



ANÁLISE COMPUTACIONAL VIA MDF DE CASCAS CILÍNDRICAS COM RESTRIÇÕES BILATERAIS E UNILATERAIS DE CONTATO

Fernando C. S. Machado[†]

McGlennon R. Régis^{*‡}

Ricardo A. M. Silveira^{*}

Christianne L. Nogueira^{*}

fernando.scheffer@ifsuldeminas.edu.br

mcglennon.regis@ifmg.edu.br

ricardo@em.ufop.br

chris@em.ufop.br

[†]Instituto Federal do Sul de Minas Gerais, Campus Pouso Alegre, Av. Maria da Conceição Santos, 900, 37550-000 Parque Real, Pouso Alegre, MG, Brasil

^{*}Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil

[‡]Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Congonhas, Av. Michael Pereira de Souza, 3007, 36415-000 Campinho, Congonhas, MG, Brasil

Resumo. As cascas cilíndricas são elementos estruturais bastante utilizados, como tubulações enterradas, estruturas de contenção de túneis e poços e depósitos de diversos materiais, na forma de silos ou tanques. Nessas aplicações, as cascas cilíndricas interagem com o meio, no caso solo ou rocha. Essa interação pode ser considerada de duas formas: quando a estrutura e o meio não perdem contato durante o processo de deformação, caracterizando, assim, o problema de contato bilateral; e quando a casca não está completamente fixa e pode perder contato com o meio para determinadas condições de carregamento, definindo, então, o problema de contato unilateral. Este trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para o estudo e análise de problemas envolvendo cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas. Essa ferramenta computacional apresenta como principais características o emprego do Método das Diferenças Finitas (MDF) e técnicas de otimização para tratamento das restrições de contato. Diversos exemplos são apresentados e analisados com o intuito de averiguar a eficiência das metodologias numéricas propostas para solução dos problemas de contato.

Palavras-chave: cascas cilíndricas, interação meio-casca, problemas de contato unilateral, problema de contato bilateral, método das diferenças finitas

1 INTRODUÇÃO

Aplicações envolvendo cascas cilíndricas são bastante comuns na engenharia estrutural. As cascas podem ser encontradas, por exemplo, como estruturas de contenção de túneis e poços, e depósitos de diversos materiais, na forma de silos ou tanques. As Figuras 1 e 2 apresentam algumas estruturas sujeitas a problemas de contato. Nas engenharias mecânica, naval e aeroespacial também existe um grande campo de utilização das cascas cilíndricas.



Figura 1: Casca cilíndrica usada como estrutura de contenção para túneis (Eller, 2009)



Figura 2: Estrutura cilíndrica usada como parede de contenção de uma mina (Eller, 2009)

Quando usadas como estruturas de túneis, poços ou tubulações enterradas, as cascas cilíndricas interagem com o meio, no caso solo ou rocha. Em algumas situações, as cascas atuam como suporte do meio (Bulson, 1985); em outras, são sustentadas pelo solo ou rocha (Straughan, 1990; Silva, 1998); em alguns casos, a estrutura e o solo trabalham simultaneamente, tanto na sustentação como no apoio (Sistema NATM - Solotrat, 2011). Nessas aplicações, se a casca está completamente presa (ou fixa) ao meio, caracteriza-se o Problema de Contato Bilateral (PCB; Paliwal e Bhalla, 1993a,b; Gunawan et al., 2005). Quando a casca não está completamente fixa e pode perder contato, em partes da estrutura, com o meio, sob determinadas condições de carregamento, define-se o Proarcos e anefis com restrições unilaterais de contatoblema de Contato Unilateral (PCU; Güler, 2004; Celepet al., 2011). Nesse último caso, considera-se que o solo ou rocha, denominados genericamente aqui, neste trabalho, de base elástica (ou meio elástico), só ofereça reação se comprimido.

A solução dos problemas de contato casca cilíndrica-base elástica é usualmente alcançada via métodos numérico-computacionais, uma vez que abordagens analíticas são restritas a carregamento e condições de contorno simples e bem definidas, o que não é o caso dos PCUs. Assim, para muitos problemas de contato de interesse prático, não é possível encontrar as soluções analíticas das equações que regem o problema (Bulson, 1985). Os métodos experimentais, embora úteis e precisos, se mostram onerosos, tanto em custo quanto em tempo de execução (Szilard, 2007).

Os métodos numéricos, apesar de proverem soluções aproximadas, quando bem formulados, desenvolvidos e aplicados na discretização do sistema estrutural casca-base, fornecem

resultados próximos dos considerados reais (Szilard, 2004; Burden e Faires, 2008). Entre os métodos numéricos mais usados na solução dos PCBs e PCUs estão (Choi, 2006): o Método dos Elementos Finitos (MEF); o Método dos Elementos de Contorno (MEC); o Método dos Elementos Discretos (MED); e o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Este trabalho se insere na linha de pesquisa Mecânica Computacional, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), e é uma continuação direta dos trabalhos de Silveira (1995), Silva (1998), Pereira (2003) e, mais recentemente, Maciel (2012). Todos utilizaram o MEF na discretização e aproximação dos respectivos problemas de contato. Silveira (1995) estudou a estabilidade de colunas, arcos e anéis com restrições unilaterais de contato; Silva (1998) propôs formulações numéricas para analisar os problemas de contato bilateral e unilateral entre placas e fundações elásticas; Pereira (2003) se concentrou na aplicação dessas formulações aos problemas de contato unilateral envolvendo vigas e bases elásticas; Maciel (2012) desenvolveu um novo módulo do CS-ASA (Computational System for Advanced Structural Analysis; Silva, 2009) para análise da estabilidade elástica de colunas com restrições bilaterais de contato.

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta ou programa computacional para o estudo e análise de problemas envolvendo cascas cilíndricas com restrições de contato impostas por bases elásticas. Essa ferramenta computacional, em que ambos os PCB e PCU podem ser tratados, apresenta como principais características:

- i. O emprego do Método das Diferenças Finitas para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base elástica; e
- ii. A utilização de novas estratégias ou metodologias de solução dos PCB e PCU, baseadas no conhecimento prévio da região de contato entre os corpos (PCBs) ou em sua definição posterior (PCUs).

2 FORMULAÇÃO GERAL

A Figura 3 apresenta um painel cilíndrico (estrutura) em contato com o solo (base elástica). A estrutura pode ser definida como um sólido elástico contínuo de domínio V , com o contorno delimitado por três superfícies distintas, supostas regulares: S_u , S_f e S_c . Como nos problemas estruturais usuais, S_u define a região do sólido onde os deslocamentos são prescritos e S_f é a região do sólido onde as forças externas são prescritas. A superfície denominada S_c define a região de contato entre os corpos. As Figuras 4 e 5 apresentam essas três regiões para os dois tipos de problema de contato analisados neste trabalho.

