



COMPORTAMENTO GEOMETRICAMENTE EXATO DE CABOS ESPACIAIS CONSIDERANDO O EFEITO DA TEMPERATURA

Rodrigo Sernizon Costa

Armando Cesar Campos Lavall

rsernizon@dees.ufmg.br

lavall@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - Belo Horizonte, CEP 31270-901, Minas Gerais, Brasil

Renata Gomes Lanna da Silva

Ricardo Hallal Fakury

rglanna.silva@gmail.com

fakury@dees.ufmg.br

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Av. Amazonas, 5.253, Nova Suíça, Belo Horizonte, MG, Brasil. CEP: 30.421-169, Minas Gerais, Brasil

Resumo. *Este trabalho tem por objetivo analisar o comportamento geometricamente exato de estruturas de cabo espacial, via método dos elementos finitos, considerando a implementação da configuração inicial do cabo catenária. Para isso, foi feito o estudo de uma formulação geometricamente exata considerando-se as não linearidades, geométrica e do material, e o efeito da variação uniforme da temperatura. Na formulação numérica tridimensional para a análise estática de estruturas de cabos foi considerada uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento de cabo. Nesse estudo o campo de deformação do elemento considera além do efeito das forças axiais a variação uniforme da temperatura. Finalmente, apresenta-se exemplo da literatura onde os resultados obtidos pelo programa desenvolvido considerando-se a formulação apresentada, são comparados com resultados obtidos por diversos autores, visando demonstrar a eficiência e precisão da formulação.*

Palavra-chave: *Comportamento geometricamente exato, Estruturas de cabos espaciais, Cabo Catenária, Efeito da temperatura.*

1 INTRODUÇÃO

Os cabos são elementos estruturais utilizados em diferentes tipos de estruturas como, pontes pênséis, teleféricos, torres estaiadas, coberturas, entre outras. O estudo do comportamento dos cabos envolve uma formulação matemática mais elaborada, devido ao seu comportamento não linear, geométrico e material.

O estudo analítico dos cabos é realizado assumindo-os perfeitamente flexíveis e inextensíveis, isto é, o momento fletor em suas seções são nulos e o cabo tem o mesmo comprimento antes e depois da aplicação da carga, respectivamente. Dessa forma, os cabos são capazes de resistir a somente a forças normais de tração e a geometria deformada permanece fixa e o cabo ou cada segmento do cabo pode ser tratado como corpo rígido.

Esse trabalho tem por objetivo apresentar uma formulação geral, via método dos elementos finitos, visando à análise avançada de estruturas de cabos espaciais considerando as não linearidades, geométrica e material, o efeito da variação uniforme da temperatura e sua implementação computacional considerando a obtenção da sua configuração inicial através do cabo catenária.

2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA OS CABOS

Os cabos assumem formas que dependem do tipo de carregamento atuante sobre o mesmo. As situações de carregamentos podem se dar através de cargas concentradas, cargas distribuídas parcialmente ou ao longo do vão do cabo e carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento do cabo (peso próprio). As configurações iniciais de equilíbrio do cabo, parabólica e catenária, ocorrem para carga uniformemente distribuída ao longo do vão e para o carregamento de peso próprio, respectivamente.

Considerando-se as hipóteses citadas e baseando-se em Irvine (1975) e (1981), Süsskind (1987), Leonard (1988), Beer *et al.* (2006) e Hibbeler (2011), é apresentado a seguir um estudo analítico conciso dos cabos suspensos para obtenção da configuração inicial de equilíbrio (cabo catenária), visando a implementação computacional.

O cabo ilustrado na Fig. 1 é submetido ao carregamento de peso próprio ao longo de seu comprimento, $p(x)$, fixado em dois pontos A e B, cujo vão é identificado por L ; x_v é a distância do ponto A ao vértice da curva do cabo; θ_A é a inclinação do cabo no ponto A; f_v é a flecha máxima no vértice da curva; θ_B é a inclinação do cabo no ponto B e h o desnível entre os pontos de fixação do cabo.

