



MODELAGEM NUMÉRICA PARA FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS UTILIZANDO O MODELO BINGHAM-PAPANASTASIOU E O MÉTODO MOVING PARTICLE SEMI-IMPLICIT (MPS)

Maurilio Santos da Mata

Fabio Kenji Motezuki

Liang-Yee Cheng

Fernando Akira Kurokawa

maurilio.mata@usp.br

fmote@usp.br

cheng.yee@usp.br

fernando.kurokawa@poli.usp.br

Departamento de Construção Civil, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo

Av. Almeida Prado, Trav. 2, Ed. Engenharia Civil, 05508-900, São Paulo, SP, Brasil

Resumo. O desenvolvimento de abordagens numéricas para simulação do comportamento de fluidos não newtonianos é um tema de suma importância com diversas aplicações na engenharia, como por exemplo, na construção civil, com o escoamento do concreto fresco e o deslizamento de material particulado. Dado o alto custo dos ensaios experimentais e limitação dos estudos analíticos, vê-se na simulação numérica uma ferramenta para investigar o comportamento do escoamento de fluidos não newtonianos. Neste contexto, este trabalho apresenta uma modelagem numérica para fluidos não newtonianos utilizando o modelo de Bingham-Papanastasiou e o método Moving Particle Semi-Implicit (MPS) para investigar o escoamento entre duas placas planas paralelas e problema dam-break. O MPS é um método para simulação de escoamentos incompressíveis onde o domínio é discretizado utilizando partículas e as equações governantes são resolvidas substituindo os operadores diferenciais por operadores derivados de um modelo de interação entre essas partículas. A validação da abordagem numérica é feita comparando os resultados das simulações com os resultados analítico, numérico e experimental já publicados na literatura. Os resultados mostraram ser satisfatórios e consistentes.

Palavras-chave: Fluido não newtoniano, Simulação Computacional, Método de Partículas, Fluido de Bingham, Regularização de Papanastasiou

1 INTRODUÇÃO

Dentre os diversos problemas surgidos na comunidade científica, o escoamento de fluidos não newtonianos vem atraindo a atenção de um grande número de pesquisadores. O estudo fluido não newtoniano vem crescendo nos últimos anos devido à grande utilização desse tipo de fluido em diversas atividades econômicas. Eles estão presentes desde a indústria alimentícia, como polpas de frutas concentradas, *ketchup* e maionese; na engenharia de petróleo, com os fluidos de perfuração até a engenharia civil, com o concreto fresco e deslizamento de material particulado.

Porém, devido a reologia complexa dos fluidos não newtonianos, a análise do seu comportamento torna-se um grande desafio pois é de difícil análise, por apresentar uma relação não linear entre tensão e taxa de deformação, conduzindo a viscosidade aparente variável no espaço. Apesar dessas dificuldades, é possível encontrar trabalhos em diferentes áreas que estudam o comportamento de fluidos não newtonianos. Kim *et al.* (2016) simulam o escoamento de sangue composto por uma mistura de plasma e hemácias, dentro de micro canais. Cremonesi *et al.* (2010) apresentam resultados sobre o comportamento de massas cimentícias em *slump*, *mini-slump* e caixa L, por meio de ensaios numéricos. Bouvet *et al.* (2010) fazem o ensaio *mini-slump* em pastas de cimento. Ferreira *et al.* (2008) aplicaram o estudo reológico na indústria de alimentos através da análise do efeito da temperatura no comportamento reológico da polpa de cupuaçu integral. Todos esses trabalhos utilizam descrição euleriana na qual a discretização do domínio é feita através de malhas. Entretanto, eles possuem limitações quando usados em casos com descontinuidades, geometrias complexas ou grandes deformações.

Para lidar com essas dificuldades, os métodos baseados em partículas vêm sendo muito utilizados para esses tipos de problemas. Neles, o domínio é discretizado em partículas com descrição lagrangeana, e os cálculos são feitos em função das propriedades das partículas. O fato de não haver o uso de malhas, favorece o estudo de fenômenos envolvendo de escoamentos com superfícies livres, além de casos em que ocorre fragmentação e segregação. Destacam-se alguns trabalhos baseados em partículas, como exemplos, Mechtcherine *et al.* (2009) que aplicam o método *Discrete Element Method* (DEM) no escoamento de concreto auto-adensável em problemas como o *slump test*, Caixa L e *J-Ring*. Hughes *et al.* (2009) que fazem um estudo de *sloshing* voltado à indústria de alimentos, tratando especificamente de fluidos newtonianos com alta viscosidade e também de fluidos não newtonianos utilizando o método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH). Pereira *et al.* (2013) investigaram o comportamento dos fluidos não newtoniano em problemas bidimensionais e Motezuki *et al.* (2015) apresentaram a modelagem tridimensional de fluidos não newtonianos, os quais ambos aplicaram o modelo reológico de Bingham (Bingham, 1922) e utilizaram o simulador baseado no método *Moving Particle Semi-implicit* (MPS).

Visando dar continuidade aos trabalhos de Pereira *et al.* (2013) e Motezuki *et al.* (2015), o objetivo deste trabalho é investigar o comportamento do escoamento de fluidos não newtonianos utilizando o método MPS, mas agora, aplicando o modelo reológico de Bingham em conjunto com a regularização de Papanastasiou (Papanastasiou, 1987). Para a verificação dos resultados numéricos obtidos com MPS utilizando o modelo Bingham-Papanastasiou, realizou-se uma comparação com a solução analítica do escoamento entre placas planas paralelas. Além disso, foi realizada a validação da abordagem numérica no problema *dam*

break com o composto Carbopol 940, comparando os resultados numéricos e experimentais apresentados por Leite (2009). Por fim, como uma aplicação, realizou-se a simulação do deslizamento de material particulado em uma encosta, comparando os resultados com Vasco (2014).

2 METODOLOGIA

Neste trabalho foram adotadas hipóteses simplificadoras que o fluido não newtoniano foi modelado como sendo um material homogêneo, tendo propriedades reológicas constantes ao longo de toda sua extensão.

As simulações computacionais foram realizadas em um código baseado no método MPS, proposto por Koshizuka e Oka (1996), em desenvolvimento no Tanque de Provas Numérico (TPN), da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP).

2.1 Equações governantes

Adotando a descrição lagrangeana, as equações de conservação de massa e de momento, são dadas respectivamente por:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} (-\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{T}) + \vec{f} \quad (2)$$

nas quais ρ é a densidade do fluido, t é o tempo, $\vec{u}$ é o vetor velocidade, P é a pressão; $\mathbf{T}$ é o tensor das tensões e $\vec{f}$ é o vetor que representa as força externa.

2.2 Método de cálculo do termo viscoso

Na equação de conservação de quantidade de movimento, Eq. (2), a representação do termo viscoso é dado pelo divergente do tensor das tensões viscosas, $\nabla \cdot \mathbf{T}$, em que o tensor das tensões viscosas é dado por:

$$\mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D} \quad (3)$$

sendo η a viscosidade aparente, dada por:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}, \quad (4)$$

na qual τ é a tensão de cisalhamento e $\dot{\gamma}$, a taxa de deformação, calculada como:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}. \quad (5)$$

O tensor das taxas de deformação $\mathbf{D}$ é calculado por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [(\nabla \vec{u}) + (\nabla \vec{u})^T] \quad (6)$$

Assumindo a hipótese da incompressibilidade do escoamento e substituindo a Eq. (6) na Eq. (3), o divergente do tensor das tensões viscosas é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 2 \mathbf{D} \cdot \nabla \eta + \eta \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}. \quad (7)$$

2.3 Modelo reológico de Bingham-Papanastasiou

A principal característica dos fluidos não newtonianos é a relação não-linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação. Eles podem ser modelados por inúmeras equações constitutivas, dependendo do tipo de fluido que se quer modelar. Diversos modelos reológicos já foram concebidos pela comunidade científica, sendo o modelo Bingham um dos mais conhecidos. Este modelo é caracterizado pela existência de uma tensão de cisalhamento mínima, denominada tensão de escoamento, para que o material comece a escoar.