Para a estrutura, as equações de equilíbrio interno, as relações cinemáticas e as relações constitutivas são dadas, respectivamente, por:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ em } V \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ em } V \quad (3)$$

em que σ_{ij} representa as componentes cartesianas do tensor de Cauchy, ε_{ij} caracteriza as componentes de deformação infinitesimal, u_i as componentes dos deslocamentos e C_{ijkl} define o

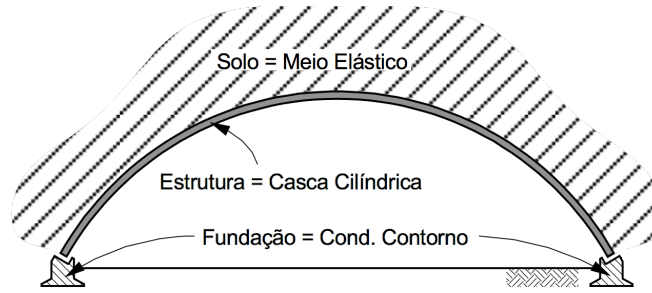


Figura 3: Painel cilíndrico em contato com uma base elástica

tensor das propriedades elásticas da casca. As forças de corpo foram desprezadas na análise (Eq. (1)) e fez-se uso da notação indicial com a convenção usual de somatório.

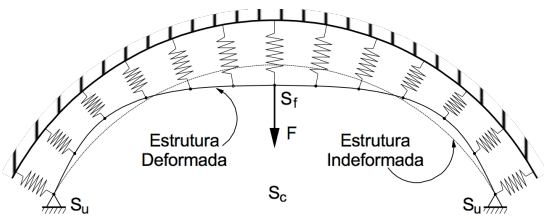


Figura 4: Contato bilateral

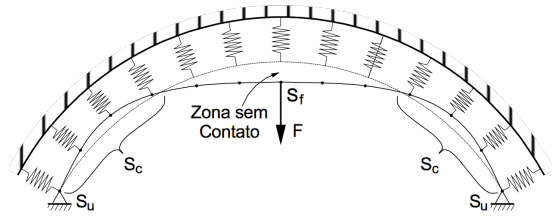


Figura 5: Contato unilateral

A reação da base pode ser descrita genericamente através da seguinte equação:

$$r_b = C_b u_b \quad (4)$$

em que u_b e r_b são o deslocamento e a reação à compressão da base elástica, respectivamente, e C_b caracteriza as propriedades mecânicas da base elástica.

Para o sistema estrutural analisado, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_u \quad (5)$$

$$F_i = \sigma_{ij} n_j \text{ em } S_f \quad (6)$$

com a Eq. (5) representando a condição de contorno essencial do problema, sendo u_i o valor prescrito do deslocamento em S_u ; a Eq. (6) define o equilíbrio das forças que deve existir em S_f .

Para a caracterização dos PCB e PCU a serem resolvidos, necessita-se ainda de uma equação adicional que indica a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em S_c e que, fisicamente, representa a condição de impenetrabilidade entre os corpos. Para o caso do PCB, tem-se a seguinte expressão para a distância φ entre os dois corpos:

$$\varphi = u_b - u_i = 0 \text{ em } S_c \quad (7)$$

A equação anterior mostra que os deslocamentos da estrutura e da base elástica são iguais na região de contato S_c . Essa condição é típica da situação de contato bilateral entre corpos.

Já para o caso do PCU, a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em S_c é descrita

através da inequação em termos da distância entre os dois corpos, ou seja:

$$\varphi = u_b - u_i \geq 0 \text{ em } S_c \quad (8)$$

que representa a condição de impenetrabilidade entre a estrutura e o meio. Assim, ao se analisar o comportamento de um ponto genérico em S_c , uma das seguintes situações pode ser observada:

i. Caso ocorra o contato entre os corpos (base e estrutura), escreve-se:

$$\varphi = 0 \text{ e } r_b > 0 \quad (9)$$

ii. No caso de separação entre os corpos, ou seja, com o descolamento entre a base e casca, tem-se:

$$\varphi > 0 \text{ e } r_b = 0 \quad (10)$$

As condições que definem de forma completa o contato como sendo unilateral são, portanto, dadas pela Eq. (8), a inequação:

$$r_b \geq 0 \quad (11)$$

e a relação de complementaridade entre φ e r_b , ou seja,

$$\int_{S_c} r_b \varphi dS_c = 0 \quad (12)$$

A Figura 6 fornece o domínio de validade dessas três relações e o gráfico de validade da lei de contato.

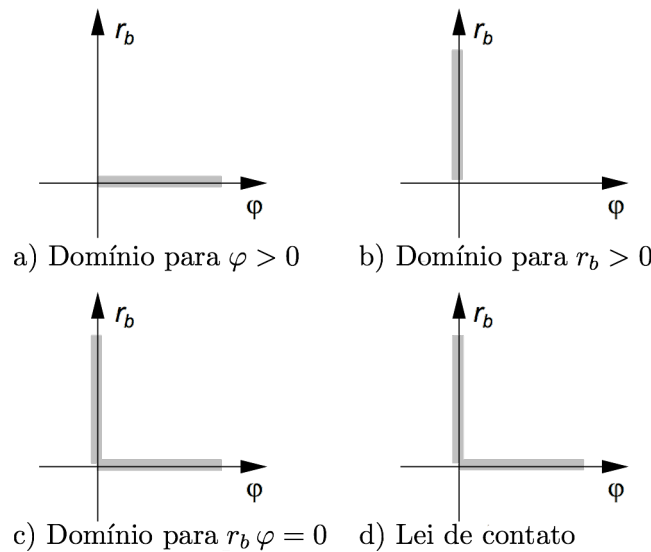


Figura 6: Domínio de validade das restrições de contato unilateral (Silva et al., 2001)

A solução do PCU pode ser obtida através da Eq. (1), com o auxílio das Eqs. (2) e (3), respeitando-se as condições de contorno dadas pelas Eqs. (5) e (6), das Eqs. (8) e (11) e da condição de complementaridade dada pela Eq. (12). Entretanto, a não linearidade decorrente das condições de contorno em S_c torna a solução direta do problema uma tarefa bastante difícil. É necessário, portanto, formular um problema de minimização equivalente para que seja possível utilizar uma estratégia numérica conveniente para a sua solução. Como demonstrado em

Silveira (1995), o problema de otimização:

$$\text{Min } \Pi(u_i, u_b) \quad (13)$$

$$\text{Sujeito a: } -\varphi \leq 0, \text{ em } S_c \quad (14)$$

onde

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} C_b u_b^2 dS_c - \int_{S_f} F_i u_i dS_f \quad (15)$$

é equivalente à solução das equações e restrições impostas na formulação apresentada.

No caso do PCB, substitui-se a Eq. (14) pela condição de igualdade da Eq. (7) (Maciel, 2012).

3 TEORIA DE CASCA CILÍNDRICA E MODELOS DE BASES ELÁSTICAS

3.1 Equações básicas da casca cilíndrica

A Figura 7a define os elementos geométricos da casca cilíndrica. O sistema de coordenadas é o x , θ e z , com origem no ponto P situado na superfície média da casca, com os eixos x e θ tomados coincidentes com as direções longitudinal e circunferencial, respectivamente, e o eixo z é normal à superfície. Os deslocamentos de um ponto da casca são u , v e w , L é o comprimento longitudinal, t é a espessura e R é o raio médio da casca. A casca cilíndrica está sujeita a carregamentos, tanto nos bordos (Fig. 7b) quanto ao longo da superfície (Fig. 7c).

A formulação adotada é baseada nas seguintes hipóteses simplificadoras:

- i. As tensões normais σ_z que atuam na direção radial da casca são desprezíveis em comparação com as outras tensões;
- ii. As deformações devido ao cisalhamento transversal podem ser desprezadas; as fibras normais à superfície de referência indeformada permanecem normais e não sofrem variação no seu comprimento durante o processo de deformação;
- iii. A casca é considerada esbelta ($t \ll R$);
- iv. O material da casca é homogêneo e apresenta comportamento linear elástico;
- v. As forças que agem sobre o sistema são conservativas.