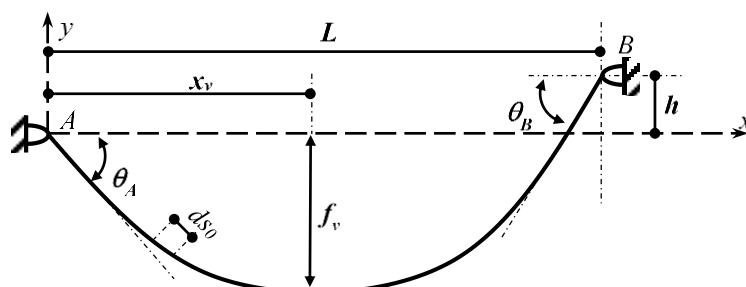


Figura 1. Configuração inicial do cabo sujeito ao peso próprio

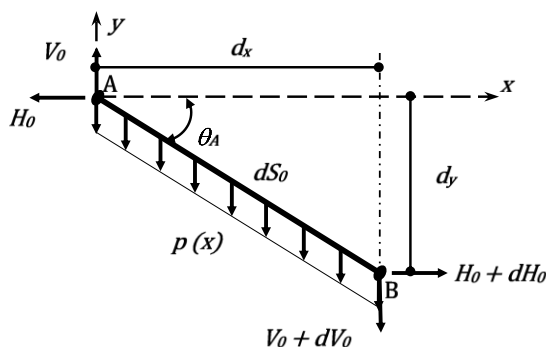


Figura 2. Diagrama de corpo livre de um elemento de cabo sujeito ao peso próprio

Considerando-se um elemento infinitesimal do cabo com comprimento, ds_0 , mostrado na Fig. 1 e 2, e utilizando-se as equações de equilíbrio, após integração e aplicação das condições de contorno da estrutura, obtêm-se a equação da tangente à curva do cabo, Eq. (1), e a Eq. (2) que define a configuração de equilíbrio inicial do cabo catenária.

$$y' = \sinh \left\{ -\frac{p}{H_0} x + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} \quad (1)$$

$$y = -\frac{H_0}{p} \left\{ \cosh \left\{ -\frac{p}{H_0} x + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} - \cosh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} \quad (2)$$

Em situações práticas desses tipos de problemas são conhecidas algumas variáveis envolvidas nas Eqs. (1) e (2), como por exemplo, o peso próprio (p), o vão (L) e o desnível (h). Dessa maneira, as variáveis incógnitas que são a força horizontal (H_0) e a tangente do ângulo θ_A serão determinadas.

Conhecido o ângulo θ_A se faz necessário determinar a força horizontal (H_0) dada por:

$$h = -\frac{H_0}{p} \left\{ \cosh \left\{ -\frac{pL}{H_0} + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} - \cosh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} \quad (3)$$

sendo que a força horizontal (H_0) será determinada por tentativas.

Após obtenção da força horizontal (H_0) são utilizadas as Eqs. (1) e (2) para se determinar a configuração de equilíbrio do cabo catenária.

O comprimento do cabo (S_0) pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$S_0 = -\frac{H_0}{p} \left\{ \sinh \left\{ -\frac{pL}{H_0} + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} + \sinh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} \quad (4)$$

A força de tração no cabo (T) é determinada pela Eq. (5), sendo que varia continuamente em intensidade e direção ao longo da sua extensão.

$$T = H_0 \cosh \left\{ -\frac{p}{H_0} x + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} \quad (5)$$

Quando não se conhece o ângulo θ_A , mas é conhecida a abscissa do vértice (x_v) ou a flecha do vértice (f_v), a tangente do ângulo θ_A é determinada através das equações:

$$\tan(\theta_A) = \sinh \left(\frac{p}{H_0} x_v \right) \quad (6)$$

$$\tan(\theta_A) = \frac{p}{H_0} \left(\sqrt{f_v^2 + \frac{2H_0}{p} f_v} \right) \quad (7)$$

Portanto, obtido o ângulo θ_A , calcula-se a força horizontal (H_0) por tentativas a partir da Eq. (3). Com a força horizontal (H_0) determinam-se a configuração de equilíbrio do cabo pela Eq. (2), o comprimento do cabo (S_0) pela Eq. (4) e a força de tração (T) ao longo do cabo utilizando a Eq. (5).

Quando se tem apoios A e B nivelados, $h = 0$ (Fig. 1), a força horizontal H_0 é dada por:

$$H_0 = \frac{pL^2}{2 \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]} \quad (8)$$

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA OS CABOS

A formulação foi baseada em Lavall (1996), sendo a teoria desenvolvida considerando uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada utilizando-se a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes de rigidez dos elementos de cabo espacial.