A equação constitutiva dos fluidos de Bingham é dada por:

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}, & |\tau| \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0, & |\tau| < \tau_0 \end{cases} \quad (8)$$

em que τ_0 é a tensão de escoamento e μ_p é a viscosidade plástica.

Caso a tensão de cisalhamento seja menor que a tensão de escoamento ($\tau < \tau_0$) não existirá escoamento, ou seja, a viscosidade de material tenderá a infinito. Além disso, este modelo apresenta uma descontinuidade no campo de deformação para valores de tensão iguais a τ_0 . Como pode-se verificar na Eq. (8), nenhuma informação acerca da distribuição de tensões pode ser obtida nas regiões materiais rígidas (Soto, 2010).

Com a intenção de resolver este problema, Papanastasiou (1987) propôs uma equação para regularização das funções viscoplásticas. Esta equação apresenta um parâmetro de regularização m , o qual, quando tende a infinito, faz com que a função viscosidade regularizada pela equação de Papanastasiou tenda à função viscosidade do modelo original de Bingham. A regularização proposta por Papanastasiou tem a grande vantagem de gerar funções de tensão de cisalhamento e viscosidade viscoplástica contínuas, válidas tanto para as regiões de escoamento como para as regiões rígidas. Essa equação regularizadora para tensão de escoamento e função viscosidade é na literatura conhecida como modelo de Bingham-Papanastasiou e é dada por:

$$\tau = \tau_0 \left(1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}\right) + \mu_p \dot{\gamma}. \quad (9)$$

A partir da substituição da Eq. (9) na Eq. (4), é possível escrever diretamente a viscosidade aparente η utilizando o modelo de Bingham-Papanastasiou:

$$\eta = \mu_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \left(1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}\right). \quad (10)$$

Tomando-se como exemplo, uma tensão de escoamento $\tau_0 = 15 \text{ Pa}$ e viscosidade plástica $\mu_p = 50 \text{ Pa.s}$, a Fig. 1 mostra as curvas utilizando a Eq. (9) com valores de m igual a 100, 200 e 1000. Observa-se que, à medida que o valor de m aumenta, as curvas do modelo Bingham-Papanastasiou aproximam-se da curva do modelo de Bingham original (Eq. (8)).

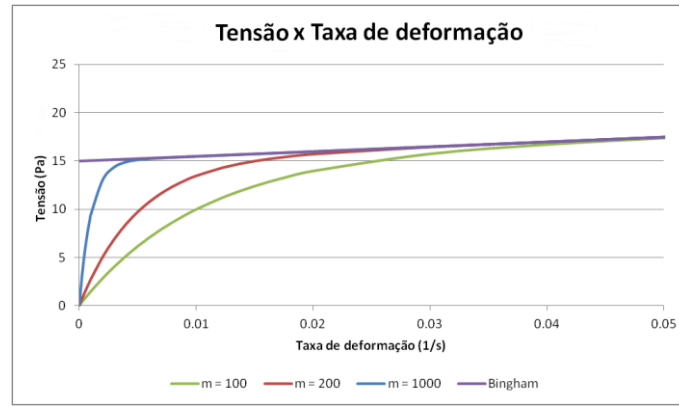


Figura 1. Comparação de um fluido com $\tau_0 = 15 \text{ Pa}$ e $\mu_p = 50 \text{ Pa.s}$ utilizando o modelo de Bingham e o modelo Bingham-Papanastasiou com valores de $m = 100, 200, 1000$

A Figura 2 mostra a relação entre a viscosidade aparente e a taxa de deformação, para o mesmo exemplo dado. Nota-se que, quanto maior o valor da constante m , maior a viscosidade aparente máxima para pequenas deformações.

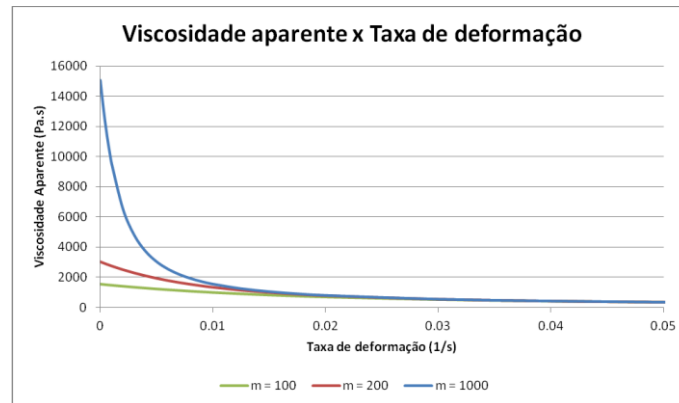


Figura 2. Aumento da viscosidade aparente com o aumento do valor de m para baixas taxas de deformação para o mesmo fluido apresentado na Fig. 1

Para materiais com tensão de escoamento, utiliza-se um adimensional denominado número de Bingham, Bi , que é a razão entre a tensão de escoamento e a tensão viscosa, definida como:

$$Bi = \frac{\tau_0 D}{\mu V_B}, \quad (11)$$

na qual D é a distância característica e V_B é a velocidade média do fluido de Bingham. Para tal, os fluidos newtonianos correspondem a $Bi = 0$, enquanto no outro extremo, um sólido teria $Bi \rightarrow \infty$.

2.4 Método numérico

O MPS é um método lagrangiano que modela o espaço por meio de partículas, resolvendo as equações governantes de conservação de massa e de quantidade de movimento, Eq. (1) e Eq. (2), respectivamente.

Nas equações governantes os operadores diferenciais são substituídos por operadores derivados a partir da ponderação das interações com as partículas vizinhas por uma função

peso, $w(r)$, que expressa a contribuição de cada partícula vizinha, com um maior peso para as partículas mais próximas do que as distantes, limitado por um raio de vizinhança, r_e . A função peso é dada por:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e - r}{r_e}, & 0 \leq r \leq r_e \\ 0, & r > r_e \end{cases}, \quad (12)$$

em que $r = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ é a distância entre duas partículas, i e j . A Figura 3 ilustra partículas j presentes na região de vizinhança de uma partícula i , no centro da região.

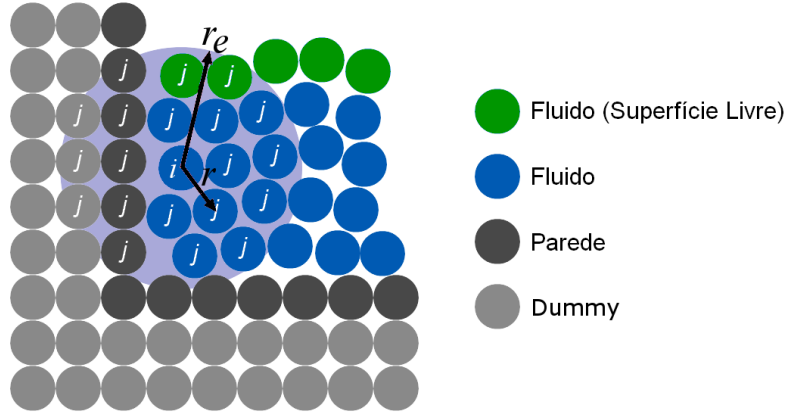


Figura 3. Representação esquemática das partículas vizinhas, j , dentro da região de influência do raio efetivo, r_e , de uma partícula i

A incompressibilidade é obtida utilizando a densidade do número de partículas (*particle number density – pnd*). Como o valor do *pnd* para uma partícula i é proporcional a quantidade e proximidade das partículas vizinhas j dentro do raio efetivo r_e , ele também é proporcional à densidade do fluido. Mantém-se incompressibilidade, portanto, mantendo o *pnd* constante ao longo do tempo, sendo que o valor inicial, pnd_0 , é baseado numa distribuição reticulada e uniforme de partículas. Define-se a densidade do número de partículas da partícula i por:

$$\langle pnd \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (13)$$

O operador gradiente de uma grandeza ϕ calculado entre uma partícula i e suas vizinhas j é dado pela Eq. (14):

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{pnd_0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{(\phi_j - \phi_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right], \quad (14)$$

na qual d é o número de dimensões do caso (2 para o caso bidimensional ou 3 para o caso tridimensional), ϕ_i e ϕ_j , são os valores nas partículas i e j respectivamente.