As duas primeiras hipóteses implicam em uma distribuição linear dos deslocamentos ao longo da espessura da casca e, para que sejam empregadas de maneira adequada, devem ser acompanhadas da terceira (Love, 1944).

As forças, N_i ou N_{ij} , e momentos, M_i ou M_{ij} , resultantes, por unidade de comprimento, que atuam num elemento infinitesimal genérico da casca cilíndrica isotrópica, bem como a pressão lateral externa q , são representadas na Fig. 8. As equações diferenciais de equilíbrio do elemento infinitesimal podem ser transformadas nas três equações (Brush e Almroth, 1975; Gonçalves, 1985; Silveira, 1990):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{2R^2 \partial \theta} = 0 \quad (16)$$

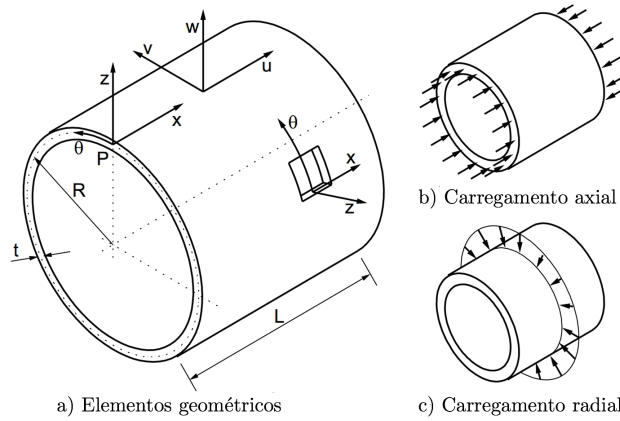


Figura 7: Geometria da casca cilíndrica e tipos de carregamento atuantes

$$\frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{N_{x\theta}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{R^2 \partial \theta} = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_\theta}{R^2 \partial \theta^2} + q(x, \theta) = 0 \quad (18)$$

em que C e D são as rigidezes de membrana e de flexão da casca, respectivamente. Essas grandezas são definidas como:

$$C = \frac{Et}{1 - \nu^2} \quad (19)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (20)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson.

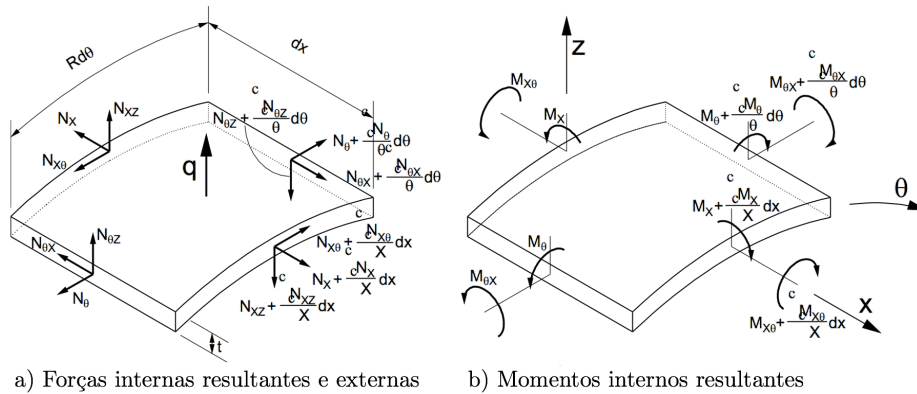


Figura 8: Forças internas e pressão lateral atuantes no elemento infinitesimal de casca cilíndrica

Com as hipóteses de pequenos deslocamentos, material elástico e certos tipos de cargas atuantes, as Eqs. (16) e (17) têm pouca influência na resposta do sistema, sendo, portanto, desprezadas. Considerando-se a influência da base elástica, a Eq. (18) pode ser apresentada como função apenas do deslocamento w da superfície média da casca:

$$\frac{1}{R^2} w + \frac{D}{C} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \frac{q(x, \theta) + r_b}{C} = 0 \quad (21)$$

ou

$$\frac{C}{R^2}w + D \nabla^4 w = q(x, \theta) + r_b \quad (22)$$

com q representando a pressão lateral atuante e r_b a reação da base elástica, que depende dos modelos de bases elásticas utilizados.

3.2 Modelos de bases elásticas

Neste trabalho, o interesse da resposta da base elástica limita-se à obtenção das forças (reações) na região de contato com a estrutura, não importando o campo de deslocamento ou estado de tensões. A Figura 9 ilustra a modelagem do solo ou rocha por pequenas molas que oferecem reação ao deslocamento da estrutura.

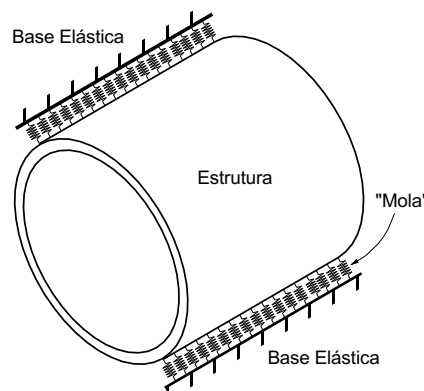


Figura 9: Representação da base elástica através de pequenas molas

Modelos que utilizam apenas um parâmetro para o comportamento do solo/rocha são os mais simples. Nessa categoria destacam-se os modelos de molas discretas dispostas ao longo da região de contato e o modelo contínuo de Winkler (Hetényi, 1946; Kerr, 1964). Modelos como os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov (Kerr, 1964; Harr et al., 1969; Yang, 1972; Zhaohua e Cook, 1983; Horvath, 1993) assumem a interação entre as molas e apresentam dois parâmetros para definir o comportamento da base elástica.

4 DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA SOLO-CASCA

4.1 Equação de equilíbrio da casca cilíndrica na forma de diferenças finitas

Para o caso bidimensional, como é o caso das equações de equilíbrio de cascas cilíndricas, a malha unidimensional (variação apenas em x) terá que ser substituída por uma com duas dimensões (x e θ , no caso). A Figura 10 apresenta um trecho de uma malha usada para discretizar a casca cilíndrica (tomada plana). A malha é formada por retângulos com dimensões Δx e $R\Delta\theta$. Nessa malha, destaca-se o ponto pivotal na posição (i, j) , onde a equação de equilíbrio do sistema, Eq. (22), será aplicada.

