



SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO ACÚSTICA A PARTIR DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Emerson de Sousa Costa

emersondesousa@gmail.com

CEFET-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Rua Álvares de Azevedo 400 - Bela Vista - Divinópolis - MG - Brasil - CEP 35503-822

Resumo. *Diversos problemas de engenharia são regidos por equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais que são matematicamente equivalentes. Alguns desses problemas estão relacionados com a radiação acústica de fontes sonora, cuja modelagem é de fundamental importância para compreender a propagação das ondas acústicas e, conseqüentemente, desenvolver mecanismos para redução de ruídos acústicos. A solução analítica destes problemas é difícil ou impossível de ser obtida, requerendo em geral que seja realizada sua modelagem matemática com o objetivo de se encontrar uma solução aproximada, que pode ser obtida por alguma técnica de discretização como o método dos elementos de contorno ou o método dos elementos finitos, entre outros. O método dos elementos de contorno é uma das principais técnicas numéricas utilizadas para se encontrar a solução aproximada de equações diferenciais, e possui a vantagem de ser aplicado a domínios infinitos ou semi-infinitos. Neste trabalho será apresentada um estudo da solução analítica da equação de onda, para um caso específico de fonte sonora e sua solução numérica a partir do método dos elementos de contorno.*

Palavras-chave: *Propagação Sonora, Simulação Numérica, Método dos Elementos de Contorno*

INTRODUÇÃO

Diversas atividades realizadas no dia a dia, sejam elas produtivas, de transporte ou de lazer, são fontes causadoras de “barulho”. Durante anos, conviver com o ruído, ou “barulho” foi um fato comum para a população de grandes centros urbanos, quando ainda não existiam legislações que regulamentavam as atividades que eram geradoras de poluição sonora.

A propagação do som no ar livre é normalmente estudada em termos de três componentes: a fonte sonora, a trajetória de transmissão e o receptor. Primeiramente, a fonte emite uma certa potência sonora, gerando um nível sonoro que pode ser medido nas proximidades da fonte. A partir daí o nível sonoro é atenuado à medida que o som se propaga, entre a fonte e o receptor, ao longo de determinada trajetória.

A modelagem da radiação acústica é de fundamental importância para se compreender a propagação das ondas acústicas e, conseqüentemente, desenvolver mecanismos para atenuação de ruídos acústicos. Para estimativas de níveis de pressão sonora, é preciso conhecer os níveis de potência sonora das fontes em questão. É este o caso, por exemplo, quando se deseja determinar o nível de pressão sonora gerado pelo maquinário de um ambiente industrial e o nível de pressão sonora devido ao tráfego de uma rodovia, entre outros.

A distribuição de pressão em um fluido sujeita a uma fonte de vibração é dada pela equação de Helmholtz. A dedução desta equação começa pelas equações que governam os fluidos, considerando algumas restrições.

Uma das alternativas para se realizar o estudo da propagação sonora é utilizar o MEC - Método dos Elementos de Contorno, que é uma ferramenta poderosa na solução de problemas de valores de contorno. Sua utilização se torna necessária quando os problemas analisados alcançam um nível de complexidade que dificulta a obtenção da solução analítica.

Atualmente, o Método dos Elementos de Contorno é um dos métodos mais avançados e utilizados especialmente quando se trata de problemas considerando meios infinitos e semi-infinitos. Uma das grandes vantagens desse método é que ele permite a redução da dimensão do problema, reduzindo o número de equações utilizadas, permitindo a análise da solução apenas no contorno da região modelada, sem necessidade de se analisar todo o seu domínio.

Este trabalho apresenta uma modelagem e simulação da propagação acústica a partir do Método dos Elementos de Contorno.

1 PROPAGAÇÃO SONORA

Será apresentada uma breve descrição das equações que governam a propagação da onda acústica.

1.1 Equação de Onda

A equação que governa o fenômeno da radiação acústica é encontrada através as equações de estado, de conservação da massa, e da conservação da quantidade de movimento.