O operador laplaceano representa a difusão de uma grandeza ϕ de uma partícula para suas vizinhas. O operador laplaceano é dado por:

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\lambda pnd_0} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)], \quad (15)$$

em que λ é dado por:

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} |r_j - r_i|^2 w(|r_j - r_i|)}{\sum_{j \neq i} w(|r_j - r_i|)}. \quad (16)$$

O operador divergente de um campo vetorial $\vec{\phi}$, por sua vez, é dado por:

$$\langle \nabla \cdot \vec{\phi} \rangle_i = \frac{d}{pnd_0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{(\vec{\phi}_j - \vec{\phi}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right]. \quad (17)$$

Condições de contorno de parede rígida. No MPS, a técnica tradicionalmente adotada para modelar parede rígida é usar três camadas de partículas. A pressão é calculada nas partículas da primeira camada, em contato com fluido, denominadas partículas de parede, e representadas na cor cinza escuro na Fig. 4. As outras duas camadas de partículas que não estão em contato com o fluido são formadas por partículas *dummy*, que são utilizadas para complementar o cálculo do pnd e garantir o cálculo correto da pressão nas partículas de parede. As partículas *dummy* são representadas em cor cinza claro e não é necessário calcular a pressão delas.

A condição de contorno de não escorregamento (*no-slip*) é aplicada impondo-se uma velocidade tangencial nas partículas dummy. Esta velocidade tangencial na partícula dummy é calculada utilizando a componente tangencial da velocidade da partícula mais próxima da projeção da partícula dummy dentro do fluido, conforme a Fig. 4.

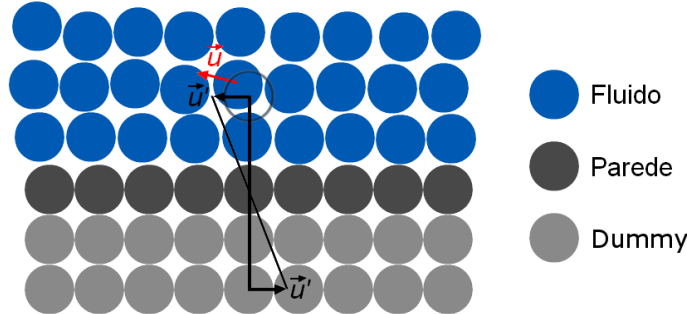


Figura 4. Representação da condição de contorno de não escorregamento (*no-slip*) junto às paredes

Condições de contorno superfície livre. Conforme mostram as partículas de cor verde na Fig. 3, quando uma partícula está na superfície livre, suas partículas vizinhas não preenchem totalmente sua região de vizinhança, e o valor do pnd é menor que pnd_0 . Sendo assim, um valor limite $\beta \cdot pnd_0$ pode ser adotado para identificar se uma partícula é ou não de superfície livre. Uma partícula i é considerada como partícula de superfície livre quando

$$pnd_i < \beta \cdot pnd_0. \quad (18)$$

Aplicando a condição dinâmica da superfície livre, a pressão de todas as partículas que satisfazem este critério é imposta como zero. De acordo com Koshizuka e Oka (1996), o valor de β adotado neste trabalho é 0,97.

Condições de contorno de periodicidade. A condição de contorno de periodicidade, representada por linhas tracejadas na Fig. 5, define que quando as partículas saem do domínio computacional, elas são reposicionadas no lado oposto do domínio com as mesmas propriedades.

O cálculo dos operadores diferenciais também considera as partículas presentes no lado oposto do domínio. Na Fig. 5, para o cálculo do operador diferencial da partícula vermelha são necessárias as partículas verdes que são uma repetição cíclica das partículas amarelas do outro lado do domínio de cálculo. O processo de repetição cíclica das partículas é tratado numericamente de forma que não há necessidade de alterações no cálculo dos operadores diferenciais.

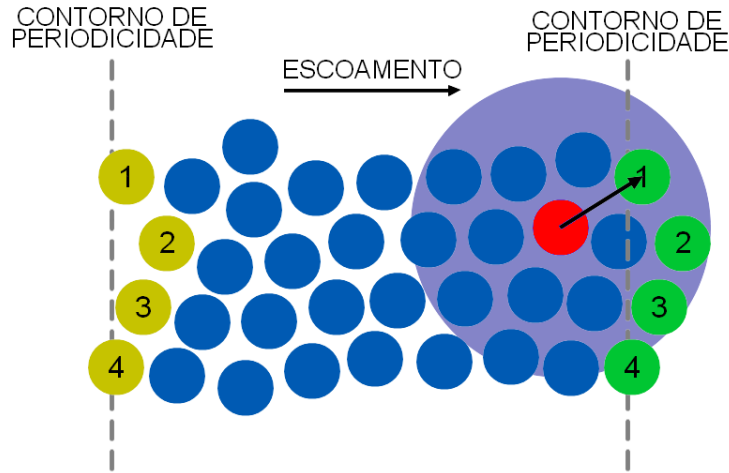


Figura 5. Representação esquemática da condição de contorno periódica representada pela linha tracejada. Os operadores diferenciais também consideram as partículas do lado oposto do domínio. (Motezuki e Cheng, 2014, adaptado)

Algoritmo. Basicamente, é possível separar o algoritmo do método MPS em duas partes. A primeira é o cálculo explícito das velocidades, posições e *pnd* das partículas através da equação da conservação da quantidade de movimento, Eq. (2), desconsiderando o gradiente de pressões. A segunda etapa é o cálculo implícito da pressão pela resolução de um sistema linear da equação de Poisson, Eq. (19), derivada da equação de conservação de massa.

$$\langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle_i = \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{\langle pnd^* \rangle_i - pnd_0}{pnd_0}, \quad (19)$$

em que pnd^* é o *pnd* estimado pela etapa explícita.

Com as pressões calculadas por meio do sistema linear, o gradiente de pressão é calculado e são realizadas as correções de posição e velocidade das partículas. A Figura 6 apresenta um diagrama simplificado das etapas do MPS.

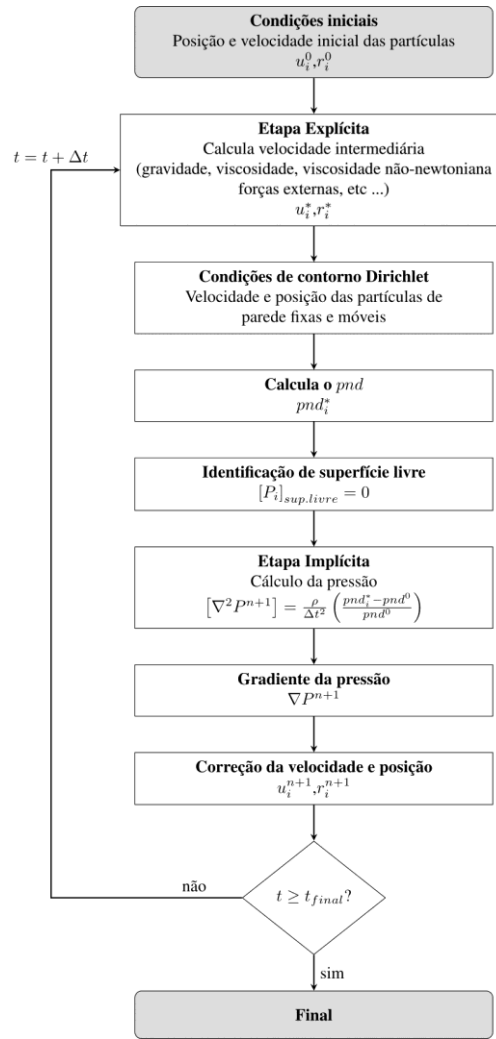


Figura 6. Algoritmo do MPS

Crítérios de estabilidade. Como condição de estabilidade para a solução numérica, tem-se a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Adaptada para a simulação por partículas, ela diz que se uma partícula se desloca a uma velocidade $\vec{u}$, a discretização de tempo e espaço deve ser tal que ela se desloque menos do que uma fração da distância inicial entre partículas, L_0 , em um passo de tempo Δt . A equação para este critério de estabilidade é dada pela Eq. (20):

$$C = \frac{|\vec{u}| \Delta t}{L_0} \leq 0,2. \quad (20)$$

Considerando a difusão viscosa, a condição de estabilidade numérica é dada pela Eq. (21):

$$\Delta t \leq \delta \frac{L_0^2}{\left(\mu_{eff} / \rho \right)}, \quad (21)$$

na qual Δt é o passo de tempo, L_0 é a distância entre as partículas, μ_{eff} é a viscosidade efetiva e δ é uma constante com valor menor que 1,0 e neste estudo foi utilizado $\delta = 0,4$.