Essa formulação permite que os nós apresentem grandes deslocamentos e os elementos de cabos admitam grandes alongamentos e, além disto, que esses elementos possam ser constituídos de material elastoplástico e considerar tanto o comportamento não linear geométrico (NLG) quanto não linear material (NLM).

3.1 Deformações e tensões

Considerando-se uma análise teórica consistente em mecânica dos sólidos e estruturas, as medidas de tensões e deformações devem ser conjugadas e objetivas, segundo Bathe (1982, 1996) e Pai e Nayfeh (1994). Neste trabalho são adotadas as deformações e tensões de engenharia que formam um par conjugado, dadas por:

$$\varepsilon = \frac{l_c - l_r}{l_r} \quad (9)$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (10)$$

onde l_c é o comprimento do elemento na configuração corrigida, l_r é o comprimento do elemento na configuração de referência, N é a força normal e A_r é a área da seção transversal da fibra.

3.2 Sistema de coordenadas e graus de liberdade

O desenvolvimento teórico é baseado em uma formulação Lagrangiana, onde o sistema de referência global adotado é o sistema de coordenadas cartesiano (X, Y, Z). O sistema local é o sistema de coordenadas corrotacional (x, y, z) diferente do sistema global de referência. Esse sistema está ligado ao elemento, no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada. Trata-se, portanto, de um sistema de referência móvel que acompanha a estrutura deformada.

Um elemento de cabo, no sistema corrotacional, apresenta somente deslocamento ao longo do seu próprio eixo, assim o grau de liberdade natural ou corrotacional (q_α), pode ser definido por:

$$q_1 = l_c - l_r \quad (11)$$

Os graus de liberdade cartesianos p_n ($n = 1$ a 6) podem ser definidos pelo vetor de deslocamentos nodais do elemento de extremidade j e k (ver Fig. 3), dado por:

$$\mathbf{p}_n^T = \{u_j \quad v_j \quad w_j \quad u_k \quad v_k \quad w_k\} \quad (12)$$

Ao se adotar o sistema local de coordenadas corrotacionais no desenvolvimento da formulação, pode-se garantir que as deformações e tensões de engenharia são, também, pares de medidas de deformações e tensões objetivas.

3.3 Cinemática do elemento e equações de equilíbrio

Conforme a hipótese de Bernoulli-Euler, o campo de deslocamento dos pontos pertencentes ao elemento fica caracterizado se os deslocamentos axiais ($\bar{u}$) e transversais ($\bar{v}$ e $\bar{w}$) dos pontos situados sobre o eixo são conhecidos. A Figura 3 ilustra o ponto P da seção transversal do elemento caracterizado pela distância d relativa ao seu eixo, cujos deslocamentos denotados por u_c , v_c e w_c no sistema corrotacional (x , y , z), podem ser escritos por:

$$u_c(x, y, z) = \bar{u}_c(x) \quad (13)$$

$$v_c(x, y, z) = \bar{v}_c(x) = 0 \quad (14)$$

$$w_c(x, y, z) = \bar{w}_c(x) = 0 \quad (15)$$

que representam são os deslocamentos longitudinal ($\bar{u}_c$) e transversais ($\bar{v}_c$ e $\bar{w}_c$) do ponto P ao longo do eixo do elemento.

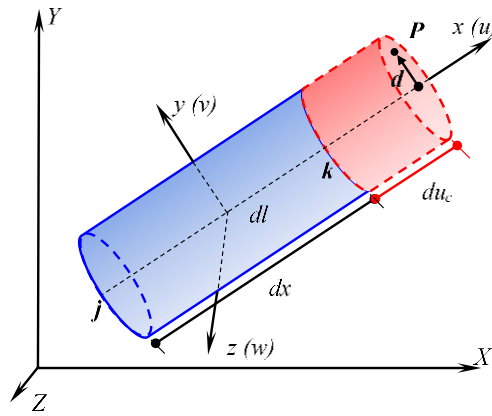


Figura 3. Deslocamento de um ponto P de uma seção genérica

Observando-se a Fig. 3, pode-se extrair do eixo do elemento um comprimento infinitesimal antes de se deformar, $d\bar{l}_r$, e depois da deformação, $d\bar{l}_c$, dados por:

$$d\bar{l}_r = dx \quad (16)$$

$$d\bar{l}_c = dx + d\bar{u}_c \quad (17)$$

A variação uniforme de temperatura provoca um deslocamento axial análogo ao produzido por uma força axial. Dessa forma, pode-se dizer que:

$$d\bar{u}_c = d\bar{u}_{cF} + d\bar{u}_{cT} \quad (18)$$

onde $d\bar{u}_{cF}$ é o deslocamento infinitesimal devido a força axial e $d\bar{u}_{cT}$ é o deslocamento infinitesimal devido a variação uniforme de temperatura.