Para meios fluidos, a equação de estado relaciona grandezas físicas que descrevem o comportamento termodinâmico do fluido.

$$P - P_0 = \beta \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0}, \quad (1)$$

em que P é a pressão instantânea em um ponto, P_0 é a pressão de equilíbrio no fluido, β é o módulo adiabático (coeficiente de expansão térmica do fluido), ρ é a densidade instantânea em um ponto e ρ_0 é a densidade de equilíbrio do fluido.

Podemos definir a condensação s em um ponto como sendo a variação da densidade de equilíbrio $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ e com isso, reescrever a Equação (1) em termos da pressão acústica p e da condensação s .

$$p \approx \beta s, \quad (2)$$

em que $p = P - P_0$ é a pressão acústica e $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ é condensação em um ponto.

A restrição essencial é que a condensação s deve ser muito pequena, $|s| \ll 1$, Kinsler et al., (2000).

Para relacionar o movimento do fluido com sua compressão ou expansão, precisamos de uma função que relacione a velocidade $\vec{u}$ da partícula do fluido com sua densidade instantânea ρ .

Considera-se um elemento infinitesimal de volume de fluido, fixo no espaço. A equação de continuidade relaciona a taxa de crescimento de massa nesse elemento de volume com o fluxo de massa através da superfície fechada que envolve esse volume. Uma vez que o fluxo deve ser igual à taxa de crescimento, obtém-se a equação de continuidade.

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

A equação de movimento relaciona a pressão acústica p com a velocidade $\vec{u}$ instantânea de partícula, para um fluido adiabático e não viscoso, isto é, os efeitos da viscosidade¹ do fluido são desprezados. Dessa maneira encontra-se a equação de Euler (equação de força) para fenômenos acústicos de pequena amplitude.

¹ Grau de adesão entre as moléculas de fluido.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (4)$$

A partir das equações anteriores, obtém-se a equação de onda linearizada, expressa em termos do potencial de velocidade de onda acústica:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (5)$$

em que ∇^2 é o operador Laplaciano, $\vec{u} = \nabla \phi$ é a velocidade da partícula expressa como o gradiente de uma função escalar ϕ , denominada potencial de velocidade e $c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$ é a velocidade de propagação da onda acústica no meio.

A partir da equação de onda linearizada, encontra-se a Equação de Helmholtz independente do tempo para um meio sem perdas, expressa em termos de potencial de velocidade de onda acústica:

$$\nabla^2 \phi_f(\vec{r}) + k^2 \phi_f(\vec{r}) = 0 \quad (6)$$

onde ϕ_f representa a parte espacial do potencial de velocidade, ω representa a frequência angular da vibração e $k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ é denominado número de onda.

1.2 Solução Analítica

Utilizando-se o método de separação de variáveis, obtém-se a parte espacial da solução da Equação de Helmholtz, dada pela Equação (6):

$$\phi(r, \psi, z) = -\frac{V_0}{k} \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)}, \quad r \geq a \quad (7)$$

onde $H_0^{(2)}(u)$ e $H_1^{(2)}(u)$ são as funções de Hankel do 2ª espécie e ordem 0 e 1, respectivamente, também conhecidas como funções de Bessel do 3ª espécie, k é o número de onda, a é o raio do cilindro, r é a direção radial do potencial de velocidade.

A solução, dada pela Equação (7) é aplicada para o caso especial de radiação uniforme, isto é, a superfície da fonte de sonora está vibrando uniformemente na direção radial com uma

amplitude de V_0 metros por segundo, numa frequência de f hertz. Este caso é também conhecido como modo monopolo de vibração, Ziomec (1995).

1.3 Método dos Elementos de Contorno (MEC)

Diversos problemas encontrados no dia a dia são frequentemente descritos por leis físicas, as quais são comumente expressas por equações diferenciais parciais. Em muitos casos, uma representação matemática alternativa e equivalente do problema é encontrada em termos de equações integrais de contorno. Atualmente, os métodos de modelagem matemática baseados em equações integrais de contorno podem ser usados para a simulação de muitos problemas práticos de engenharia. Uma das técnicas numéricas mais utilizada para se obter a solução de equações integrais de contorno é o Método de Elementos de Contorno.