Na forma de diferenças finitas, a equação de equilíbrio assume a forma (Silveira, 1990):

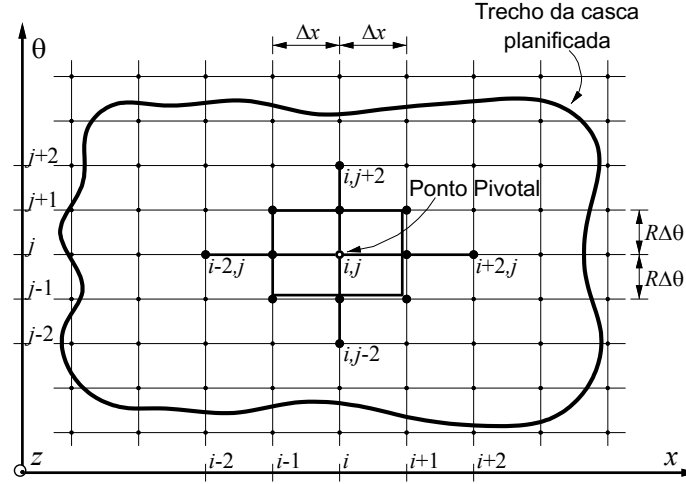


Figura 10: Malha de DF retangular num trecho genérico da casca cilíndrica

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{t^2}{12\Delta x^4} \right] (w_{i-2,j} + w_{i+2,j}) + \left[\frac{t^2}{12R^4\Delta\theta^4} \right] (w_{i,j-2} + w_{i,j+2}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{6R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{3R^4\Delta\theta^4} \frac{t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (-w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{3\Delta x^4} \frac{t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (-w_{i-1,j} - w_{i+1,j}) + \\
 & \left[\frac{t^2}{2\Delta x^4} + \frac{2t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} + \frac{t^2}{2R^4\Delta\theta^4} + \frac{1}{R^2} \right] = \frac{q(x,\theta)}{C} \quad (23)
 \end{aligned}$$

A representação da equação de equilíbrio da casca, Eq. (23), na forma molecular, é mostrada na Fig. 11.

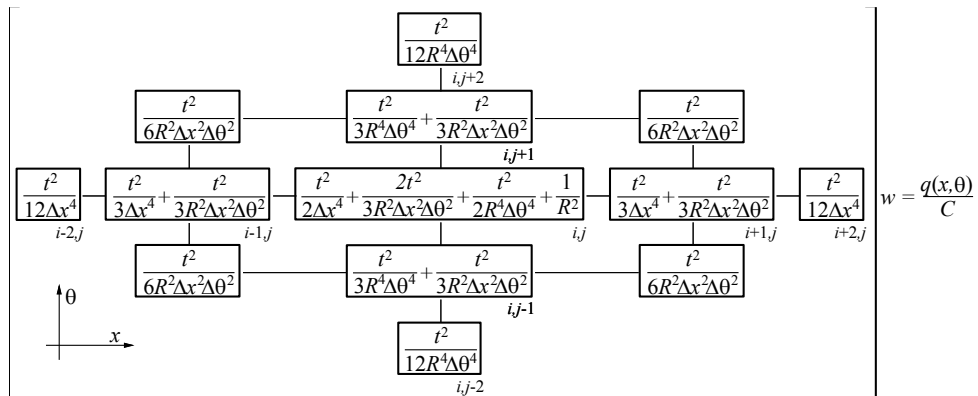


Figura 11: Molécula de DF que representa a equação de equilíbrio da casca cilíndrica

4.2 Modelos de base elástica na forma de diferenças finitas

No caso dos modelos de um parâmetro, a contribuição da base se apresenta de forma bastante simples e direta, através da equação:

$$(r_b)_{i,j} = k_B(w_{i,j}) \quad (24)$$

em que (i, j) define a posição do ponto pivotal, k_B é o valor da rigidez da base e w é o deslocamento. Dessa forma, $\mathbf{K}_b$ será uma matriz diagonal, cujas componentes não nulas terão o valor k_B para o modelo de mola e k_B multiplicado pela área de influência do ponto nodal para o modelo de Winkler.

No caso dos modelos com dois parâmetros, a reação da base elástica é representada, genericamente, usando diferenças finitas, pela expressão:

$$(r_b)_{i,j} = k_B(w_{i,j}) - \frac{k_M}{R\Delta x\Delta\theta} [(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) - 4(w_{i,j})] \quad (25)$$

onde (i, j) define a posição do ponto pivotal, k_B é o parâmetro de rigidez elástico da fundação e k_M representa, no caso do modelo de Pasternak, o parâmetro da rigidez cisalhante da camada. Sua forma molecular pode ser vista na Fig. 12, onde estão os coeficientes que farão parte da matriz $\mathbf{K}_b$.

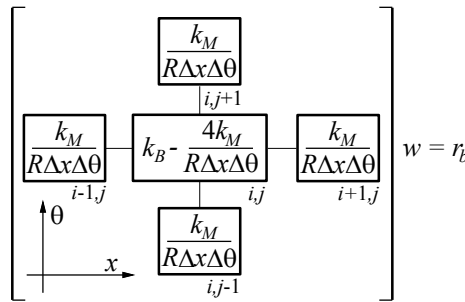


Figura 12: Molécula de DF dos modelos de base elástica com dois parâmetros

5 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO

As estratégias numéricas utilizadas neste trabalho para a solução aproximada dos problemas de contato bilateral (PCB) e unilateral (PCU) apresentam como características principais:

- i. O emprego do Método das Diferenças Finitas (MDF), onde se substitui o domínio original dos corpos (estrutura e base elástica) e seus respectivos contornos por uma malha, obtendo-se uma solução aproximada para os problemas. Como consequência, chega-se no sistema de equações algébricas que rege os PCB e PCU em estudo;
- ii. No caso do PCB, após essa discretização do sistema, a solução do problema linear pode ser alcançada de forma direta resolvendo-se esse sistema de equações algébricas; e
- iii. No caso do PCU, também após a aplicação do MDF, a solução do problema não linear não pode ser obtida de uma forma direta e, assim, duas metodologias de solução para esse problema são apresentadas.

5.1 Transformação do problema contínuo em discreto

Aplica-se o MDF para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base elástica. Isso é feito substituindo-se as derivadas que aparecem nas equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base por fórmulas de diferenças das variáveis de campo, no caso os deslocamentos, em pontos selecionados do sistema. Esses pontos estão localizados na malha de diferenças finitas. Faz-se o mesmo para as expressões que descrevem as condições de contorno do problema. Como consequência da aplicação do MDF, chega-se num sistema de equações algébricas, a partir do qual os deslocamentos da casca ou base, nos pontos da malha, podem ser obtidos, ou seja:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}_e \quad (26)$$

em que $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do sistema casca-base, $\mathbf{F}_e$ é o vetor das forças externas atuantes e $\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos nodais do sistema, incógnitas do problema. Efetivamente, a matriz de rigidez do sistema, $\mathbf{K}$, é montada a partir do arranjo das equações de equilíbrio da casca com a da base elástica.

5.2 Tratamento do problema de contato bilateral

Caso a casca e a base estejam sujeitas às restrições bilaterais de contato, pequenos deslocamentos e deformações, com o material de ambos os corpos exibindo comportamento elástico, é possível a adoção de hipóteses da teoria linear elástica para solução do problema. Dessa forma, a solução do problema de minimização equivalente, descrito pela Eq. (13), e restrição dada pela Eq. (7), onde os deslocamentos da casca são iguais ao da base, e a região de contato S_c é conhecida a priori, pode ser obtido diretamente resolvendo-se a equação matricial, Eq. (26), que é reescrita da seguinte forma:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} = \mathbf{F}_e \quad (27)$$

em que o vetor $\mathbf{U}$ representa os deslocamentos nodais da casca e da base, que são iguais nesse caso; $\mathbf{K}_L$ e $\mathbf{K}_b$ são as matrizes de rigidez da casca e base, respectivamente.