O deslocamento infinitesimal devido à variação uniforme de temperatura pode ser obtido pela expressão:

$$d\bar{u}_{cT} = \alpha \Delta T dx \quad (19)$$

sendo que α é o coeficiente de dilatação térmica linear, ΔT a variação da temperatura e dx é o comprimento infinitesimal do elemento.

Considerando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), o trabalho virtual interno de um elemento resulta em:

$$\delta w_{int} = \int_{V_r} \sigma \delta \varepsilon dV_r = P_n \delta p_n \quad (20)$$

Conhecendo-se o campo de deformação descrito por:

$$\varepsilon = f[q_\alpha(p_n)] \quad (21)$$

Encontra-se a equação de equilíbrio do elemento que, escrita em forma matricial, é dada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \quad (22)$$

onde $\mathbf{P}$ são as forças nodais internas e $\mathbf{Q}$ são os esforços internos nas coordenadas corrotacionais.

3.4 Matriz de rigidez tangente do elemento

A matriz de rigidez tangente do elemento, $\mathbf{k}_t$, nas coordenadas cartesianas, definida pela derivada dos esforços nodais internos P_n em relação aos deslocamentos nodais do elemento p_m , é dada por:

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial P_n}{\partial p_m} \quad (23)$$

Realizando as devidas operações matemáticas obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento, dada pela equação:

$$k_{nm} = q_{\alpha,n} D_{\alpha\beta} q_{\beta,m} + q_{\alpha,n} H_{\alpha\beta} q_{\beta,m} + Q_\alpha q_{\alpha,nm} \quad (24)$$

A forma matricial da Eq. (24) é dada por:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (25)$$

4 ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O programa desenvolvido em Costa (2014) é escrito na linguagem *FORTRAN 90*, nomeado *Advanced STRUCTURAL Analysis System (ASTRAS)*, amplia o programa *PPLANLEP* desenvolvido por Lavall (1996), Almeida (2006), Araújo (2010) e Silva (2010). O *ASTRAS* permite realizar análises não lineares, geométrica e material, de estruturas como pórticos, treliça

e cabos planos e espaciais, além de estruturas conjugadas como torre estaiadas planas e espaciais.

Visando a solução de problemas não lineares de estruturas, foi utilizado o Método de Newton Raphson que considera incrementos de cargas com iterações de equilíbrio realizadas dentro de cada passo. Neste trabalho foram implementados os critérios de convergência em deslocamento e forças, simultaneamente, podendo-se também verificar a convergência somente no deslocamento ou na força, sendo o fator de tolerância igual a 0,1%.

Um aspecto importante foi a implementação da configuração inicial de equilíbrio do cabo para geração dos nós e elementos das estruturas de cabos. O ASTRAS permite utilizar as configurações iniciais de equilíbrio do cabo sujeito a carga uniformemente distribuída (cabo parábola) e do cabo sujeito ao peso próprio (cabo catenária). Para este trabalho será mostrada a implementação do cabo catenária.

A configuração inicial de equilíbrio do cabo é dada pela Eq. (2), que depende do cálculo da força horizontal, H_0 , para geração dos nós e elementos da estrutura. No estudo desenvolvido na seção 2 deste trabalho, a força horizontal (H_0) do cabo catenária é obtida somente por tentativas pela Eq. (3). Dessa forma, utiliza-se o método incremental-iterativo de Newton-Raphson para a determinação da força horizontal (H_0) através do algoritmo dado por:

$$H_0^i = H_0^{i-1} - \frac{f(H_0^i)}{f'(H_0^i)} \quad (26)$$

onde H_0^i é a aproximação da força horizontal da curva da catenária na iteração corrente, H_0^{i-1} é a aproximação da força horizontal na iteração anterior, $f(H_0^i)$ é a função resíduo da força horizontal da catenária e $f'(H_0^i)$ a sua derivada. A convergência ocorre quando o fator de tolerância for menor que $1,0 \times 10^{-10}$.

