Eq.(24) e para o pórtico com carregamento horizontal e vertical, a carga de flambagem é dada pela Eq. (25).

$$P_{cr} = 1.406 \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2} \rightarrow \frac{P_{cr} L_{eq}^2}{\pi^2 EI} = 13.877 \quad (24)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2} \rightarrow \frac{P_{cr} L_{eq}^2}{\pi^2 EI} = 9.867 \quad (25)$$

Os resultados encontrados para o comportamento dos pórticos são apresentados na Figura 10, para pórtico de Roorda apenas com carga vertical, e na Figura 11, para pórtico de Roorda com carga vertical e horizontal. Nota-se que a formulação com matriz de rigidez completa, utilizando-se apenas dois elementos por barra, consegue prever a carga crítica de flambagem de ambos os pórticos. Como nos exemplos anteriores, uma maior discretização da malha de elementos finitos é desnecessária, assim como um método preditor-corretor, tornando a análise não linear, até a carga de flambagem, mais simples de ser realizada.

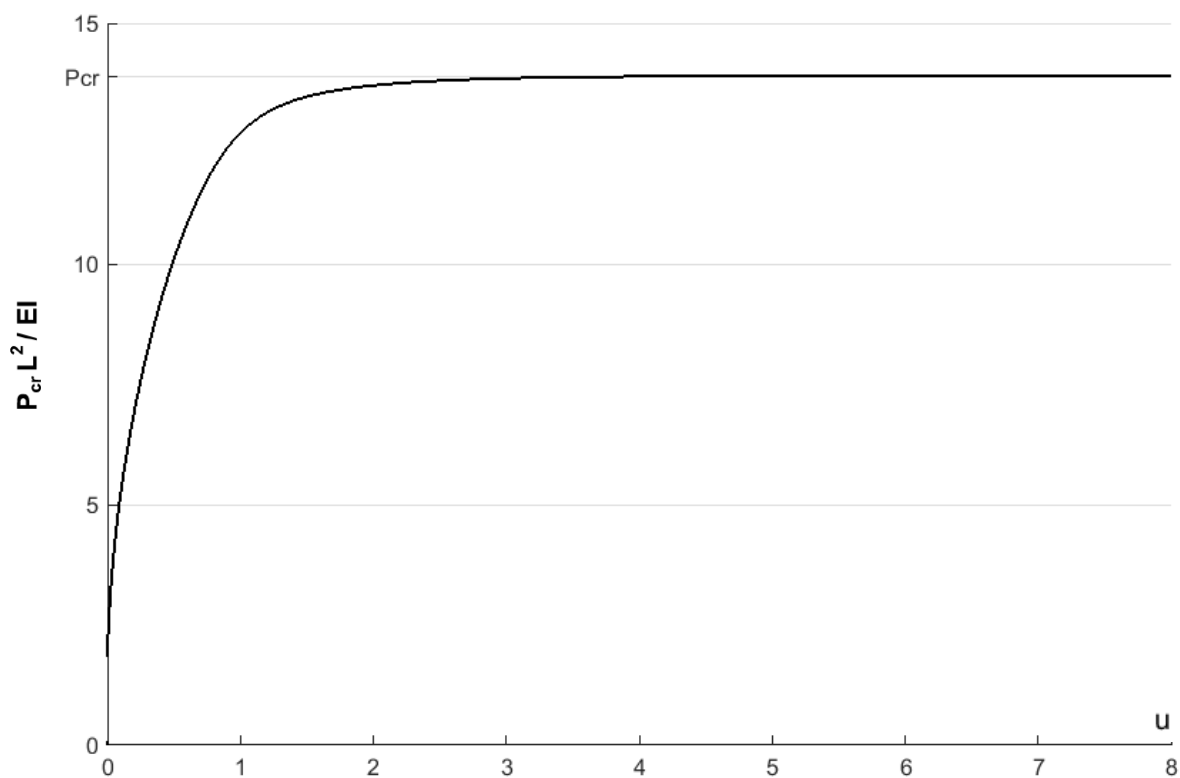


Figura 10 – Carga crítica para pórtico com apenas carga vertical (2 elementos por barra)