5.3 Tratamento do problema de contato unilateral

Caso o sistema casca-base esteja sujeito às restrições unilaterais de contato, mesmo considerando as hipóteses de pequenos deslocamentos e deformações, e material elástico, a solução do PCU não pode ser obtida diretamente através de Eq. (27), uma vez que não se conhece, *a priori*, a região de contato S_c entre os corpos. Assim, no caso do PCU, após a discretização do sistema, o problema de minimização equivalente, definido pela Eq. (13), e restrição dada pela Eq. (14), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{MIN } \Pi(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \quad (28)$$

$$\text{Sujeita a: } -\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \leq 0 \quad (29)$$

em que se considera agora o vetor $\mathbf{U}$ como os deslocamentos nodais da estrutura e $\mathbf{U}_b$ os deslocamentos nodais da base.

Estratégia de Solução 1 (ES1). A região de contato S_c é avaliada considerando diretamente as restrições de contato unilateral, ou seja, formulando-se o PCU como um Problema de Com-

plementaridade Linear (PCL), isto é, como um problema de otimização com restrições, que é descrito genericamente da seguinte forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{M}\mathbf{z} \quad (30)$$

$$\mathbf{w} \geq 0; \quad \mathbf{z} \geq 0; \quad \mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0 \quad (31)$$

tal que $\mathbf{M}$ é uma matriz quadrada de ordem $p \times p$, e $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ e $\mathbf{q}$ são vetores de dimensão p . Nessa formulação, não existe função a ser minimizada ou maximizada; o objetivo é a obtenção dos vetores $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ que satisfaçam a Eq. (30), respeitando-se as restrições dadas pela Eq. (31).

A transformação do problema de minimização em questão (Eq. (28) e restrição dada pela Eq. (29)) num PCL (Eq. (30) e restrições dadas pela Eq. (31)) equivalente, em que técnicas de pivoteamento podem ser empregadas para resolvê-lo, envolve o emprego de metodologias numéricas específicas. Neste trabalho, utiliza-se uma formulação onde as incógnitas são os deslocamentos da base elástica e os deslocamentos relativos entre os corpos. Essa formulação tem como ponto de partida o indicador variacional:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_L \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_b^T \mathbf{K}_b \mathbf{U}_b - \mathbf{U}^T \mathbf{F}_e \quad (32)$$

com $\mathbf{U}$ e $\mathbf{U}_b$ sendo os deslocamentos da estrutura e da base, respectivamente; $\mathbf{K}_L$ e $\mathbf{K}_b$ são as matrizes de rigidez da estrutura e da base, respectivamente; e $\mathbf{F}_e$ é o vetor de forças externas nodais.

Aplicando o teorema de Lagrange no indicador variacional (32) em relação a valores nodais cinematicamente admissíveis de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{U}_b$, chega-se à equação de equilíbrio do sistema:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{U} + \mathbf{K}_b \mathbf{U}_b = \mathbf{F}_e \quad (33)$$

Através de algumas transformações e manipulações algébricas realizadas na equação anterior, chega-se a:

$$\mathbf{U}_b = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{F}_e + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{K}_L (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) \quad (34)$$

que é equivalente a Eq. (30), caso se reconheça que:

$$\mathbf{w} = \mathbf{U}_b; \quad \mathbf{q} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{F}_e; \quad \mathbf{M} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{K}_L; \quad \mathbf{z} = \mathbf{U}_b - \mathbf{U} \quad (35)$$

Assim, a Eq. (34) com as restrições:

$$\mathbf{U}_b \geq 0; \quad (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) \geq 0; \quad \mathbf{U}_b^T (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) = 0 \quad (36)$$

definem um PCL padrão, onde técnicas de otimização podem ser usadas na sua solução.

Estratégia de Solução 2 (ES2). A região de contato S_c é inicialmente aproximada através de uma determinada estratégia; na sequência, utiliza-se o método de Newton-Raphson para corrigi-la e avaliar a participação da base elástica na obtenção de outras incógnitas do problema. Nessa estratégia de solução, como as restrições de contato não são consideradas de uma forma direta, define-se o seguinte problema de otimização sem restrições a ser resolvido:

$$\mathbf{g} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_B] \mathbf{U} - \mathbf{F}_e \neq 0 \quad (37)$$

com $\mathbf{g}$ sendo o vetor gradiente, ou forças desequilibradas do sistema casca-base, que deve se anular ao longo do processo iterativo de Newton-Raphson. A cada iteração, através de uma nova avaliação de S_c , corrige-se a participação da base elástica, ou seja, a matriz de rigidez $\mathbf{K}_b$. Esse processo iterativo é concluído, indicando que a solução do PCU foi atingida, quando

determinado critério de convergência for satisfeito.

6 EXEMPLOS

6.1 Estudo dos modelos bases elásticas (PCB)

O trabalho de Straughan (1990), apesar de estudar placas (com os quatro bordos livres), tem grande semelhança com esta pesquisa por usar o MDF como metodologia de solução de problemas de placas sobre bases elásticas, em que ocorre **contato bilateral** entre os corpos elásticos.

Tentando aproximar o problema resolvido por Straughan (1990), usou-se um painel retangular de $7,2 \times 14,4 \text{ m}^2$, com uma carga distribuída de $2,394 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ aplicada sobre ele, como o apresentado na Fig. 13. Algumas adaptações tiveram que ser feitas para aproximar o problema analisado do encontrado na literatura. Primeiramente, considerou-se para o painel cilíndrico um raio de 1000 m, para que se assemelhasse à placa plana. Em segundo, adotou-se o uso de apoios simples nas laterais menores, pois o presente programa não permite o uso de bordos livres nos quatro lados. A base usada por Straughan segue o modelo de Pasternak ($k_B = 1,2993 \text{ MN/m}^3$ e $k_M = 2,54652 \text{ MN/m}$).

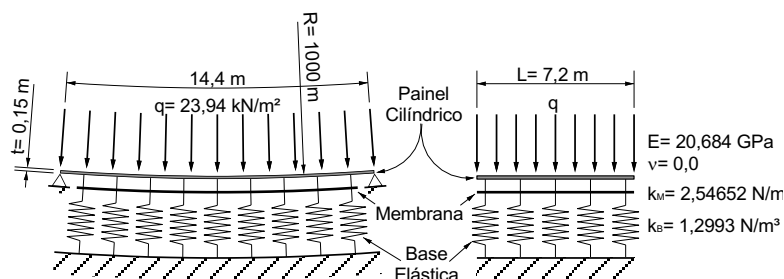


Figura 13: Painel cilíndrico assente em base elástica - contato bilateral

A Figura 14 apresenta o deslocamento radial encontrado nos pontos localizados numa linha que passa no meio do painel, paralela aos lados de menor dimensão (simplesmente apoiados). Percebe-se que existe uma boa aproximação das configurações deformadas e as diferenças observadas são oriundas do ganho de rigidez proporcionado pelas diferenças nas condições de contorno (de livres para simplesmente apoiadas). A Tabela 1 apresenta os valores máximos de deslocamento e erros obtidos.