Então, conhecidos o desnível (h) e o ângulo (θ_A) utiliza-se a Eq. (3), para se obter H_0 e a configuração inicial do cabo catenária. Quando se conhece o desnível (h) e a distância do vértice (x_v) ou a flecha do vértice (f_v), é necessário calcular primeiramente o ângulo (θ_A) através da Eq. (6) para o caso que se tenha x_v e pela Eq. (7) para o caso que se tenha f_v . Com esses termos e com a força horizontal (H_0) obtém-se a configuração inicial do cabo catenária pela Eq. (2).

5 APLICAÇÃO EM EXEMPLO

Nessa seção será apresentado um exemplo numérico com objetivo de demonstrar a eficiência da formulação estudada bem como a precisão dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido, quando comparados com resultados da literatura.

A estrutura espacial ilustrada na Fig. 4 consiste de três cabos suspensos apoiados nos pontos B , C e D e suportados por uma mola vertical com rigidez $k = 1.000$ unidades (un), cujo apoio pode se deslocar no plano horizontal xz . Para uma melhor visualização da estrutura são apresentadas as coordenadas (x , y e z) dos nós: A (0, 0, 0), B (-400, -400, 0), C (400, 0, -300) e D (400, 0, 300). Os cabos 1, 2 e 3 estão sujeitos somente a carregamentos de peso próprio $w_1 = 1$ un e $w_2 = w_3 = 2$ un, comprimentos iniciais $L_1 = 580$ un e $L_2 = L_3 = 510$ un, respectivamente, apresentando seções transversais circulares com uma área $A = 1$ un, correspondendo a um diâmetro $d = 1,1284$ un.

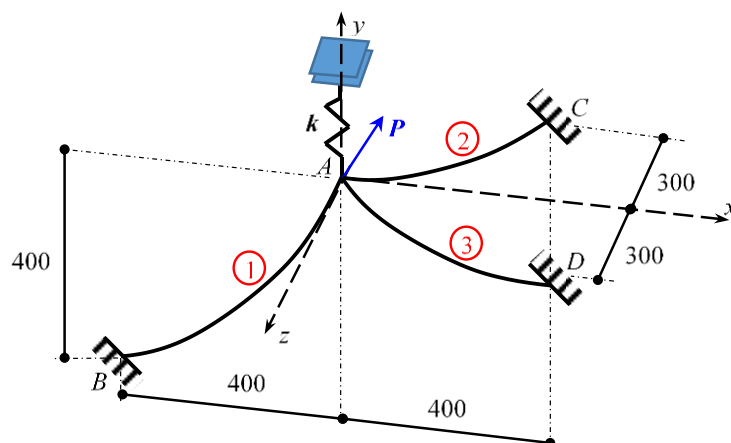


Figura 4. Estrutura espacial de cabos suspensos

A estrutura está submetida a uma força concentrada $P = 1.000$ un, aplicada no ponto A, no sentido negativo do eixo z e estará sujeita a uma variação uniforme da temperatura $\Delta T = 100$ un. O material dos cabos tem coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 6,5 \times 10^{-6}$ un e módulo de elasticidade longitudinal $E = 290.000$ un. Os cabos foram divididos em 10 elementos, cujo peso próprio foi transformado em carregamento equivalente concentrado em cada nó. As configurações iniciais de equilíbrio dos cabos foram obtidas através da equação da catenária.

Nos trabalhos de Coyette e Guisset (1988), Luo *et al.* (2005) e Yang e Tsay (2007) foram determinados os deslocamentos horizontais nas direções x e z (δ_{Ax} , δ_{Az}) e vertical na direção y (δ_{Ay}) do ponto A, considerando-se a força P sem a variação da temperatura ($\Delta T = 0$). A Tabela 1 apresenta os resultados dos diversos autores e do programa ASTRAS, onde se observa uma ótima correlação entre todos os resultados.