Considerando o modelo de Bingham-Papanastasiou, foi assumido a viscosidade efetiva como sendo a viscosidade aparente máxima e, portanto, o passo de tempo escolhido para a simulação é uma função da viscosidade plástica, da tensão de escoamento e da constante m utilizada na regularização de Papanastasiou.

3 RESULTADOS

A fim de investigar o comportamento do escoamento de fluidos não newtonianos utilizando o modelo de Bingham-Papanastasiou e o MPS, foram realizadas as simulações dos seguintes casos: (a) escoamento entre placas planas paralelas na qual foi feito a comparação dos resultados numéricos com a solução analítica e, (b) problema *dam break* com o composto Carbopol 940, em que comparou-se os resultados obtidos pelo MPS com os resultados numéricos e experimentais apresentados por Leite (2009).

3.1 Escoamento entre duas placas planas paralelas

Este problema consiste no escoamento causado por um campo de aceleração constante em direção paralela às duas placas, apontando para a direita (direção x). A geometria do caso está representada na Fig. 7.

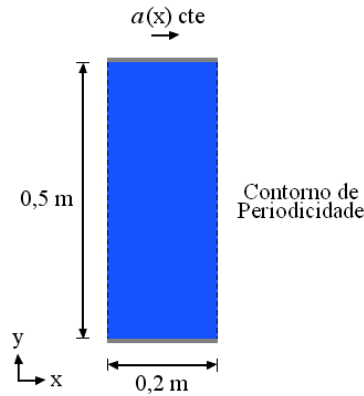


Figura 7. Geometria do escoamento entre duas placas planas paralelas

Analicamente, obteve-se o perfil de velocidades para o escoamento de um fluido de Bingham entre duas placas planas paralelas, dado por:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} y^2 - \frac{1}{\eta} \left(\frac{h}{2} \frac{dP}{dx} + \tau_0 \right) y, & 0 \leq y \leq y_{lim} \\ u_{max} = -\frac{1}{2\eta} \left(\frac{h^2}{4} \frac{dP}{dx} + h\tau_0 + \frac{\tau_0^2}{\frac{dP}{dx}} \right), & y_{lim} \leq y \leq (h - y_{lim}) \\ \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} (h - y)^2 - \frac{1}{\eta} \left(\frac{h}{2} \frac{dP}{dx} + \tau_0 \right) (h - y), & (h - y_{lim}) \leq y \leq h \end{cases} \quad (22)$$

em que u_{max} é a velocidade máxima atingida pelo fluido de Bingham que ocorre na região não tracionada, isto é, a que se comporta como sólido, y_{lim} e consequentemente $h - y_{lim}$, são as alturas de transição entre a região fluida e a região sólida. O valor de y_{lim} é dado por

$$y_{lim} = \frac{h}{2} + \frac{\tau_0}{\frac{dP}{dx}}. \quad (23)$$

Este problema é análogo ao escoamento de *Poiseuille*, no entanto, o gradiente de pressão foi substituído por um campo de aceleração paralelo às placas na direção x . Dessa forma, a magnitude do campo de aceleração é obtida por meio da equação da conservação da quantidade de movimento, (Eq. (24)):

$$\frac{dP}{dx} = -\rho a, \quad (24)$$

em que a o valor do campo de aceleração imposto ao fluido.

Para as simulações numéricas foi utilizado distância entre partículas de $5mm$. Foi utilizado um passo temporal de $2 \times 10^{-6}s$ e parâmetro de regularização m no valor de 200. Além disso, a condição de contorno de periodicidade foi aplicada nas duas extremidades (Fig 7). É importante lembrar que, para manter a estabilidade numérica da simulação, a partir da Eq. (21), há uma relação direta entre o aumento do parâmetro m e a diminuição do passo temporal, resultando em um maior custo computacional.

Os parâmetros reológicos do fluido de Bingham utilizados para este problema são: viscosidade plástica (μ_p) de $50 Pa.s$, densidade (ρ) de $2200 kg/m^3$ e tensão de escoamento (τ_0) de $15 Pa$ e $55 Pa$. Além disso, a Tab. 2 ilustra os valores adotados para aceleração (a) e seus correspondentes valores do número de Bingham (Bi) para o caso em que $\tau_0 = 15 Pa$ e $\tau_0 = 55 Pa$.

Tabela 2. Aceleração (a) e número de Bingham (Bi)

aceleração [m/s^2]	Número de Bingham (Bi)	
	$\tau_0 = 15 Pa$	$\tau_0 = 55 Pa$
0,125	1,931	85,714
0,175	1,217	4,518
0,250	0,782	5,556
0,375	0,490	2,625
0,500	0,356	1,705
1,000	0,171	-

As Figuras 8 e 9 mostram, respectivamente para $\tau_0 = 15 Pa$ e $\tau_0 = 55 Pa$, a comparação entre os resultados do perfil de velocidades obtidos pelo MPS utilizando o modelo Bingham-

Papanastasiou (em vermelho) e a solução analítica (em preto) obtida pela Eq. (22) em regime permanente, para os valores de aceleração e número de Bingham da Tab. 2.

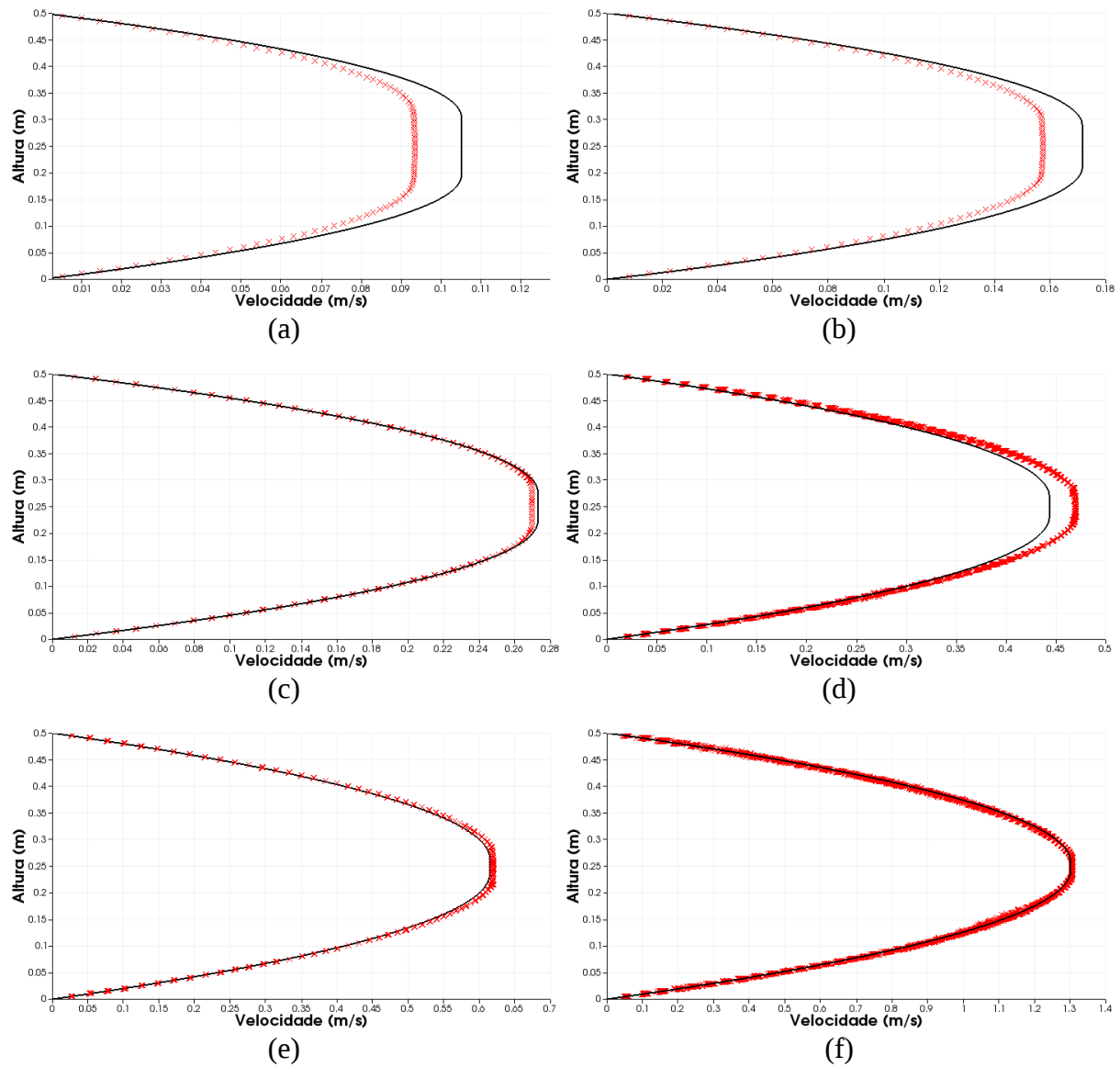
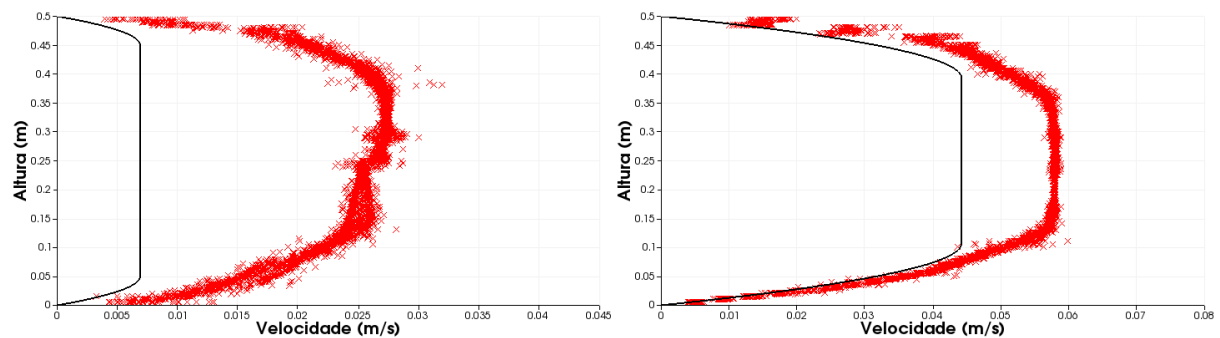