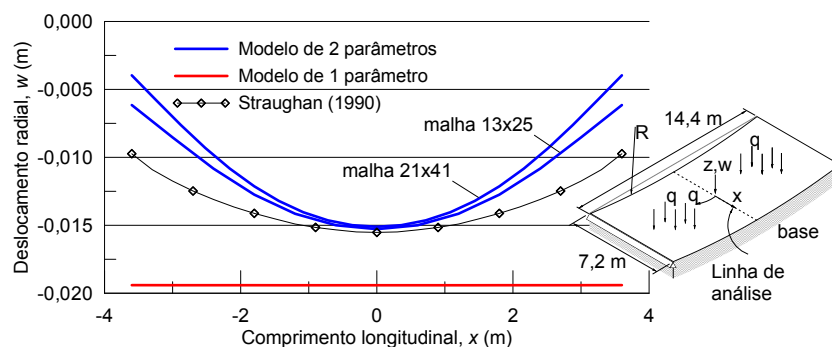


Figura 14: Deslocamento radial em um painel de curvatura suave sobre uma base elástica

Além disso, o que se pode observar nesse exemplo é que a adoção do modelo de Winkler - usando apenas o primeiro parâmetro k_B -, introduziu pouca rigidez ao sistema casca-base (observa-se que a linha de deslocamentos do gráfico apresentou uma curvatura muito suave, quase reta). Esse comportamento é esperado, mesmo no caso desse problema, que tem uma relação entre k_B e k_M de tamanho razoável ($k_B/k_M = 0,51$).

Tabela 1: Deslocamento radial máximo do painel/placa

Análise	w (metros)	erro (%)
1 parâmetro (malha de 21×41)	-0,01941	20,0%
2 parâmetros (malha de 21×41)	-0,01511	2,74%
2 parâmetros (malha de 13×25)	-0,01528	1,58%
Straughan,1990 (malha de 13×25)	-0,01552	

Foi feita, também, uma análise dos deslocamentos para painéis cilíndricos, onde são testados vários parâmetros das bases elásticas (com contato bilateral) e carregamentos diferentes. Primeiramente, aplicou-se uma carga distribuída de 10^6 N/m² sobre o painel apresentado na Fig. 15, com formato quase quadrado e simplesmente apoiado nos quatro lados. O deslocamento radial obtido numa linha longitudinal mediana é apresentado na Fig. 16. O primeiro parâmetro k_B foi tomado constante em todos os testes e igual a 10^6 N/m³. O segundo parâmetro, k_M , sofreu uma variação de $1,0 \times 10^5$ N/m até $2,0 \times 10^6$ N/m, com relações k_B/k_M de 10; 2; 1 e 0,5.

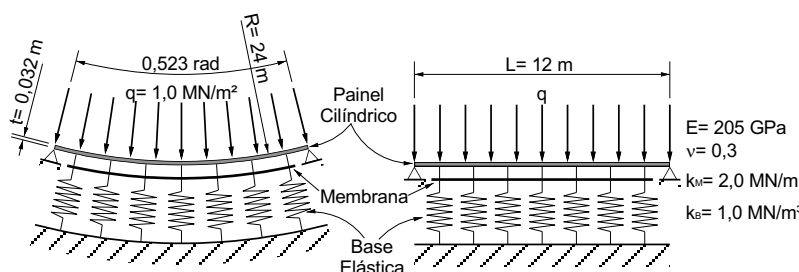


Figura 15: Painel cilíndrico quadrado assente sobre base elástica com contato bilateral

Apesar do deslocamento na região mediana do painel não ter sofrido variação perceptível, foi observado que o ganho de rigidez oferecido pelo modelo de base com dois parâmetros interferiu efetivamente na redução da perturbação causada pelas condições de contorno e reduzindo, inclusive, o momento fletor, em x , máximo na casca nessa região.

Na sequência, considerou-se uma carga concentrada de valor 10^6 N no centro do mesmo painel anteriormente analisado. Os deslocamentos radiais e momentos fletores na direção x obtidos são apresentados na Fig. 17. Também foram usados os mesmos parâmetros para os modelos de base do problema anterior.

Nessa avaliação, percebe-se, assim como no primeiro caso, que houve um ganho efetivo de rigidez proporcionado pelo modelo de 2 parâmetros. Os valores de deslocamento máximos e momentos em θ , apresentados na Tabela 2, demonstram que a adoção de um parâmetro k_M grande (em relação a k_B) acarretará uma redução efetiva do deslocamento radial e do momento

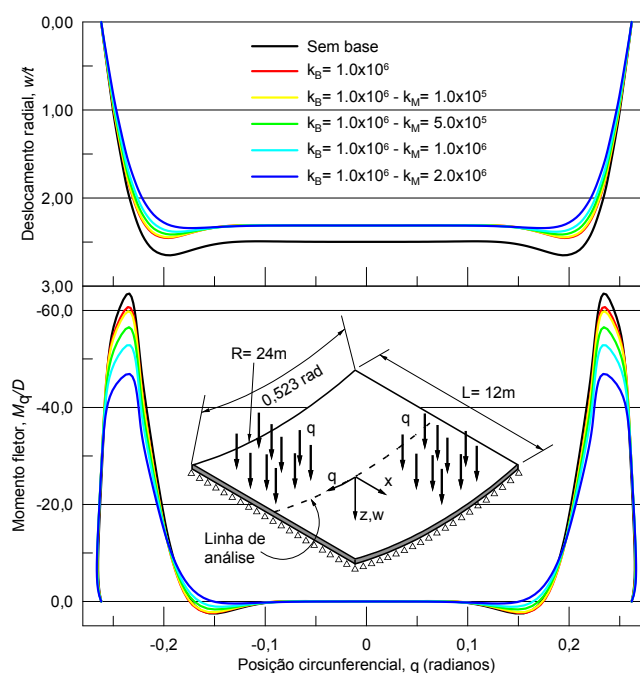


Figura 16: Deslocamento radial e momentos fletores em x de um painel sob carga distribuída variando os parâmetros da base

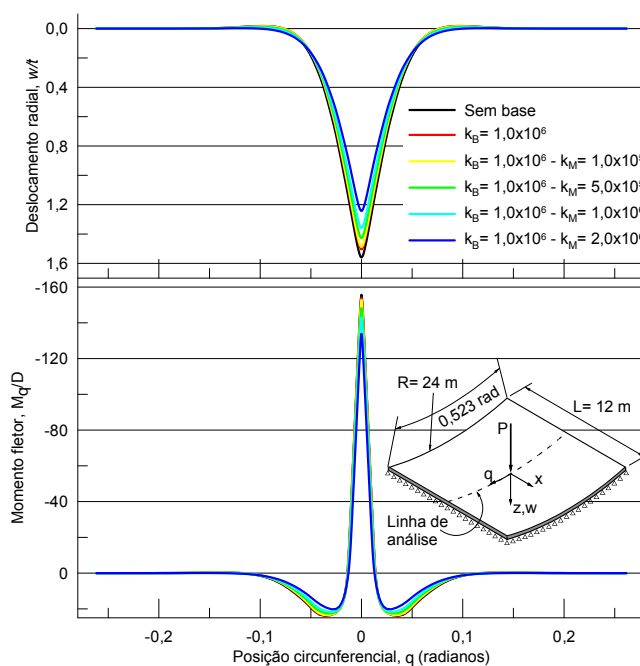


Figura 17: Deslocamento radial e momentos fletores em θ de um painel sob carga concentrada variando os parâmetros da base

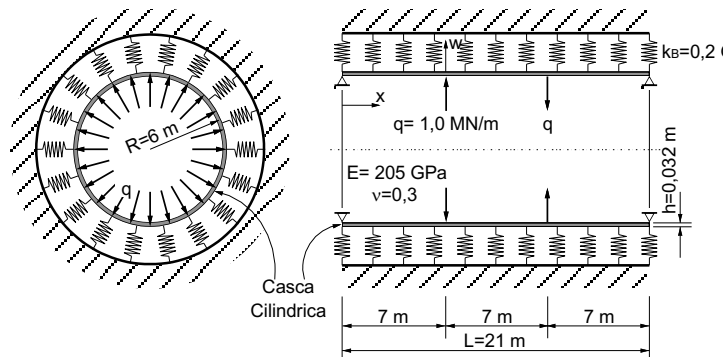
máximos da casca. Dependendo da situação, esse fato pode acarretar um “mascaramento” dos resultados, levando a um subdimensionamento da estrutura.