A redução das dimensões do problema analisado constitui uma das razões pela qual o Método de Elementos de Contorno é tão atrativo: em problemas bidimensionais, apenas o contorno unidimensional do domínio necessita ser discretizado em elementos; em problemas tridimensionais, apenas as superfícies do contorno necessitam ser discretizadas.

Uma peculiaridade do Método de Elementos de Contorno é que ele provê um modelo contínuo do domínio, uma vez que nenhuma discretização do mesmo é requerida. Isso conduz a uma ótima resolução dos parâmetros incógnitos no domínio do problema. As soluções nos pontos internos são calculadas após as incógnitas de contorno terem sido calculadas, de maneira semelhante a um pós-processamento. A densidade, distribuição e localização dos pontos internos não interferem na malha de contorno, tampouco nos valores das incógnitas de contorno.

Outra característica do Método de Elementos de Contorno é a satisfação automática de condições de contorno para domínios infinitos e semi-infinitos, o que elimina a necessidade de discretização numérica em contornos remotos.

1.4 Equação Integral de Contorno

A equação diferencial clássica, Equação de Helmholtz, que descreve o problema de radiação acústica de uma fonte sonora infinita pulsante, no formato de um cilindro, foi determinada nos tópicos anteriores. Para encontrar a Equação Integral no contorno, a partir da Equação de Helmholtz, considera-se um corpo bidimensional B imerso em um domínio infinito Ω , como o representado na Figura 1 abaixo.

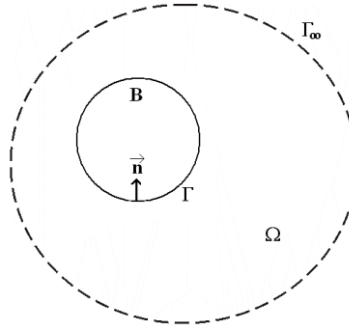


Figura 1. Representação do domínio e do contorno

A solução da Equação (6) que descreve o problema analisado, sujeito a condição de contorno

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 1 \text{ (condição de Neumann)} \quad (8)$$

é dada pela equação integral de contorno

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - \phi(\vec{r}) = 0. \quad (9)$$

A equação acima foi obtida para pontos de colocação $\vec{r}$ pertencentes ao domínio, onde u^* é a solução fundamental, representada pela função de Green. Esta solução é apresentada para o corpo bidimensional, Ciskowski et al. (1991), como:

$$u^* = \frac{i}{4} H_0^1(kR) \quad (10)$$

e sua derivada é dada por

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{ik}{4} H_1^1(kR) \frac{\partial R}{\partial n} \quad (11)$$

onde R é a distância entre o ponto $\vec{r}$ e o ponto de aplicação $\vec{r}'$ no domínio Ω .

1.5 Discretização das variáveis

Para a discretização das variáveis físicas e geométricas do problema utilizando-se elementos constantes, o contorno é discretizado em N elementos. Assume-se uma distribuição constante das variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ ao longo dos elementos em que o contorno foi discretizado.

Assim, da Equação (9) pode-se escrever

$$\frac{1}{2} \phi_j(\vec{r}') + \sum_{j=1}^N \phi_j(\vec{r}') \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} d\vec{\Gamma}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \int_{\Gamma_j} u^*(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{\Gamma}(\vec{r}) \quad (12)$$

As integrais $\int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma$ e $\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$ são chamadas de coeficientes de influência, pois relacionam a influência da solução no ponto P , quando a solução fundamental é integrada sobre o elemento Q . Renomeando as integrais, tem-se

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (13)$$

e

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \quad (14)$$

onde i representa o ponto de colocação e j o elemento em consideração a ser integrado. Assim a Eq.(12) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \phi_j(\vec{r}') + \sum_{j=1}^N \phi_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} G_{ij} \quad (15)$$