Figura 8. Perfis de velocidade obtidos para $\tau_0 = 15 \text{ Pa}$: (a) $a = 0,125 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 1,931$ (b) $a = 0,175 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 1,217$ (c) $a = 0,250 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 0,782$ (d) $a = 0,375 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 0,490$ (e) $a = 0,500 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 0,356$ (f) $a = 1,0 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 0,171$



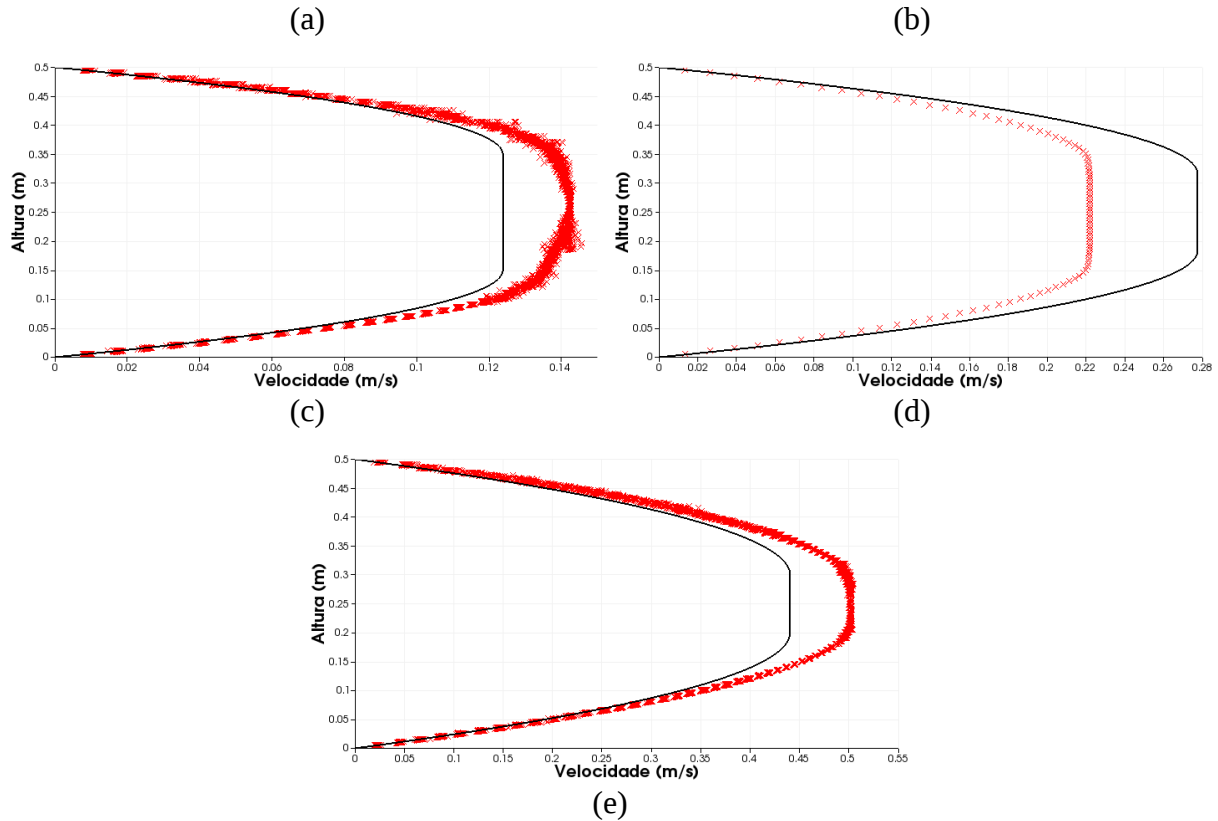


Figura 9. Perfis de velocidade obtidos para $\tau_0 = 55 \text{ Pa}$: (a) $a = 0,125 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 85,714$ (b) $a = 0,175 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 4,518$ (c) $a = 0,250 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 5,556$ (d) $a = 0,375 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 2,625$ (e) $a = 0,500 \text{ m/s}^2$ e $Bi = 1,705$

A partir dos resultados da Fig. 8 é possível notar que, o método MPS fornecem resultados coerentes com relação a solução analítica no regime permanente quando a tensão de escoamento é de 15 Pa . Observa-se ainda nessa mesma figura que, os melhores resultados obtidos com o MPS em relação a solução analítica são para números de Bingham $Bi = 0,356$ e $Bi = 0,171$ (casos (e) e (f)).

Na Fig. 9, casos em que $\tau_0 = 55 \text{ Pa}$, é possível observar que houve uma inconsistência entre os resultados obtidos pelo MPS e a solução analítica nos casos (a), (b) e (c). Estes casos apresentam número de Bingham Bi bem superior aos demais casos. Já para os casos (d) e (e), nota-se uma certa semelhança no perfil da velocidade em relação ao caso da Fig. 8(a) em que o número de Bingham desses dois casos está próximo de $Bi = 1,931$.

Com isso, é possível estabelecer uma relação entre os resultados obtidos pelo MPS e número de Bingham. Essa relação está ligada ao fato de que o fluido com número de Bingham maior possui uma tensão de escoamento maior, ou seja, uma maior parte do fluido não se cisalha e se comporta como sólido. Dessa forma, com uma região não-cisalhada maior, existe uma pequena camada cisalhada que é responsável pelo escoamento do fluido entre as placas planas, resultando em um grande gradiente de velocidade nesta camada. Assim, a resolução do modelo deve considerar esta pequena camada cisalhada de modo que o gradiente de velocidade seja calculado corretamente na direção x .