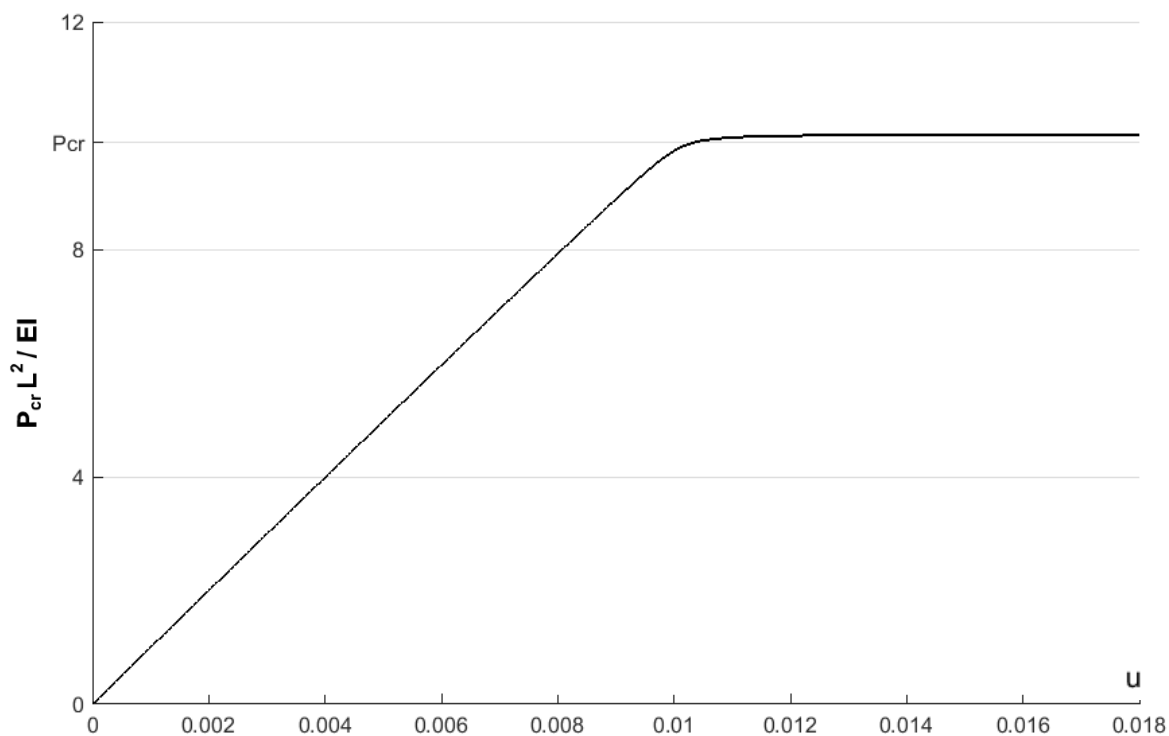


Figura 11 – Carga crítica para pórtico com carga vertical e horizontal (2 elementos por barra)

5 CONCLUSÃO

O trabalho aplicou uma formulação completa para matriz de rigidez de elementos para análise não linear de estruturas. A matriz é chamada de completa por ser calculada com funções de forma, obtidas da solução da equação diferencial do problema, em que se analisou o equilíbrio de um elemento infinitesimal deformado submetido a um carregamento transversal e uma carga axial. Com isso, é possível obter resultados com uma malha de elementos finitos reduzida, pois as funções de interpolação que definem a configuração deformada contínua da estrutura são compatíveis com a idealização matemática do comportamento das barras, feita pela mecânica dos sólidos.

O elemento, com a matriz de rigidez completa, foi empregado para a análise de flambagem de elementos e a carga crítica foi calculada para elementos isolados e pórticos planos. Utilizou-se uma malha de um elemento para as colunas isoladas e dois elementos por barra para análise dos pórticos planos. A análise não linear foi realizada apenas com um método preditor de cargas e a matriz completa dos elementos.