Denominando H_{ij} por

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{para } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{para } i = j \end{cases} \quad (16)$$

pois $\phi(\vec{r}')$ é zero para os elementos que não contém a singularidade e um para os que contém. Assim, chega-se a seguinte equação

$$\sum_{j=1}^N \phi_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (17)$$

em que $\frac{\partial \phi}{\partial n} = q = 1$ (condição de Neumann) conforme definido anteriormente. No caso mais

geral, as variáveis u^* e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ são aproximadas por funções de interpolação da forma

$$\phi(Q) = \sum_{m=1}^E \phi_m N_m(Q) \quad (18)$$

onde E representa o grau da função interpoladora. Assume-se que a posição do nó i também varia de 1 a N . Assim, a solução fundamental é aplicada em cada nó, o que possibilita verificar a influência de todos os outros elementos no nó da singularidade e dele nele mesmo, obtendo-se um sistema de equações expresso na forma matricial, para cada ponto do contorno, como segue

$$H\vec{\phi} = G\vec{q} \quad (19)$$

em que H e G são duas matrizes $N \times N$, e $\vec{\phi}$ e $\vec{q}$ são vetores de comprimento N .

Inserindo-se todos os elementos das matrizes H e G correspondentes às condições de contorno desconhecidas do lado esquerdo e aqueles correspondentes às condições de contorno conhecidas do lado direito, e multiplicando as matrizes do lado direito, forma-se o seguinte sistema de equações:

$$A\vec{y} = \vec{b} \quad (20)$$

em que $\vec{y}$ é o vetor dos valores de contorno desconhecidos de $\vec{\phi}$ e $\vec{q}$. O vetor $\vec{b}$ é encontrado multiplicando as colunas correspondentes de H ou de G pelos valores conhecidos de $\vec{\phi}$ e $\vec{q}$. É interessante notar que as variáveis podem ser uma mistura dos potenciais e suas derivadas. Após a resolução no contorno é possível calcular qualquer valor interno do potencial ou de sua derivada.

1.6 Resultados da Simulação Numérica

A partir da formulação numérica apresentada, foi realizada uma implementação a partir do software MATLAB e os resultados obtidos foram comparados com os resultados numéricos obtidos Papini (1999).

Tabela 1. Comparação de resultados numéricos

Frequência (Hz)	Numérico Papini	Numérico (Implementada)	Erro absoluto	Erro relativo
62,5	0,770955817	0,771765586	-0,000809769	-0,001050344
125	0,419302101	0,425843833	-0,006541732	-0,015601477
250	0,215899747	0,216669203	-0,000769456	-0,00356395
500	0,108885018	0,107506492	0,001378526	0,012660383