Tabela 1. Resultados numéricos dos deslocamentos do ponto A para $\Delta T = 0$

Pesquisadores/ Programa	δ_{Ax} (un)	δ_{Ay} (un)	δ_{Az} (un)
Coyette e Guisset (1988)	26,110	-2,890	-40,420
Luo <i>et al</i> (2005)	26,114	-2,889	-40,421
Yang e Tsay (2007)	26,083	-2,848	-40,394
ASTRAS	26,158	-2,885	-40,628

Para os trabalhos de Peyrot e Goulois (1979), Mourelle (1984), Song *et al.* (2000), Luo *et al.* (2005), Huang e Lan (2006), Yang e Tsay (2007), Such *et al* (2009) e Impollonia *et al.* (2011), além da força P foi considerada uma variação uniforme da temperatura nos cabos, $\Delta T = 100$ un. A Tabela 2 apresenta os resultados dos diversos autores e do programa ASTRAS para os deslocamentos horizontais nas direções x e z (δ_{Ax} , δ_{Az}), e vertical na direção y (δ_{Ay}) do ponto A, observando-se também uma ótima correlação entre todos resultados.

Peyrot e Goulois (1979), Mourelle (1984) e Huang e Lan (2006) apresentaram os resultados dos componentes horizontais e verticais (H_x , H_z e V_y) das forças de tração que atuam nos cabos 1, 2 e 3, relativos aos apoios A, B, C e D da estrutura. Huang e Lan (2006) apresentaram também as flechas f_{v2} e f_{v3} , para os cabos 2 e 3, respectivamente. Esses resultados, mostrados na Tabela 3

foram comparados com aqueles obtidos pelo programa ASTRAS observando-se uma ótima correlação entre eles.

Tabela 2. Resultados numéricos dos deslocamentos do ponto A para $\Delta T = 100$ un

Pesquisadores/ Programa	δ_{Ax} (un)	δ_{Ay} (un)	δ_{Az} (un)
<i>Peyrot e Goulois (1979)</i>	26,473	-2,874	-41,135
<i>Mourelle (1984)</i>	26,471	-2,873	-41,150
<i>Song et al. (2000)</i>	26,020	-2,940	-37,580
<i>Luo et al. (2005)</i>	26,474	-2,874	-41,143
<i>Huang e Lan (2006)</i>	26,471	-2,874	-41,138
<i>Yang e Tsay (2007)</i>	26,443	-2,834	-41,116
<i>Such et al. (2009)</i>	26,527	-2,883	-41,105
<i>Impollonia et al. (2011)</i>	26,471	-2,875	-41,138
ASTRAS	26,515	-2,869	-41,345

Tabela 3. Resultados dos componentes H_x , H_z e V_y das forças de tração nos nós em todos os cabos e flechas dos vértices nos cabos 2 e 3

Cabo	Descrição (un)	Peyrot e Goulois (1979)	Mourelle (1984)	Huang e Lan (2006)	ASTRAS
		$\Delta T = 100$			$\Delta T = 100$
1	H_{Ax}	1.686,0	1.685,5	1.686,4	1.680,8
	H_{Az}	-162,6	-162,7	-162,6	-162,9
	V_{Ay}	1.868,1	1.867,8	1.868,5	1.822,3
	H_{Bx}	-1.686,0	-1.685,8	-	-1.680,8
	H_{Bz}	162,6	162,7	-	162,9
	V_{By}	-1.288,1	-1.288,2	-	-1.283,1
2	H_{Ax}	-437,6	-437,3	-437,5	-435,2
	H_{Az}	303,3	303,0	303,2	301,4
	V_{Ay}	505,9	505,5	505,8	453,5
	H_{Cx}	437,6	437,3	-	435,2
	H_{Cz}	-303,3	-303,0	-	-301,4
	V_{Cy}	514,1	513,8	-	514,2
	f_{v2}	-	-	-104,16	-104,86
3	H_{Ax}	-1.248,5	-1.248,6	-1.284,8	-1.245,6
	H_{Az}	-1.140,2	-1.140,4	-1.140,5	-1.138,5
	V_{Ay}	500,1	499,8	500,1	441,7
	H_{Dx}	1.248,5	1.248,6	-	1.245,6
	H_{Dz}	1.140,2	1.140,4	-	1.138,5
	V_{Dy}	519,9	519,5	-	519,9
	f_{v3}	-	-	-39,31	-39,40

Finalmente, as Figs. 5 e 6 apresentam as saídas gráficas das configurações inicial e final de equilíbrio da estrutura para as diversas análises realizadas. A Figura 5 apresenta a deformada da estrutura no plano xy para a configuração inicial considerando os cabos descarregados, a configuração final considerando apenas o peso próprio dos cabos (w) e a configuração final considerando o peso próprio e a força concentrada ($w + P$) com variação de temperatura $\Delta T = 100$ un. A Figura 6 apresenta a deformada da estrutura no plano xz considerando-se os mesmos casos anteriores.