3.2 Dam Break

Este problema é caracterizado pelo colapso de um bloco de fluido com o objetivo de investigar o espalhamento horizontal do fluido e a taxa de decaimento da coluna de fluido com o tempo. Leite (2009) estudou este problema para o caso de um polímero poli acrílico do tipo poliacrilato reticulado, conhecido como Carbopol 940. Este composto é considerado como não newtoniano na qual é um modificador de reologia capaz de proporcionar alta viscosidade e formas espumantes de água limpa ou géis hidro alcoólicos e cremes. É bastante usado para a fabricação de géis que reconhecidamente possuem comportamento reológico não newtoniano.

A Figura 10 descreve a geometria da coluna de fluido (Carbopol 940) no caso 2D, com 50 cm de comprimento e 10 cm de altura, conforme Leite (2009). Inicialmente esta coluna se encontra em equilíbrio hidrostático confinada entre as paredes fixas. No instante inicial $t = 0.0$ s, a coluna começa a sofrer o efeito da gravidade e colapsa, deslizando na direção horizontal.

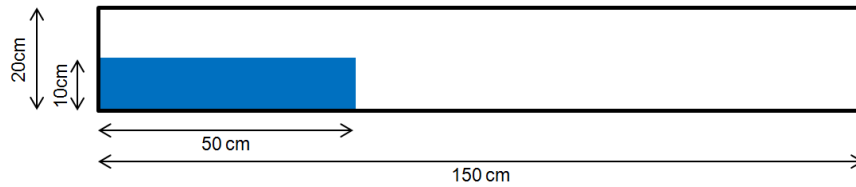
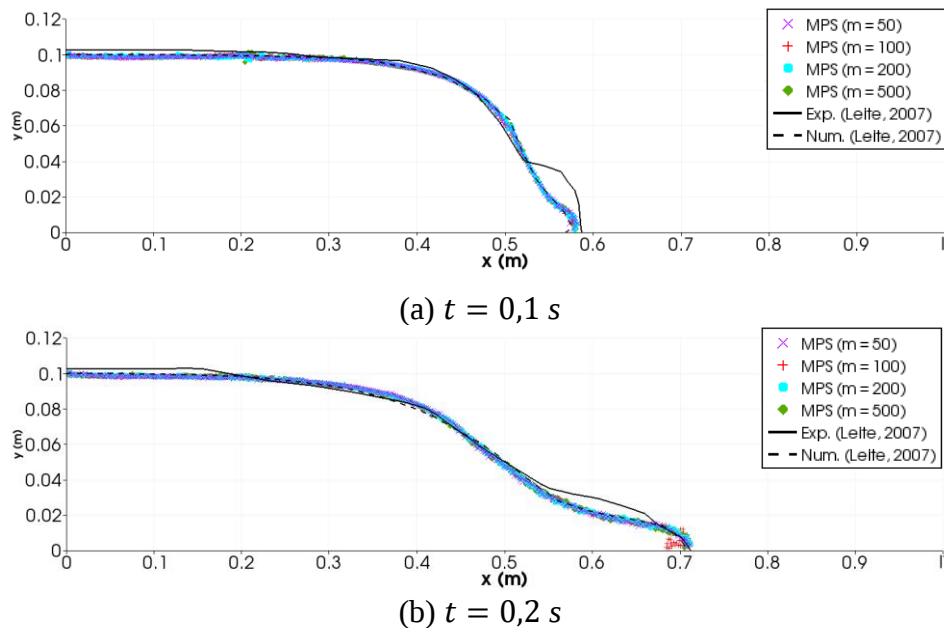


Figura 10. Geometria do Dam Break (Carbopol 940)

Os parâmetros reológicos deste composto foram obtidos por Leite (2009) para o modelo de *Herschel-Bulkley*. Entretanto, para este trabalho, foi aplicado uma regressão linear para se obter os parâmetros reológicos para o modelo Bingham, resultando em tensão de escoamento (τ_0) de 7,87422 Pa, viscosidade plástica (μ_p) de 0,124215 Pa.s e densidade (ρ) de 1000 kg/m³. Além disso, foram adotados valores para o parâmetro de regularização m iguais a 50, 100, 200 correspondendo a um passo temporal de 2×10^{-6} s e 500 com passo temporal igual a 5×10^{-7} s. A distância entre partículas nesses casos foi de 2 mm.



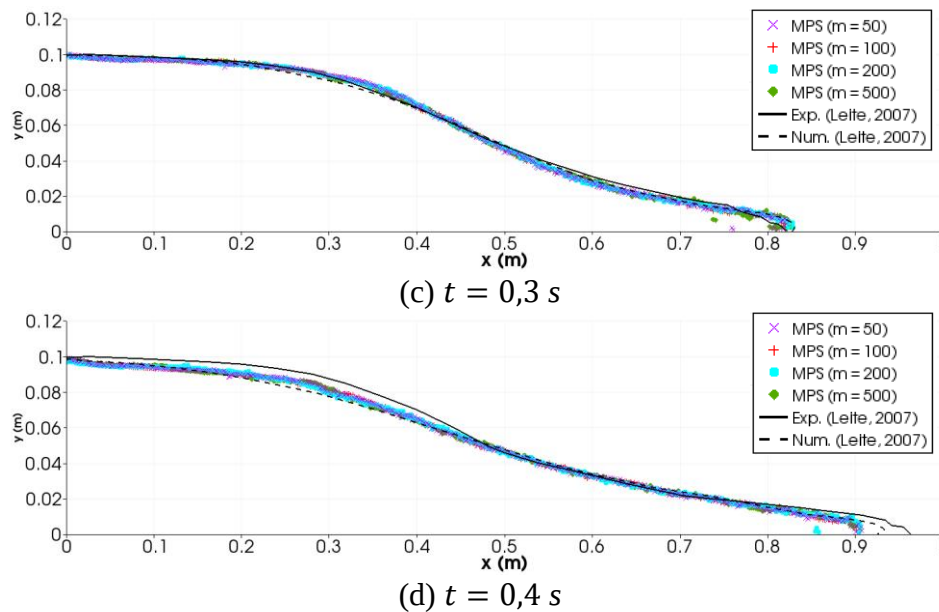


Figura 11. Comparação entre a solução numérica obtida pelo MPS para valores de m iguais a 50, 100, 200 e 500 e os dados experimentais e numéricos de Leite (2009) para a frente de onda

A Figura 11 mostra a comparação dos resultados obtidos pelo MPS aplicando o modelo Bingham-Papanastasiou para valores de m iguais a 50, 100, 200 e 500 com os dados experimentais e numéricos apresentados por Leite (2009), em quatro instantes de tempos diferentes: $t = 0,1 \text{ s}$; $t = 0,2 \text{ s}$; $t = 0,3 \text{ s}$ e $t = 0,4 \text{ s}$.

Pode-se observar a partir da Fig. 11 que os resultados obtidos pelo MPS estão em boa concordância com os dados experimentais e numéricos obtidos por Leite (2009) para a altura da coluna de fluido de 10 cm. É possível notar também que, em algumas regiões, os resultados se distanciam tanto dos resultados numéricos obtidos por Leite (2009) quanto obtidos pelo MPS. Essas diferenças provavelmente se deve a aderência do fluido na comporta e ao tempo de liberação da comporta. Além disso, nota-se que em $t = 0,4 \text{ s}$ há uma pequena divergência do espalhamento, sendo menor que o esperado.

Não houve diferenças significativas em relação aos valores do parâmetro de regularização de Papanastasiou utilizados. Este fato é devido a maior parte da geometria do fluido possui tensão de escoamento altas, isto é, onde o parâmetro m não afeta ou afeta muito pouco a relação entre taxa de cisalhamento e tensão de cisalhamento.

4 APLICAÇÃO

4.1 Deslizamento de material particulado

Um problema presente na literatura refere-se a uma onda de impacto causada pelo desmoronamento de grandes porções de terra ou rochas em águas tranquilas. Estas ondas podem ter altura maior que *tsunamis* e causar grande destruição em sua área de ação. Destaca-se o acidente em Liuya Bay, nos Estados Unidos, em 1958, ilustrado na Fig. 12, onde um desprendimento de uma rocha de aproximadamente $0,03 \text{ km}^3$, causado por um tremor, ocasionou uma onda que destruiu uma grande área florestal à sua frente.