Tabela 2: Deslocamento radial, x , e momentos fletores máximos, M_θ , de um painel sob carga concentrada variando os parâmetros da base

Análise	w (metros)	Momento em θ (Nm)
Sem base	0,04993	-28898232
Winkler ($k_B = 1,0 \times 10^6$)	0,04817	-28604894
$k_B = 1,0 \times 10^6$ e $k_M = 1,0 \times 10^5$	0,04817	-28604439
$k_B = 1,0 \times 10^6$ e $k_M = 5,0 \times 10^5$	0,04806	-28559427
$k_B = 1,0 \times 10^6$ e $k_M = 1,0 \times 10^6$	0,04569	-27525087
$k_B = 1,0 \times 10^6$ e $k_M = 2,0 \times 10^6$	0,03979	-24850753

6.2 Cargas em linha (PCU)

Para realçar o aparecimento de zonas de perda de contato (descolamento), em contraposição às zonas de compressão, procurou-se aplicar duas cargas em linha circunferencial, com sentidos opostos, sobre a casca cilíndrica analisada. Esse carregamento é representado na Fig. 18. Porém, procurou-se posicionar essas cargas suficientemente distantes uma da outra, de forma que uma pouco interferisse nos deslocamentos causados pela outra, evitando sobreposições ou compensações na configuração deformada (deslocamento radial) da casca, indesejadas à análise.

**Figura 18: Tubo cilíndrico em contato unilateral com um meio elástico**

Uma vez que o contato unilateral fornece diferentes tipos de oposição ao deslocamento dependendo da configuração deformada (função do carregamento), esse tipo de problema estrutural poderá destacar os efeitos das restrições de contato de forma clara.

Como ilustrado na Fig. 18, o tubo circular de aço tem 21 metros de comprimento e os carregamentos em linha circunferencial são aplicados em $x = 7$ m e $x = 14$ m, com sentidos opostos. Na mesma figura são apresentados os demais dados necessários para a definição do problema; a malha de discretização da casca usada é de 31×81 nós (x e θ).

Na Figura 19 é apresentada a configuração deformada obtida através das seguintes análises: sem contato, com contato bilateral e com contato unilateral usando as duas estratégias propostas.

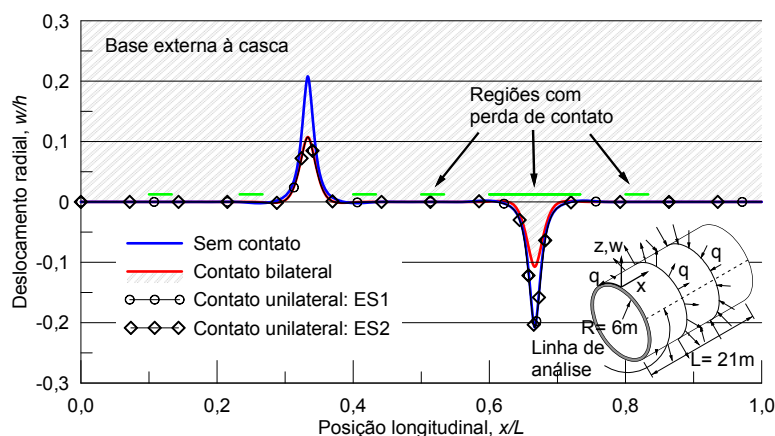


Figura 19: Configuração deformada da casca para diferentes análises: PCB e PCU

Da Figura 19, é possível perceber que os resultados obtidos entre as duas estratégias propostas são iguais. Além disso, existe coerência entre os resultados do contato unilateral com os do contato bilateral e sem contato. Isto é, os deslocamentos obtidos no PCU, em ambas as estratégias, foram semelhantes aos obtidos sem a consideração da base nos pontos onde ocorreram descolamentos e semelhantes aos obtidos com contato bilateral nas outras regiões. Isso significa que, nos pontos onde houve deslocamento positivo ocorreu reação da base elástica (com correspondente redução do deslocamento) e nos demais pontos, onde ocorreu deslocamento negativo, a casca se deformou com pouca ou nenhuma interferência da base.

6.3 Cargas concentradas

Considerando um painel abatido de aço, praticamente quadrado, com 12 m de lado, como o apresentado na Fig. 20, aplicaram-se quatro cargas concentradas (na direção radial), duas comprimindo a casca contra a base elástica e duas tracionando, todas com igual intensidade. Foram feitas quatro análises diferentes para o problema: sem contato, com contato bilateral e usando as duas estratégias para contato unilateral (ES1 e ES2). Adotou-se uma malha de 21×21 nós. A configuração deformada obtida numa determinada região de pontos (linha de análise) é apresentada na Fig. 21.

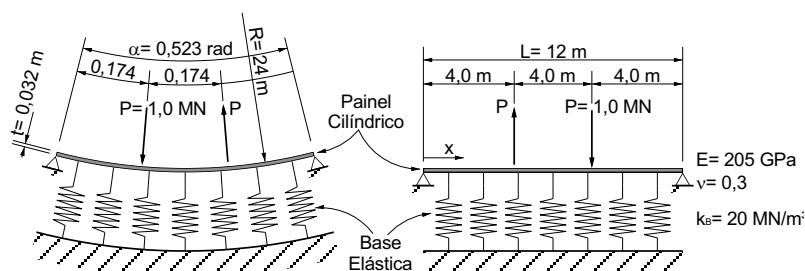


Figura 20: Painel quadrado com quatro cargas concentradas

Analisando os resultados obtidos, percebe-se que a configuração dos deslocamentos é bastante semelhante à verificada no problema anterior. Nas zonas de contato, os deslocamentos encontrados ao considerar o contato bilateral (PCB) são praticamente iguais ao unilateral (PCU). Nas zonas de descolamento a similaridade é outra, isto é, os deslocamentos obtidos com o contato unilateral são praticamente iguais aos da casca sem influência da base elástica. A Figura 22

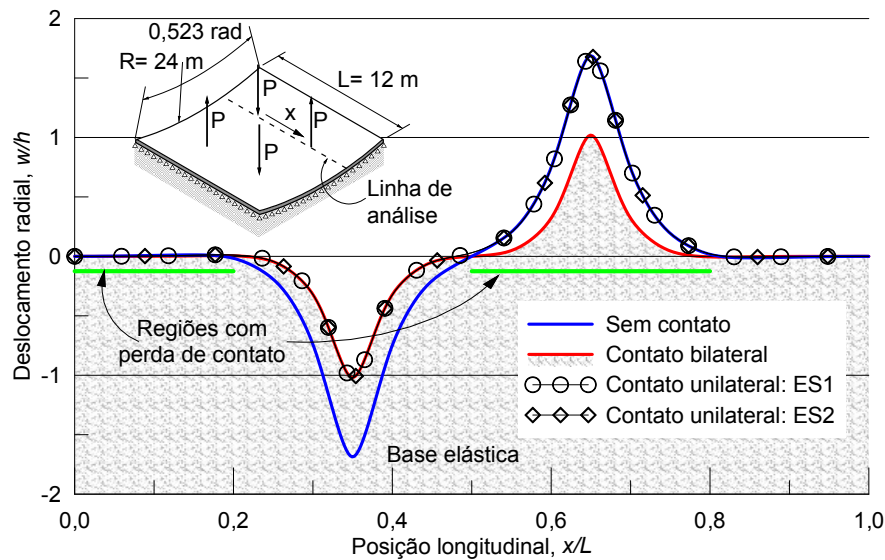


Figura 21: Deslocamento radial na direção x de um sistema painel-base sob cargas concentradas

apresenta, para ilustração, a configuração deformada do sistema casca/base, e o deslocamento da base, mostrando as zonas de contato e as de descolamento (quando a base não reage ao deslocamento da casca).