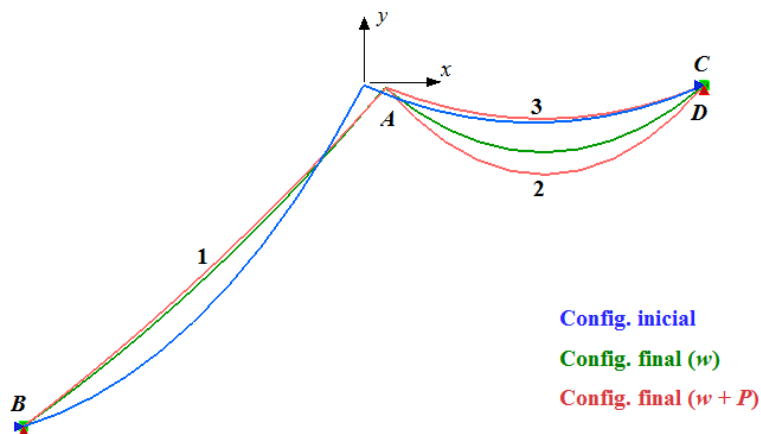


Figura 5. Deformada da estrutura espacial de cabos suspensos no plano xy

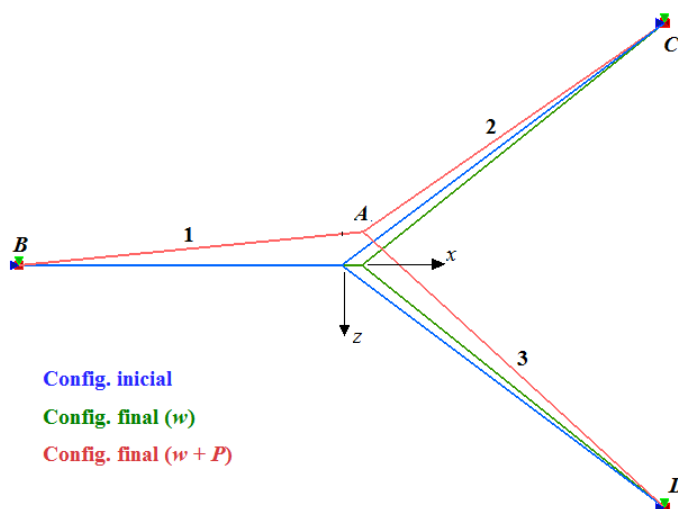


Figura 6. Deformada da estrutura espacial de cabos suspensos no plano xz

A partir da Fig. 5, que ilustra a deformada da estrutura no plano xy , pode-se observar claramente os deslocamentos horizontal δ_{Ax} e vertical δ_{Ay} do apoio de mola no ponto A, além da forma dos cabos considerando as várias situações de carregamento. A Figura 6 ilustra a deformada da estrutura no plano xz , podendo-se observar claramente os deslocamentos horizontais δ_{Ax} e δ_{Az} do apoio de mola no ponto A, além da posição dos cabos considerando as várias situações de carregamento.

6 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma formulação teórica geometricamente exata, e sua implementação computacional para a análise não linear geométrica de estruturas de cabos suspensos tridimensionais com configuração inicial em catenária, através do método dos elementos finitos.

A adoção da equação da catenária para a definição da configuração inicial de equilíbrio da estrutura mostrou-se eficiente na geração da malha de elementos finitos e na determinação da força horizontal, do ângulo máximo e da força de tração máxima no cabo, a qual é responsável pela eliminação da hipostaticidade inicial deste tipo de estrutura.

O exemplo estudado tinha como objetivo avaliar a formulação numérica desenvolvida ao se analisar a estrutura espacial formada por três cabos suspensos. As configurações iniciais de equilíbrio dos cabos foram obtidas através da equação da catenária. Os resultados dos diversos deslocamentos e dos componentes horizontais e verticais das forças de tração que atuavam nos três cabos relativos aos seus apoios, com e sem variação uniforme de temperatura, foram comparados com os resultados obtidos por diversos autores, mostrando, uma ótima correlação.