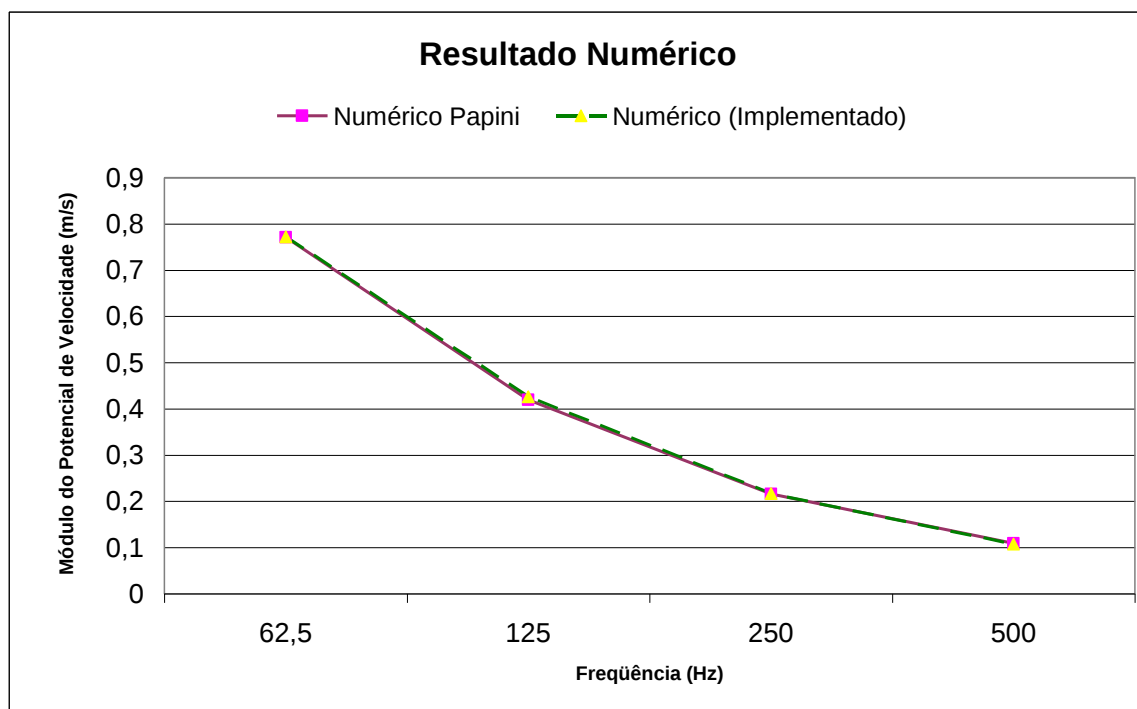


Figure 2. Resultado da Simulação Numérica

Os resultados numéricos apresentados são satisfatórios quando comparados com os valores obtidos por Papini (1999) e o erro absoluto apresentado deve-se ao fato do tratamento da singularidade encontrada na solução da diagonal da matriz G do sistema linear.

1.7 Conclusão

A formulação analítica do problema de radiação acústica de um cilindro infinito pulsante foi realizada neste trabalho, onde foi obtida a solução para o caso em que a superfície do cilindro está vibrando uniformemente na direção radial com uma amplitude de V_0 metros por segundo, numa frequência de f hertz. A solução analítica foi implementada e comparada com os valores encontrados por Papini (1999), onde se observou que os resultados foram bastante satisfatórios.

Foi realizado o estudo da formulação numérica do mesmo problema, através do Método dos Elementos de Contorno (MEC). A formulação direta do MEC escolhida para a solução da Equação de Helmholtz, utilizando elementos de contorno lineares. Nessa formulação do MEC, foi obtida a equação integral de contorno para a equação que descreve o problema da radiação acústica de um cilindro infinito pulsante. O desenvolvimento matemático das integrais de contorno, através do MEC, às vezes, não é tão fácil. As dificuldades estão relacionadas com as soluções fundamentais requeridas nessa formulação que envolvem as Funções de Hankel e Bessel.

A solução numérica, através do método direto do MEC foi obtida satisfatoriamente, se comparada com a literatura. O erro apresentado foi pequeno, comparado com a literatura, e deve-se ao fato do tratamento da singularidade apresentada pela função de Hankel. Um melhor tratamento desta singularidade fica apresentado como sugestão para trabalhos futuros.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o apoio financeiro dado pelo CEFET-MG, através da Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação – DPPG e pela FAPEMIG, que permitiu a minha participação no CILAMCE 2017.

REFERENCES

- Brebbia, C.A., Domingues, J.(1989). “*Boundary Elements Na Introductory Course*”. Southampton - Boston: Computational Mechanics Publications.
- Brebbia, C. A., Walker, S.(1980). “*Boundary Element Techniques in Engineering*”. London.
- Chertock, George. (1964). “*Sound Radiation from Vibrating Surfaces*”, The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 36, Número 7, Páginas 1305 – 1313.
- Ciskowski, R.D., Brebbia, C.A. (1991).“*Boundary Element Methods in Acoustics*”. Southampton-Boston: Computational Mechanics Publications.
- Debain, E.P., Trevelyan, J., Bettess, P.(2004). “*Wave Boudary Elements: a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves*”. Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 28, Issue 2, Pages 131-141
- Kinsler, L.E., Frey, A.R., Coppens, A.B., Sanders, J.V.(2000). “*Fundamentals of Acoustics*”. New York: John Wiley & Sons.
- Papini, G. S.(1999). “*Estudo Numérico de Barreiras Acústicas*”. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte - Brasil.

Yoon, W.S., Park, J.M., Eversman, W. (1990). "Two- Dimensional radiation and scattering at short wave length, *Journal of Vibration and Acoustics*", V. 112.

Ziomek, L.J. (1995) "*Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing*". Boca Raton: CRC Press.