Os resultados evidenciaram a eficiência da formulação completa da matriz de rigidez do elemento, baseada na solução analítica da equação diferencial do problema, para cálculo da carga crítica de estruturas. Poucos elementos foram precisos para prever a carga de flambagem, sem a necessidade de se utilizar um método preditor-corretor.

Apesar da complexidade das funções de forma e da matriz de rigidez, a implementação da formulação em códigos computacionais permite uma pequena discretização da malha de elementos finitos, reduzindo a influência da malha nos resultados e, assim, auxiliando o usuário.

O método também apresentou resposta efetiva e coerente para diferentes condições de contorno e diferentes carregamentos para estruturas na fase pré-crítica.

Em futuros trabalhos será analisada a influência da teoria de vigas nos resultados, estudando-se a formulação apresentada considerando a teoria de vigas de Timoshenko.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) e pela FAPERJ.

REFERÊNCIAS

- Areiza-Hurtado, M., Vega-Posada, C., & Aristizábal-Ochoa, D. (2005). Second-order stiffness matrix and loading vector of a beam-column with semi rigid connections on an elastic foundation.”*Journal of Engineering Mechanics*, pp. 752-762.
- Burgos, R. B., & Martha, L. F., 2013. Exact shape functions and tangent stiffness matrix for the buckling of beam-columns considering shear deformation. In: *XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Pirenópolis, Brazil.
- Burgos, R. B., Silva, R. R., & Martha, L. F., 2005. Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-Crítico Inicial de Pórticos Planos. In *XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Guarapari, Brasil.

- Chiwanga, M., Valsangkar, A. J., 1988. Generalized beam element on two-parameter elastic foundation. *Journal of Structural Engineering*, vol. 114, n. 6, pp. 1414-1427.
- Crisfield, M. A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. v. 1, John Wiley and Sons.
- Eisenberger, M., & Yankelevsky, D. Z., 1985. Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation. *Computers and Structures*, vol.21, n. 6, pp. 1355-1359.
- Girhammar, U. A., & Gopu, V. K. A., 1993. Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol.119, n. 4, pp. 1265-1282.
- Ha, K. H., 1993. Stiffness matrix for exact solution of sandwich beam and frame systems. *Journal of Structural Engineering*, vol.119, n. 4, pp. 1150-1167.
- Menin, R. C. G., & Silva, W. T. M., 2003. Resposta Pós-Crítica de Pórticos Planos Discretizados com Elementos de Viga De Euler-Bernoulli Utilizando uma Formulação Co-Rotacional. In *XXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Ouro Preto, Brasil.
- Monteiro, F. A. C., 2004. Uma formulação Co-rotacional geral: Aplicação a pórticos espaciais. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brasil.
- Nukulchai, W. K., Dayawansa P. H., & Karasudhi, P., 1981. An exact finite element model for deep beams. *International Journal of Structures*, vol.1, n. 1, pp. 1-7.
- Onu, G., 2008. Finite elements on generalized elastic foundation in Timoshenko beam theory. *Journal of Engineering Mechanics*, vol.134, n. 9, pp. 763-776.
- Pacoste, C., & Eriksson, A., 1995. Element Behaviour in Post-Critical Plane Frames Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 125, pp. 319-343.
- Pacoste, C., & Eriksson, A., 1997. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, pp. 163-197.
- Santana, M. V. B., & Silveira, R. A. M., 2014. Sistema Computacional gráfico interativo para problemas de instabilidade em pórticos planos. In *XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Fortaleza, Brasil.
- Shrima, L. M., & Giger M. W., 1992. Timoshenko beam element resting on two-parameter elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, vol.118, n.2, pp.280-295.
- Yshii, Y., 2002. Formulação Co-rotacional para pórticos planos. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brasil.
- Zhaohua, F., & Cook, R. D., 1983. Beam elements on two-parameter elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*, vol.109, n.6, pp.1390-1402.