Finalmente, a aplicação do programa *ASTRAS* na análise das estruturas de cabos tridimensionais, confirma a validade e potencialidade da formulação desenvolvida e sua eficiência e aplicabilidade na solução de problemas de casos práticos.

Agradecimentos

Os autores são gratos à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e à FAPEMIG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais pelo apoio recebido para a realização deste trabalho de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Almeida, A. C. B., 2006. *Análise Inelástica de Pórticos Planos Considerando a Plasticidade Distribuída e o Efeito das Tensões Residuais nos Perfis Estruturais de Aço*. 165 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.
- Araújo, R. E., 2010. *Estudo da Influência do Encruamento do Aço e das Tensões Residuais no Comportamento Inelástico de Pórticos Planos via Análise Avançada*. 121 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.
- Bathe, K. J., 1982. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite element procedures*. (Revision of: Finite element procedures in engineering analysis, 1982). New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Beer, F. P.; Johnston, E. R; Elliot R. E., 2006. *Mecânica Vetorial para Engenheiros - Estática*. 7ªed. Rio de Janeiro. Mac Graw-Hill Interamericana do Brasil.
- Costa, R. S., 2014. *Formulação para a Análise Avançada de Sistemas Estruturais Formados por Cabos e Treliças Espaciais Visando à Aplicação em Torres Estaiadas para Linhas de*

Transmissão. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Coyette, J. P.; Guisset, P., 1988. Cable network analysis by a nonlinear programming technique. *Eng. Struct*, v. 10, p. 41-46.

Hibbeler, R. C., 2011. *Estática: Mecânica para Engenharia*. 12^a ed. São Paulo. Pearson Prentice Hall.

Huang, Y.; Lan, W., 2006. Static analysis of cable structure. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 27, n°10, p. 1425-1430.

Impollonia, N., Ricciardi, G. and Saitta F., 2011. Statics of elastic cables under 3D point forces. *International Journal of Solids and Structures*, v 48, p. 1268-1276.

Irvine, H. M., 1975. Statics of suspend cables. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 101, n° 3, pp. 187-205.

Irvine, H. M., 1981. *Cable structures*. Cambridge Ma./London, The MIT Press.

Lavall, A. C. C., 1996. *Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.

Leonard, J.W., 1988. *Tension Structures: behavior and analisys of cable structures*. New York. McGraw Hill.

Luo, X. H.; Xiao, R. C.; Xiang, H. F., 2005. Cable element based on exact analytical expressions, *J. Tongji Univ. (Nat. Sci.)*, v. 33, n° 4, p. 445-450.

Mourelle, M. M. *Análise de Estruturas Marítimas e Sistemas Flexíveis Constituídos por Cabos*. 1984. p. 139. Dissertação de Mestrado. COPPE. Universidade de Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

Pai, P. F., Nayfeh, A. H., 1994. A new method for the modeling of geometric nonlinearities in structures. *Computer and Structures*, v. 53, n ° 4, p. 877-895.

Peyrot, A. H.; Goulois, A. M., 1979. Analysis of cable structures. *Computers and Structures*, v.10, p. 805-813.

Silva, R. G. L, 2010. *Análise Inelástica Avançada de Pórticos Planos de Aço Considerando as Influências do Cisalhamento e de Ligações Semirrígidas*. Tese de Doutorado. p. 292. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Song, H.; Yanli, H.; Zhaomin, W., 2000. Nonlinear analysis of flexible cable structures using the finite element method [J]. *Engineering Mechanics*, v. 17, n° 2, p. 36-43.

Such, M.; Jimenez-Octavio, J. R.; Carnicero, A.; Lopez-Garcia, O., 2009. An approach based on the catenary equation to deal with static analysis of three dimensional cable structures. *Engineering Structures*, v. 31, n° 9, p. 2162-2170.

Süssekind, J. C., 1987. *Curso de analise estrutural*. 8°. ed. Rio de Janeiro: Globo.

Yang, Y. B.; Tsay, J. Y., 2007. Geometric nonlinear analysis of cable structures with a two-node cable element by generalized displacement control method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 7, n° 4, p. 571-588.