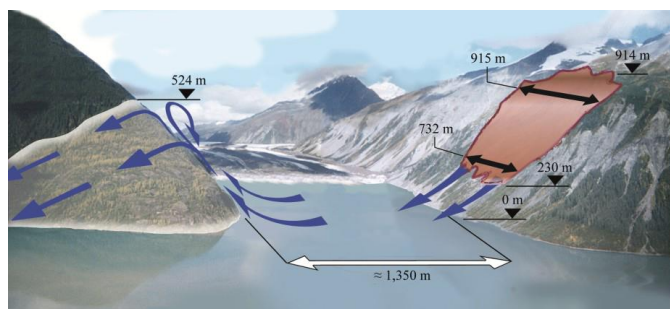


Figura 12. Figura ilustrativa do incidente em Lituya Bay, em 1958 (Heller e Hager, 2014)

Nas últimas décadas, pesquisadores têm desenvolvido métodos que estimam a altura da onda criada, estudando a transferência da energia do material deslizante, seja este rígido ou particulado, para a massa d'água. Sousa (2007) realizou o estudo experimental causado por material particulado em uma lâmina d'água. Vasco (2014) e Sakamoto (2015), modelaram o experimento por meio de SPH e MPS, respectivamente, obtendo bons resultados.

A geometria deste caso foi baseada no experimento realizado por Souza (2007) e está ilustrado na Fig. 14. Tem-se um canal de 0,30 m de largura, 0,50 m de altura e 10 m de comprimento. Como material deslizante, foram utilizadas esferas de vidro de diâmetro médio de 19,88 mm e massa específica de 2530 kg/m³. O material particulado corre sobre de uma rampa metálica com ângulo de inclinação de 30° que diminui gradativamente até o fundo do canal. Para a liberação do material na rampa, é utilizada uma comporta acionada por solenoide. O aparato descrito está ilustrado na Fig. 13.

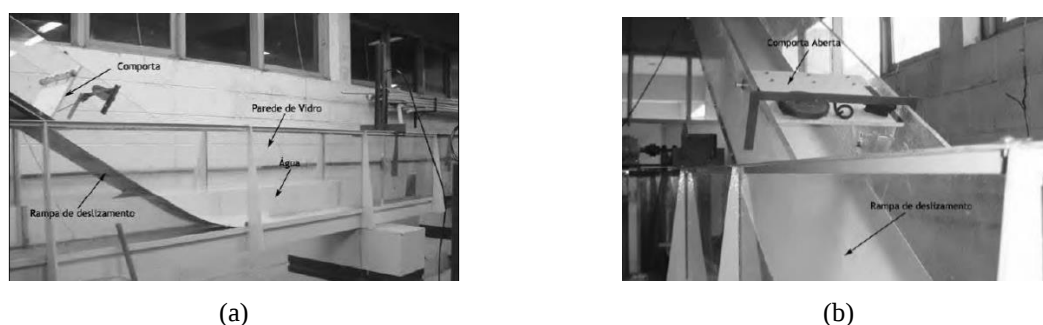


Figura 13. (a) Canal de ondas do procedimento experimental (b) Rampa de lançamento de material deslizante com comporta aberta (Souza, 2007)

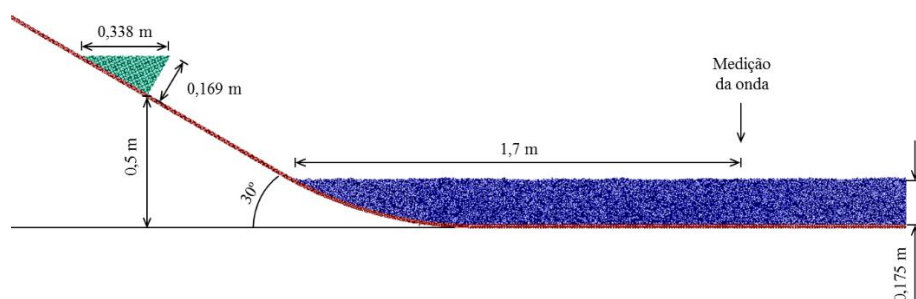


Figura 14. Geometria do caso de deslizamento de material particulado no MPS

Apesar de Sousa (2007) ter utilizado esferas de vidro, é proposto um modelo que utiliza a modelagem de fluido de Bingham-Papanastasiou, conforme indicado por Sakamoto (2015).

As propriedades reológicas do fluido são: tensão de escoamento (τ_0) de 10 Pa; viscosidade plástica (μ) de 0,00015 Pa.s e densidade (ρ) de 2350 kg/m³. A constante de regularização m utilizada neste problema foi de 200, um passo temporal de 10^{-5} s e a distância entre partículas de 5 mm.

A Figura 15 apresenta a comparação entre os resultados obtido através do MPS aplicando o modelo Bingham-Papanastasiou e os resultados obtidos por Vasco (2014) com o método SPH.

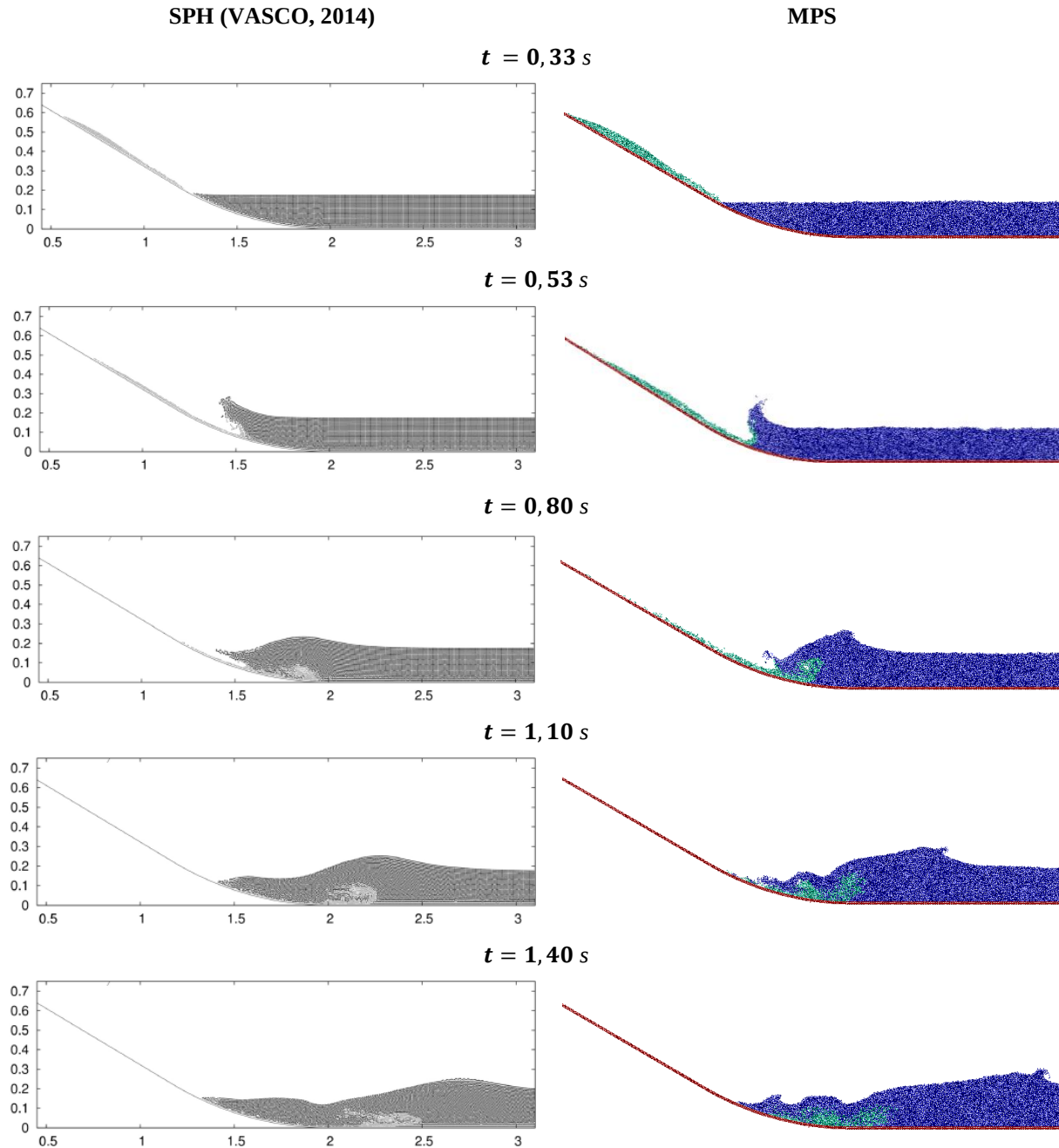


Figura 15. Comparação entre os resultados obtidos por SPH (Vasco, 2014) e MPS

A partir dos resultados da Fig. 15, observa-se que a deformação do material particulado e do fluido não newtoniano obtidas pelo MPS no instante prévio ao impacto, $t = 0,33$ s, são similares aos apresentados por Vasco (2014), o que indica que os parâmetros escolhidos para