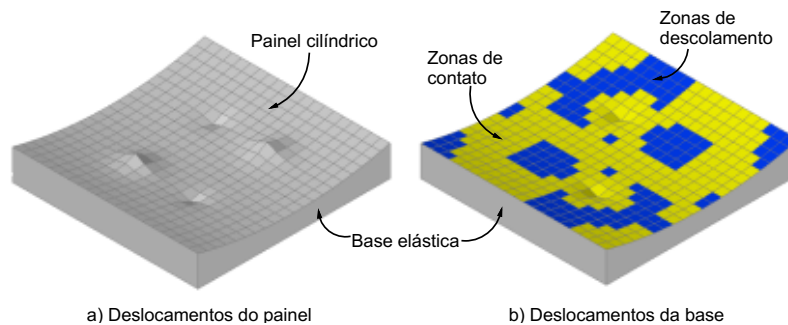


Figura 22: Superfície deformada do sistema e da base sob cargas concentradas (f.esc.: $\times 10$)

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foram realizadas neste trabalho análises computacionais de problemas envolvendo cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas.

O Método das Diferenças Finitas foi usado na discretização do problema de interação casca-meio, caracterizando-se como uma alternativa viável a outros métodos numéricos. Foram implementados modelos de bases elásticas, com um ou dois parâmetros. Tais modelos funcionaram adequadamente, tanto na consideração de contato bilateral quanto unilateral. Entretanto, evidenciou-se a necessidade da definição dos parâmetros de rigidez do solo, principalmente o parâmetro que determina a interação entre as molas (k_M), para que os resultados obtidos fiquem mais próximos de resultados reais. Ademais, o nível de não linearidade é vinculado à configuração deformada da casca, pois essa configuração pode representar maior ou menor formação de zonas de descolamento. Os fatores que influenciam o deslocamento dos pontos nodais são

os mesmos que definem a rigidez do sistema (R , t , E , k_B , etc.) e, por conseguinte, o nível de não linearidade do problema e a eficiência das estratégias. Por fim, o tipo de carregamento e o sentido da carga também podem influenciar o nível de não linearidade e, consequentemente, a eficiência das estratégias. Cargas que tracionam a casca, causando descolamento da base, tendem a proporcionar maior nível de não linearidade que as cargas que comprimem a casca contra a base elástica.

Em continuidade a este trabalho, pretende-se estudar cascas cilíndricas com restrições de contato levando-se em conta as não linearidades geométrica e física da casca e meio.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e CNPq (agências federais), Fapemig (fundação estadual), Fundação Gorceix, PROPEC e PROPP/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Brush, D. O. & Almroth, B. O., 1975. *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. McGraw- Hill Inc. USA.
- Bulson, P. S., 1985. *Buried Structures: Static and Dynamic Strength*. Chapman & Hall Ltd., NY.
- Burden, R. L. e Faires, J. D., 2008. *Análise Numérica*. Cengage Learning, São Paulo, SP.
- Celep, Z., Güler, K. e Demir, F., 2011. Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load. *Structural Engineering and Mechanics-ASCE*, Vol. 37, No. 1, pp. 61-77.
- Choi, S., 2006. *Computations in tunneling: a revisit to numerical modeling programs*. Modeling Tools, PBWorld, New York.
- Donnel, L. H., 1934. Stability on thin-walled tubes under torsion. N.A.C.A. TR 479.
- Eller, P. R., 2009. *Elementos de Cálculo Estrutural*. Notas de aula - CIV 230, UFOP/EM/DeCiv, Ouro Preto, MG.
- Gonçalves, P. B., 1985. *Equações Gerais de Cascas Esbeltas para Análise Não-Linear e Estudo da Instabilidade Elástica*. Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Güler, K., 2004 Circular elastic plate resting on tensionless Pasternak foundation. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 130(10), pp. 1251-1254.
- Gunawan, H., Mikami, T., Kanie S. e Sato M., 2005. Finite element analysis of cylindrical shells partially buried in elastic foundations. *Computer & Structures*, Vol. 83, pp. 1730-1741, Elsevier.
- Harr, M. E., Davidson, J. L., HO, D-M, Pombo, L. E., Ramaswamy, S. V. e Rosner, J. C., 1969. Euler beams on two parameter foundation model. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 95, No. SM4, pp. 933-948.
- Hetényi, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*. University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., USA.

- Horvath. J. S., 1993. Beam-column-analogy model for soil-structures interaction analysis. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 110, No. 2, pp. 358-364.
- Kerr, A. D., 1964. Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 31, pp. 491-498.
- Love, A. E. H., 1944. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications.
- Maciel, F. V., 2012. *Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas*. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- Paliwal, D. N. e Bhalla, V. 1993a. Large deflection analysis of cylindrical shells on a Pasternak foundation. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 53, pp. 261-271, Elsevier.
- Paliwal, D. N. e Bhalla, V. 1993b. Large amplitude free vibrations of cylindrical shells on a Pasternak foundation. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 54, pp. 387-398, Elsevier.
- Pereira, W. L. A., 2003. *Formulações Numéricas para Análise de Vigas em Contato com Bases Elásticas*. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- Sanders Jr, J. L., 1961. Nonlinear Theories for Thin Shells. *Div. Eng. & Appl. Physics*, pp. 1-35, Harvard University, USA.
- Silva, A. R. D., 1998. *Análise de Placas com Restrições de Contato*. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- Silva, A. R. D., Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B., 2001. Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 38. pp. 2083-2100, Elsevier.
- Silveira, R. A. M., 1990. *Análise Não-Linear Geométrica de Cascas Cilíndricas Isotrópicas e Enrijecidas*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio.
- Silveira, R. A. M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio.
- Solotrat, 2011. Túneis - uma solução de engenharia inteligente. *Revista de Fundações e Obras Geotécnicas*, Vol. 6, Solotrat Engenharia Geotécnica, São Paulo.
- Straughan, W. T., 1990. *Analysis of Plates on Elastic Foundations*. PhD Thesis, Faculty of Texas Tech University, Texas, USA.
- Szilar, R., 2004. *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical*. Numerical and Engineering Methods, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.
- Yang, T. Y., 1972. A finite element analysis of plates on two parameter foundation model. *Computer & Structures*, Vol. 2, pp. 593-614.
- Zhaohua, F. e Cook, R. D., 1983. Beam elements on two parameter elastic foundation. *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 6, pp. 1390-1402.