o fluido não newtoniano se aproximam das características de escoamento do material particulado. No instante $t = 0,53$ s nota-se a imersão do material particulado no fluido não newtoniano, sendo que, o perfil de onda formado pelo não newtoniano apresenta um levantamento da ponta, o que pode indicar uma maior transferência de energia para a água. Em $t = 0,80$ s, observa-se a formação de uma onda com perfil mais veloz, distinto do obtido por Vasco (2014). Já em $t = 1,10$ s, observa-se que o fluido não newtoniano não avançou muito em relação ao instante de tempo $t = 0,80$ s mostrando que boa parte da energia foi transferida para a água. Por fim, em $t = 1,40$ s, foi observado a sedimentação do material particulado no fundo do canal.

A Figura 16 mostra a altura da superfície livre a $1,7$ m do ponto de impacto, como indica a Fig. 14. De um modo geral, o resultado obtido pelo MPS acompanha a literatura, destacando-se, entretanto, algumas questões. Nos instantes iniciais da simulação, há uma instabilidade causada pela geometria do caso. Isso ocorre, pois, em função da curva criada, as partículas de água não permanecem de forma reticulada. Além disso, há um pequeno atraso na formação da onda e o seu pico alcança uma altura maior do que a esperada de acordo com a bibliografia indicada. Isso pode ser atribuído uma transferência mais rápida de energia do fluido não newtoniano para água.

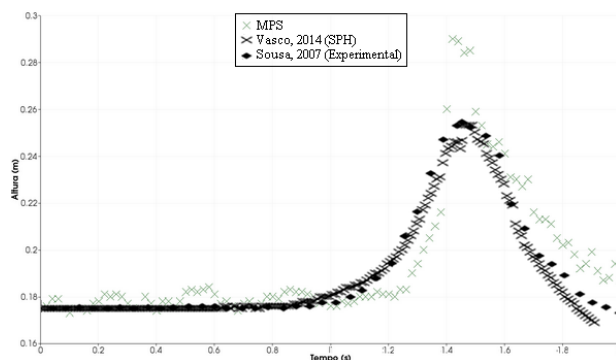


Figura 16. Altura da superfície livre medida a $1,7$ m do ponto de impacto

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos pelo método MPS aplicando o modelo reológico de Bingham-Papanastasiou forneceram resultados satisfatórios com a solução analítica para o escoamento entre duas placas planas paralelas, principalmente para os casos com um valor de Bingham baixo. É necessário ainda aprofundar um estudo sobre a relação dos valores de Bingham do escoamento e o refinamento da discretização utilizada, em função dos erros na deformação das partículas próximas às paredes.

Em relação ao problema *dam break* com o composto Carbopol 940, os resultados do MPS com o modelo Bingham-Papanastasiou apresentaram boa concordância com os obtidos por Leite (2009). Devido aos parâmetros reológicos estabelecidos para o fluido não newtoniano, percebeu-se pouca influência do valor de m nos resultados obtidos. Com o aumento do parâmetro m , as viscosidades aparentes tornam-se maiores para pequenas deformações, e para garantir a estabilidade numérica a partir da viscosidade aparente é necessário diminuir o passo de tempo, o que aumenta o custo operacional. Por outro lado, com o aumento de m , o modelo Bingham-Papanastasiou se aproxima do modelo de Bingham original.

No caso de deslizamento de material particulado, os resultados do MPS mostraram um pequeno atraso em relação aos obtidos por Vasco (2014) e Sousa (2007). No sensor de altura, foi possível notar que houve uma altura maior para o pico de onda em função do *splash* das partículas que ocorre no MPS.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Pró-Reitoria de Pesquisa da Universidade de São Paulo pelo suporte, com a bolsa de iniciação a um dos autores que desenvolveu este trabalho.

REFERÊNCIAS

- Bingham, E. C., 1922. *Fluidity and plasticity*, McGraw-Hill, New York.
- Bouvet, A., Ghorbel, E., Bennacer, R. The mini-conical slump flow test: Analysis and numerical study. *Cement and Concrete Research*, 40: 1517–1523, 2010.
- Cremonesi, M., Ferrara, L., Frangi, A., E Perego, U., 2010. Simulation of the flow of fresh cement suspensions by a Lagrangian finite element approach, *Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 166, pp. 244–252.
- Ferreira, G. M., Guimarães, M. J. de O. C., Maia, M. C. A., 2008. Efeito da temperatura e taxa de cisalhamento nas propriedades de escoamento da polpa de cupuaçu (*T. grandiflorum* Schum) Integral. *Revista Brasileira de Fruticultura*, v. 30, n. 2, pp.385–389.
- Heller, V., Hager, W. H., 2014. A universal parameter to predict subaerial landslide tsunamis? *Journal of Marine Science and Engineering*, vol. 2, pp. 400-412.
- Hughes, J. P., Carne, C., James, P. W., Graham, D. I. SPH Modelling of viscous and non-newtonian sloshing. *4th SPHERIC Workshop*, 95–101, 2009.
- Kim, J., Antaki, J. F., Massoudi, M., 2016. Computational study of blood flow in microchannels. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 292, pp. 174-187.
- Koshizuka, S., Oka, Y., 1996. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 123, pp. 421-434.
- Leite, L. O. B., 2009. *Determinação física e numérica de corridas de lama resultantes de ruptura de barreira restando material viscoplastico*. Dissertação de mestrado, FEIS-UNESP/Ilha Solteira, Brasil.
- Mechtcherine, V., Shyshko, S., 2009. Self-Compacting Concrete Simulation using Distinct Element Method. *3rd International RILEM Symposium on Rheology of Cement Suspensions such as Fresh Concrete*, pp. 171–179.
- Motezuki, F. K., Cheng, L. Y., 2014. An experiment on the numerical damping of moving particle semi-implicit (MPS) method. *Proceedings of 10th World Congress on Computational Mechanics*, vol. 1, pp. 1294–1303.
- Motezuki, F. K., Ribeiro, G. H. S., Kurokawa, F. A., Cheng, L. Y., 2015. Modelagem do escoamento tridimensional do concreto fresco utilizando o método Moving Particle Semi-Implicit (MPS). *The XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2015)*

Papanastasiou, T. C., 1987. Flows of material with yield. *Journal of Rheology*, vol. 31, pp. 385-404.

Pereira, D. S., Melo, P. S. S., Kurokawa, F. A., Cheng, L. Y, 2013. Uma modelagem numérica do escoamento do concreto fresco baseado no método Moving Particle Semi-Implicit (MPS). *The XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2013)*.

Sakamoto, H. M., 2015. *Simulação numérica de escoamento multifásico pelo método MPS*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade de São Paulo/São Paulo.

Soto, H. P., 2010. Modelagem e simulação via formulações multcampos de Galerkin mínimos-quadrados de escoamentos inerciais de fluidos de Bingham. Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ.

Souza, A. L., 2007. *Métodos analíticos, numéricos e experimentais para o cálculo de ondas de impacto em meios líquidos*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista/Ilha Solteira.

Vasco, J. R., 2014. *Geração de ondas usando técnicas numéricas lagrangeanas: estudo de casos*. Tese de doutorado, Universidade Estadual Paulista/Ilha Solteira.